グロモフ

藤原 耕二 (東北大学 数学)
fujiwara@math.tohoku.ac.jp

2003.12.21

グロモフ (Mikhael L. Gromov) は 1943 年 12 月 23 日、ロシアのレニングラード地方に生まれ、レニングラード大で学んだ。共にロホリン (Rokhlin) の学生として当時を知るエリアッシュバーグ (Eliashberg) によれば、数年年長のグロモフは既にスター的な存在だったそうだ。1974 年からニューヨーク州立大、1982 年からパリの研究所 IHES 所属である。1970 年（ニース）、1978 年（ヘルシンキ）、1983 年（ワルシャワ）、1986 年（バークレー）と 4 回、国際数学者会議 (ICM) に招待されている。最近では 2002 年京都賞受賞に来日した。

グロモフの仕事は広範で深いが、幾何学者と言ってよいと思う。現象の背後にあって、それを統制している比較的簡単な幾何学的な仕組みを見抜く力が抜群である。革新的なアイディアで分野に甚大な貢献をした例として、偏微分方程式における「ホモトピー原理」(h(omotopy)-principle) や、シンプレクティック幾何における、概正則曲線 (pseudo-holomorphic curve) などがあるが、この文章では私の知識の制約から離散群論を中心に説明する。

私がグロモフを始めて見たのは 1992 年の秋グロモフが東大に一月滞在したときで、三日間の連続講演を聞きに行った。2001 年夏、短期間 IHES に滞在する機会があり、オフィスがグロモフの隣になった。やや意外だったのは、グロモフが決まった時間に来て仕事をして、決まった時間に帰るという普通のスタイルだったことだ。彼のオフィスには人が頻繁に来る。私の椅子の脇にある壁の向こう側には黒板が掛けてあるようで、そこでグロモフが大声で話しながら何かを力強く書きつける迫力は壁を通して伝わってきた。滞在中ランダム群についてグロモフが講演したので、論文がほしいと申し出ると、コピーしてよいとワープロ打ち中の手書き

の原稿を貸してくれたのは嬉しかった。最後にグロモフ先生、還暦おめでとうございます。

1 ほとんど何々

グロモフの群論は幾何と切り離せないから、ほとんどフラット多様体 (almost flat manifold) の理論から始めるのも悪くないだろう。この「ほとんど何々」という表現はグロモフ数学によく出てくる。まずビーベルバッハ (Bieberbach) の定理を述べる。曲率が 0 のリーマン多様体をフラット（または平坦）と呼ぶ。この文章の中で多様体は断らない限り連結で境界がないとする。

定理 1 (ビーベルバッハの定理). M を n 次元のコンパクトでフラットなリーマン多様体とする。この時 M の基本群は $\mathbb{Z}^n$ に同型な部分群を有限指数で含み、$\mathbb{Z}^n$ の各元は M の普遍被覆 $\mathbf{E}^n$ に平行移動として作用する。M は n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{E}^n$ を $\mathbb{Z}^n$ の作用で割って得られる n 次元トーラスを有限被覆に持つ。

$\mathbb{Z}^n$ は加群 $\mathbf{E}^n$ の離散部分群とも考えられる。この定理は、コンパクトでフラットなリーマン多様体を分類している。

次に、ほとんどフラットなリーマン多様体を定義しよう。定数 $\varepsilon > 0$ について、コンパクトなリーマン多様体が ε-フラットとは、断面曲率 K と直径 d について $|K|d^2 \leq \varepsilon$ となることである。不等式の左辺は直径 d が入っているので、リーマン計量を定数倍しても不変な量である。コンパクトな多様体 M が「ほとんどフラット」とは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、あるリーマン計量 g が存在して、その計量について M が ε-フラットになることである。フラットな多様体は、ほとんどフラットである。

すぐに思い浮かぶ問題は、フラットではないが、ほとんどフラットな多様体の存在と、その分類だろう。存在についてだが、ベキ零な単連結リー群 L を、ある離散部分群 G で割って出来るコンパクトな多様体 M は、ほとんどフラットである。このように得られる多様体は「ベキ零多様体」と呼ばれる。実際、与えられた $\varepsilon > 0$ に対して、L の代数的な構造を使って ε-フラットなリーマン計量を M 上に構成できる。

微分同型による分類については次のグロモフの定理がある。ビーベルバッハの定理と対照するように書く。

定理 2 (ほとんどフラット多様体, ['78]). 各整数 $n > 0$ について、次の性質を持つ定数 $\varepsilon_n > 0$ が存在する: M を n 次元のコンパクトなリーマン多様体で、断面曲率 K が至る所、$|K|d^2 \leq \varepsilon_n$ とする。このとき、M はあるベキ零多様体を有限被覆にもつ。特に M の基本群はベキ零部分群を有限指数で含む。

定数 ε_n は論文で与えられている。グロモフの原論文は 12 ページ。証明をブーザー (Buser) とカルヒャー (Karcher) が詳細に解説した本が百数十ページ。深谷賢治先生の推測によれば、この時期のグロモフの論文が短いのはロシアのスタイル（紙を節約するという背景も含めて）なのではないかということである。実際、後の論文は 100 ページを越える長いものも多く、グロモフの論文は結構おしゃべりで読んで楽しい面もある。

この定理は次の点でビーベルバッハの定理に比べて難しい。フラットな多様体の場合、その普遍被覆がユークリッド空間であることはリーマン幾何の簡単な事実である。一方、ほとんどフラットな多様体にはあらかじめベキ零なリー群が付随しているわけではない。

ほとんどフラット多様体は幾何学の中に自然に現れる対象である。代表的な例を挙げよう。M をコンパクトでない完備な n 次元リーマン多様体とする。ある定数 $a < b < 0$ が存在して断面曲率 K が $a \leq K \leq b < 0$ を満たし、かつ M の体積は有限とする。M はコンパクトでないから無限に延びていく部分があり、全体の体積が有限なのでそのような部分はどんどん細くなっていく。多様体のそのような部分は「カスプ」と呼ばれて、位相的には $n-1$ 次元のコンパクトな多様体 N と半直線の直積になる。N はカスプの断面といえる。一般論から M のカスプは有限個である。このとき N は、ほとんどフラットな多様体であることが知られている。もし M が双曲多様体、つまり $a = b = -1$ なら N はフラットな多様体である。

2 群の増大度

群の増大度 (growth) について説明するために加群 $\mathbb{Z}^2$ を考えよう。これは二つの元 $a = (1,0), b = (0,1)$ で生成される。元 $g = (n,m)$ は $a^n b^m$ に等しい。$a^n b^m$ を「文字」a, b の「語」と考えたとき、その文字数 $n+m$ は、「語の長さ」と呼ばれる。元 (n,m) を表す（すなわち群の元として等しい）語は $a^n b^m$ 以外にも $a^{n+1} b^m a^{-1}$ など無限にあるが、そのような語の長さの最小値は $n+m$ である。これを元 (n,m) の長さと呼ぶ。

このようなことは、有限生成群を視覚化したケイレイ (Cayley) グラフを考えると見て取りやすい。このグラフの頂点集合は群の元集合と一致する。一つの生成元を群演算として元 g に掛ける事で元 h が得られるとき、2 頂点 g, h を辺で結ぶというルールで得られる連結なグラフが、ケイレイグラフである。$\mathbb{Z}^2$ のケイレイグラフは平面における整数格子である。この場合、長さ l の元は $8l$ 個ある。これを $\mathbb{Z}^2$ の生成元 $(1,0),(0,1)$ についての増大関数は $\gamma(n) = 8n$ と言う。二つの元で生成される自由群 F_2 の、この生成元についての増大関数は $\gamma(n) = 4 \cdot 3^{n-1}$ である (図 1)。

n のある多項式 $p(n)$ が存在して、任意の $n \in \mathbb{N}$ について $\gamma(n) \leq p(n)$ の時、G は多項式増大度を持つという。定数 $C > 0$ が存在して、任意の $n \in \mathbb{N}$ について $\exp(Cn) \leq \gamma(n)$ の時、G は指数増大度を持つという。

群の増大関数は群だけでなく生成元にもよるが、多項式増大度、指数増大度をもつという性質はそれぞれ群だけで決まることが分かっている。これらは、生成元の選択によらないだけでなく、群の「擬等長」という同値関係だけによる。

定義からして群の増大度は幾何学的な性質だが、リーマン多様体の基本群に関して、その曲率と増大度の関係にまつわるミルナー (Milnor) の定理 (1968) は基本的である: 「コンパクトで負の断面曲率を持つリーマン多様体の基本群は指数増大度を持つ」。同じ頃、有限生成のベキ零群は多項式増大度を持つことが知られていた。多項式増大度を持つ有限生成群の分類はグロモフが次の定理で与えた。

定理 3 (多項式増大度, ['81]). 有限生成群 G が多項式増大度を持つことと、G に有限指数のベキ零部分群が存在することは同値。

この定理の以前に群 G が行列群、リー群の部分群の場合には結果が正しいことは知られていた。実際、そのような G は有限指数のベキ零部分群を含むか、またはランクが 2 の自由群を部分群として含む。これは「ティッツのオルタナティブ」(Tits alternative) と呼ばれ、離散群論のいろいろな場面で現れる現象である。自由群を部分群として含むなら指数増大度をもつ。

グロモフは G が多項式増大度を持つことから出発して、ヒルベルトの第 5 問題の解決（ある種の連続群がリー群になること）を援用して、リー群の有限生成部分群の場合に帰着することで定理を証明した。グロモフの定理でどれが一番優れているかと聞かれたら、私はこの定理を挙げる。

3　双曲群

グロモフの離散群論のハイライトは双曲群 (hyperbolic group) の理論だろう。200 ページ近い大論文 ['87] は MSRI(米国バークレーにある数学の研究所）の出版物に収められている。この論文については 3 冊の解説本が出ている。MSRI は 1 年の研究の基本テーマを 2 つ程度決めて、それに沿った研究員を集めて運営される。所長を含め数名の常勤者を除き、ほとんどのメンバーは最長 1 年の研究滞在で、研究所の収容メンバー数は 50 人くらいだろうか。本の前書きによると 1985 年のテーマは組み合わせ群論だったようで、期間中の研究集会の報告集 “Essays in group theory” に論文がある。この MSRI での活動は実り多いものだったようで、この期間に大学院生やポスドクとして MSRI で過した研究者たちが、その後随分良い仕事をしている。グロモフの双曲群の理論に端を発した一連の研究は幾何学的群論 (geometric group theory) と呼ばれている。

一言でいうなら、双曲群の理論は古典的な双曲平面における双曲性を、測地空間やさらには有限生成群にケイレイグラフを通して一般化し、それを使って測地空間の位相的な性質や離散群の代数的な性質を調べるものである。双曲性を持つ群、すなわち双曲群の代表例として思い浮かべてほしいのはコンパクトな双曲曲面、より一般にコンパクトな双曲多様体の基本群である。それらの基本群に共通の代数的な性質の一つとして、$\mathbb{Z}^2$ に同型な部分群を含まないことがある。大まかには、$\mathbb{Z}^2$ と対になる空間はユークリッド平面やフラットトーラスで、双曲空間とは相性が悪い。一般に、グロモフの意味の双曲群にも $\mathbb{Z}^2$ に同型な部分群はない。

双曲群の定義を簡単に述べよう。双曲平面 $\mathbf{H}^2$ 上に 3 辺が測地線からなる三角形 Δ を考える。ガウス・ボンネの定理から Δ の面積は π 未満である。よって Δ は幅が一様に細い三角形になっていることが分かる。その細さを次のように計ろう。$\delta \geq 0$ を定数として、測地三角形 Δ の任意の一辺が他の二辺の和集合の δ-近傍に含まれるとき三角形は δ-細いと言う。双曲平面の測地三角形は全て 2π-細い。このような、測地三角形の一様な細さはユークリッド平面では明らかに成り立たない。グロモフはこの性質で測地空間 X の双曲性を特徴付けた。測地空間とは二点の距離が測地線の長さで実現される距離空間だが、ある定数 δ が存在して任意の測地三角形が δ-細いとき X は双曲的と呼ぶ。

この定義によると、n 次元双曲空間 $\mathbf{H}^n$ だけでなく、単連結な完備リーマン多様体に、ある定数 $c > 0$ が存在して断面曲率が $-c$ 以下なら双曲的になる。定義の一般性からリーマン多様体だけでなく無限グラフでも双

曲的になりうる。例えばツリー (tree) は双曲的である。実際、ツリーにおいて三角形はつぶれてしまっていて 0-細い (図 2)。

さて有限生成群にはケイレイグラフというグラフが付随していた。グラフの辺の長さを 1 と考えれば、測地空間になる。グロモフはケイレイグラフが双曲的なとき、群を双曲群と呼んだ。これは生成元によらない性質になる。前にも述べたが、双曲群は $\mathbb{Z}^2$ に同型な部分群を含まない。これは群の双曲性の定義が、表面的には代数的でないから驚きである。一見、安直に見える双曲性の定義からグロモフは多くの性質を導いた。

組み合わせ群論には長い伝統があり、知識やテクニックの集積が大きかったが、必ずしも統一的なアプローチがあるわけではない。従って新しいよい定理を得るには個別にアイディアが必要である。そのような背景で、双曲群の理論は離散群論の新しい研究の場を開いたという意味で重要だと思う。一般に組み合わせ的な議論は場合わけに帰着することが多く、見落としも起こしやすい印象はあるが、幾何学的な背景があると見通しも良いように思う。

双曲群の理論はそれまでに組み合わせ的に知られていた事実に、より幾何学的な理解を与えた面もある。一例を挙げる。群の元で何乗かすると単位元になるものを、トージョンと呼ぶ。バーンサイド (Burnside) 問題 (1902) とは、「有限生成群 G の任意の元がトージョンとする。G は有限群か？」というものである。有限生成でなければ容易に反例が見つかる。例えば加群 $\mathbb{Q}$ を部分群 $\mathbb{Z}$ で割った群である。バーンサイド問題を否定的に解決する有限生成群の例は知られていたが、グロモフは双曲群を使って、幾何学的な理解と豊富な例を与えた。

定理 4 (['87]). G を無限双曲群とし $\mathbb{Z}$ に同型な部分群を有限指数で含まないとする。このとき G の商群 H で、無限群であるが任意の元がトージョンであるものが存在する。

ただし一般に H は有限表示群ではない。グロモフの論法は少重複関係式群 (small cancellation group) の理論を使っていて比較的見やすい。概略だが、例えば G を 2 元 a, b で生成される自由群としよう。G の任意の元は a, b による語 w で表される。$n \in \mathbb{N}$ をある自然数として、次のような表示の群を考えよう。

$$H = < a, b | w^n = 1, ^\forall w > .$$

ただし、上の関係式で w は a, b による全ての語 w を考えるとする。よってこれは有限生成だが有限表示ではない。明らかに H の任意の元は n 乗

すると単位元になる。しかし H が無限群になるかは分からない。感じとしては n が大きければ H が無限になる可能性は高そうではある。また語 w によって $n = n_w$ を変えても良いとして（それでも H の任意の元はトージョンではある）それが有界でなければ H が無限になる可能性はさらに高そうである。このあたりを幾何学的にきちんと議論したのが上の定理である。ゼルマノフ (Zelmanov) はバーンサイド問題の否定例になる G が少ないことを示して、フィールズ賞を 1994 年に受賞している。ところで、バーンサイド問題への有限表示群での反例は見つかっていない。

4　グロモフとサーストンの分岐被覆

コンパクトで向きの付いた 2 次元多様体、つまり曲面は位相的には種数で分類される。この分類は次の意味で幾何学的な分類でもある。すなわち、種数が 0 なら曲率 $= 1$, 種数が 1 なら曲率 $= 0$, 種数が 2 以上なら曲率 $= -1$ のリーマン計量が曲面に存在する。この事実を、曲面は等質化、または一意化可能などと呼ぶ。一方、4 次元以上では異なる現象がある。

定理 5 (グロモフとサーストン, ['87 G-T]**).** 任意の整数 $n \geq 4$ と定数 $\varepsilon > 0$ に対して、n 次元のコンパクトな多様体 M が存在して次を満たす。

- M にはあるリーマン計量 g が存在し、その断面曲率 K について $-1 - \varepsilon \leq K \leq -1.$
- M は双曲多様体ではない。すなわち、断面曲率 $= -1$ となるようなリーマン計量は M 上存在しない。

この M の構成法は簡単で面白い。しかし群論とは直接関係ないから一言で述べると、コンパクトな双曲多様体 X の余次元 2 の全測地的部分多様体 Y に沿った、ある分岐被覆が M である。

前に述べたように M が 2 次元なら定理の主張は成り立たない。負曲率のリーマン計量を持つコンパクトな曲面には双曲計量が必ず入るからである。さらに 3 次元でも事情は同じと思われるが、これはサーストン (Thurston) の 3 次元多様体の幾何化予想の一部で未解決である。3 次元の場合は 2 次元のように等質化（曲率が定数ということ）は期待できない。しかし 8 つの標準的な幾何構造が知られていて、それで 3 次元多様体が記述されるというのが幾何化予想である。

この定理を群論の観点から見てみよう。定理中の多様体 M だが、コンパクトな負曲率多様体なので、その基本群は双曲群である。部分多様体 Y の基本群 $\pi_1(Y)$ は、多様体 X の基本群 $\pi_1(X)$ の部分群である。X, Y ともに双曲多様体だから、どちらも双曲群である。従って、X の Y にそった分岐被覆による M の構成法を基本群で見てみると、あたかも双曲群 $\pi_1(X)$ の部分群 $\pi_1(Y)$ に沿った「分岐被覆」が $\pi_1(M)$ である。もし双曲群の「分岐被覆による構成」が群論で定式化できれば、双曲群の新たな構成として面白いだろう。

5 格子部分群の数論性

リー群 L の離散部分群 G が格子部分群とは商空間 L/G がハール測度について有限になることである。例えば $SL(n,\mathbb{Z}) < SL(n,\mathbb{R})$ などである。既に述べたように、向きの付いたコンパクト曲面で種数 g が 2 以上なら双曲計量が入るので、その基本群 G は曲面の普遍被覆 $\mathbf{H}^2$ の被覆変換群として、$PSL(2,\mathbb{R}) = Isom(\mathbf{H}^2)$ の格子部分群になる。部分群としての G の実現の仕方は曲面の双曲計量によることに注意しよう。

さて、リー群の格子部分群が、「整数点」のなす部分群である場合、それを数論的格子部分群とよぶ。例えば $SL(2,\mathbb{Z}) < SL(2,\mathbb{R})$ が代表的な例である。一方、曲面の基本群 G を $PSL(2,\mathbb{R})$ の格子部分群として考える場合、数論的な場合とそうでない場合がある。実際、数論的な場合は高々可算個しかなく、一方、G を $PSL(2,\mathbb{R})$ の離散部分群として実現する仕方全体はタイヒミュラー空間と呼ばれ、$6g-6$ 次元のユークリッド空間と同相である。よって、G に同型で数論的でない格子が非可算無限個あることが分かる。

リー群にはランクという重要な量がある。これはリー群に自然に付随している対称空間の中のユークリッド空間 $\mathbf{E}^n$ の最大次元 n のことで、たとえば $SL(n,\mathbb{R})$ のランクは $n-1$ である。次のマルグリス (Margulis) の結果は大変重要である (1970 年代)。

定理 6 (マルグリスの数論性). ランクが 2 以上の半単純リー群の格子部分群は数論的である。

既に述べたが、曲面群の場合を考えれば $PSL(2,\mathbb{R})$ には数論的でない格子がたくさんある。$PSL(2,\mathbb{R})$ のランクは 1 だが、ランクが 1 の他のリー群に、数論的でない格子部分群が存在するか、また実際に構成せよ

というのは答えたい問題である。曲面は2次元の双曲多様体であるが、n次元の双曲多様体に対応するリー群のランクも1で、$SO(n,1)$と書かれる。この場合はグロモフとピアテツキ-シャピロ (Piatetski-Shapiro) により数論的でない格子部分群が構成されている。低次元の場合はこれ以前に別の構成があった。

定理 7 (非数論格子, ['88 G-Sha]). 任意の$n \geq 2$について、ランク1のリー群$SO(n,1)$には数論的でない格子部分群が存在する。

この構成を3次元で簡単に説明する。M_1, M_2を3次元の双曲多様体とし、それぞれが全測地的な閉曲面S_1, S_2を含んでいて、$M_1 \backslash S_1, M_2 \backslash S_2$が連結とする。さらに双曲曲面$S_1, S_2$は等長とする。このとき、$M_1, M_2$をそれぞれ$S_1, S_2$で切断して、それらを切断面で貼り合わせて一つの連結な双曲多様体Mを作る事が出来る (図3)。

さて、リー群の数論的部分群についての性質から、もしMの基本群が数論的なら、M_1, M_2それぞれのある有限被覆M_1', M_2'が等長になる。一方、共通の有限被覆を持たないようなM_1, M_2を構成することが出来るので、あらかじめ、そのような二つからはじめれば、その「雑種」Mの基本群は数論的でない。雑種は論文中の単語 hybrid の訳である。グロモフの論文中での英単語の選び方はしばしばユーモアがある。

6　擬等長、漸近不変量、ランダム群

双曲群の論文から数年してグロモフは離散群論についてのもう一つの大きな論文「無限群の漸近的不変量」を書いた ['93]。その中でグロモフは次のプログラムを提唱した:

有限生成群を「擬等長」によって分類せよ。

擬等長性だが、正確な定義は述べないことにして、およその意味で2つの距離空間が「ほとんど」等長ということだとしておく。読者は離散群をケイレイグラフを通して測地空間と見る事に、もう抵抗はないだろう。有限群の分類や、コンパクトな曲面の位相的分類など、数学のあらゆる分野で分類は重要である。上の問題が一風変わっているのは、無限群という代数的な対象を擬等長という幾何学的な性質、それも一見うさんくさい性質で分類するところかも知れない。

擬等長性はそれまでの数学でもあったし、役にもたっていた。擬等長という概念が有効だった場面として 1970 年頃のモストフ (Mostow) の剛性定理の証明がある。またデーン (Dehn) は 20 世紀の初めに、コンパクトな双曲曲面の基本群と双曲平面が擬等長である事実を使って、曲面群の語の問題、共役問題の解決をした。今から思えば、このデーンの仕事は幾何学的群論である。

大雑把にいうと、幾何学的な性質は擬等長不変なことが多い。例えば、群の双曲性や、群の指数的、多項式増大性などが群の擬等長不変な性質であることは比較的容易である。一方、群の代数的な性質、例えば可換であるとか自由群であるなどは擬等長不変であるとは限らないだろうし、またそうだとしても証明は難しい。

事実としては、有限生成群がベキ零部分群を有限指数で含むという代数的性質は擬等長不変である。しかしこれは前に述べたグロモフの定理、すなわち、この代数的性質が多項式増大という幾何学的性質と同値である事実を通して初めて分かる。また、この定理からユークリッド平面と擬等長な有限生成群は、$\mathbb{Z}^2$ を有限指数で含むという代数的性質も分かる。

以前から知られていた事実にも、このプログラムから見直せるものがある。M を 3 次元のコンパクト双曲多様体とし、G をその基本群とする。このとき、M の普遍被覆 $\mathbf{H}^3$ と G は擬等長である。一方、サリヴァン (Sullivan) によれば逆も正しい (1978)。すなわち $\mathbf{H}^3$ と擬等長な群は有限指数の部分群を取れば、ある 3 次元コンパクト双曲多様体の基本群である。

1990 年頃、ガバイ (Gabai)、独立してキャッソン (Casson) とヤングライス (Jungreis) は次の定理を証明した。3 次元多様体の分類において重要な結果である。

定理 8 (ザイフェルト (Seifert) 予想の解決). M をコンパクトで既約な 3 次元多様体とする。G をその基本群とする。G が $\mathbb{Z}$ に同型な正規部分群を含むなら M はザイフェルト空間である。

この定理の証明で次の定理は一つの鍵だった: 「有限生成群 G が双曲平面 $\mathbf{H}^2$ と擬等長とする。このとき G は曲面群を有限指数の部分群として含む。ただし曲面群はコンパクトな双曲曲面の基本群である」。

最近、グロモフは「ランダム群」についての論文を書いた ['03]。紙面も尽きているし、勉強不足もあり詳しいことは書けない。グロモフは長い間、「ノビコフ (Novikov) 予想」に取り組んでいる。ノビコフ予想はトポロジーの問題だが、今では離散群の問題として定式化されている。ノビコフ予想を一つの原動力として書かれた漸近不変量の論文とランダム

群の論文の中で、ランダム群では反例探しをグロモフは目標にしているようだが、まだ見つかっていない。ランダム群で鍵になるアイディアは双曲性、少重複関係式群、それにエクスパンダー (expander) と呼ばれるある種の有限グラフの系列などで、豊富な数学が含まれる。グロモフの数学は、いつも何でもありである。

参考文献

['78] M.Gromov. Almost flat manifolds. J. Differential Geom. 13 (1978), no. 2, 231–241.

['81] M.Gromov, Groups of polynomial growth and expanding maps. IHES Publ.53(1981), 53-73.

['87] M.Gromov, Hyperbolic groups, "Essays in group theory", MSRI Publ. Springer, 1987, 75-263.

['87 G-T] M.Gromov, W.Thurston. Pinching constants for hyperbolic manifolds. Invent. Math. 89 (1987), no. 1, 1–12.

['88 G-Sha] M.Gromov, I.Piatetski-Shapiro. Nonarithmetic groups in Lobachevsky spaces. IHES Publ. No. 66 (1988), 93–103.

['92 G-Sch] M.Gromov, R.Schoen. Harmonic maps into singular spaces and p-adic superrigidity for lattices in groups of rank one. IHES. Publ. No. 76, (1992), 165–246.

['93] M.Gromov. Asymptotic invariants of infinite groups. "Geometric group theory, Vol. 2 ", 1–295, LMS Lecture Note Ser. 182. 1993.

['03] M.Gromov. Random walk in random groups. GAFA 13 (2003), 73–146.