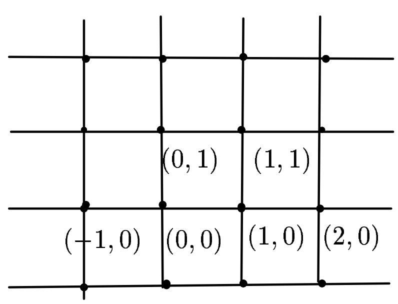
曲面のカーブグラフの幾何

藤原　耕二

1. イントロダクション

この講演[1] は幾何学的群論の一つの話題についてである。幾何学的群論とは、無限離散群を「幾何学的な」手法 – それ以前からある組み合わせ的、代数的な手法と区別して – により研究する分野とも言えるが、問題そのものが幾何学的に述べられている場合もある。それを説明するために、次の問題を考える：3 次元閉双曲多様体を等長類で分類せよ。よく知られているように、Mostow の剛性定理によれば、この問題の一つの答えは、二つの 3 次元閉双曲多様体の基本群が同型なら等長である、となる。さて、この問題を強引に無限群に当てはめると、「無限群を等長類で分類せよ」となるが、このままでは意味をなさないので二つ定義を与える。

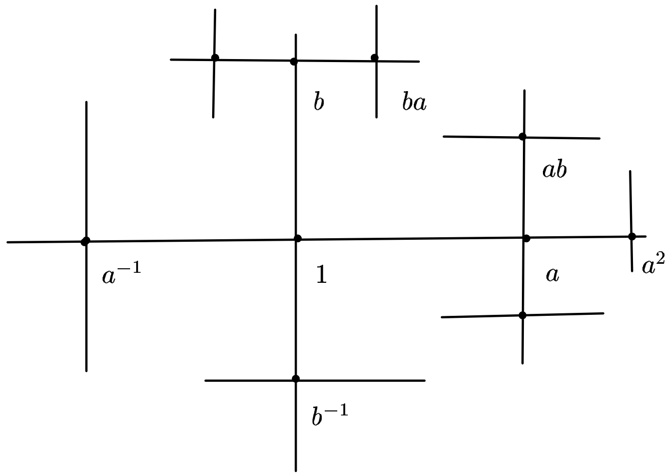
G を有限生成群とし、有限な生成集合 S が与えられたとする。このとき、次のように構成されるグラフ Γ を (G, S) の**ケイリー (Cayley) グラフ**と呼ぶ。まず、Γ の頂点集合は G とする. 次のルールで頂点間を辺で結ぶ：二頂点 $g, h \in G$ に対して、ある元 $s \in S$ があって $h = gs$ なら、この二頂点を辺で結ぶ。この（有向）辺を (g, s, h) と書く。（逆向きの辺は (h, s^{-1}, g) であるが、あらかじめ、$S = S^{-1}$ と仮定しておき、この二つの辺を向きのない辺として同一視する）。有限集合 S が G を生成することからグラフ Γ は連結で局所有限である。さらに、各辺の長さが 1 として Γ に測地距離を導入すれば測地空間になる。やさしい例を考えるなら、加群 $\mathbb{Z}$ の標準的な生成集合 ± 1 についてのケイリーグラフは、数直線と等長で各整数点が頂点である。同様に、加群 $\mathbb{Z}^2$ の標準的な生成集合についてのケイリーグラフは、各辺の長さが 1 の整数格子（ユークリッド平面に埋め込まれていると考えてよい）であり、二つの元 a, b で生成されるランク 2 の自由群 $F_2 = F(a, b)$ のケイリーグラフは各頂点での次数（すなわち辺の数）が 4 の正規ツリーである。G の生成集合 S に関するケイリーグラフに G は次のように等長的に作用する：各元 $g \in G$ に対して、頂点については $G \ni v \mapsto gv \in G$, 辺については $(v, s, vs) \mapsto (gv, s, gvs), s \in S$.



$\mathbb{Z}^2$ の Cayley グラフ

Date: 2006.1.15.

[1] 2006 年度日本数学会年会 (2006.3.26-29 中央大学)・幾何学分科会特別講演 — 80 歳を迎えられる小畠守生先生を祝して.
この文章は特別講演のアブストラクトを一部修正したものである (2006.4.3).



自由群 F_2 の Cayley グラフ

ケイリーグラフの定義を使えば、「有限生成群と生成集合のペアを、そのケイリーグラフの等長類で分類せよ」と問題を述べ変えることが出来るが、生成集合の選択に問題がよっている点がいかにも筋が悪い。それを克服するには等長性の定義に少し細工をすればよい。

距離空間から距離空間への写像 $f: X \to Y$ が擬等長（的）とは、ある定数 $K \geq 1, L \geq 0$ が存在して、すべての $x, y \in X$ について次が成立すること：

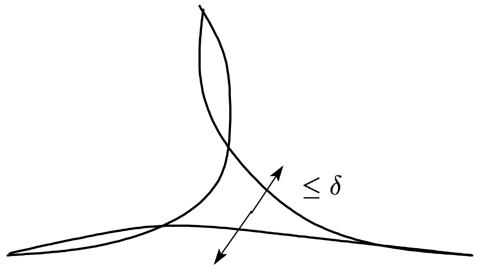
$$d(x,y)/K - L \leq d(f(x), f(y)) \leq K d(x,y) + L.$$

さらに、ある擬等長写像 f について、次も成立するとき X と Y は**擬等長（的）**という：すべての $y \in Y$ について、ある $x \in X$ が存在して、$d(y, f(x)) \leq L$. 群 $\mathbb{Z}^2$ のケイリーグラフがユークリッド平面 $\mathbf{E}^2$ に埋め込まれた整数格子であることは述べたが、整数格子とユークリッド平面は擬等長的である。

比較的容易に確かめられる事実として、有限生成群 G の二つの生成集合についてのケイリーグラフは互いに擬等長である。したがって、次の問題が意味をなす：**有限生成群を、（そのケイリーグラフの）擬等長類で分類せよ**[2]。一般的な答えはなく、いろいろな部分解が知られている。

さて、本題に入る。測地（距離）空間の擬等長不変な性質として Gromov によって導入された「双曲性」がある [G;hyp]。以来、双曲空間、または双曲（性をもつ）群は幾何学的群論の重要な研究対象でもあり、手法でもある。定義を述べるために双曲平面 $\mathbf{H}^2$ についての基本的な事実を指摘する：Δ を測地線 α, β, γ を三辺とする $\mathbf{H}^2$ の測地三角形とすると、α は $\beta \cup \gamma$ の 2-近傍に含まれる。この事実は α, β, γ の役割を入れ替えても成立し、このことを、測地三角形 Δ は 2-細いと言うことにする。この事実はガウス・ボンネの定理の簡単な帰結である。すなわち、Δ の面積は高々π なので、細さが高々2 であることが分かる。一般に測地空間 X に対して、ある定数 $\delta \geq 0$ が存在して、X の任意の測地三角形が **δ-細い**とき（すなわち任意の一辺が他の二辺の δ-近傍に含まれる）、X は δ-双曲的である、または単に（Gromov) **双曲的**であると言う。既に次元 2 の場合は述べたが、同様に n 次元双曲空間 $\mathbf{H}^n$ は Gromov 双曲的である。ツリーは Gromov 双曲的である（$\delta = 0$). 一方、ユークリッド平面 $\mathbf{E}^2$ は Gromov 双曲的でないことは容易に確かめられる（任意の定数 δ に対して、δ-細くない測地三角形が存在するから）。

[2] Gromov が [G;asymp] で提案したプログラムと言われることがある



δ-細い三角形

Gromov 双曲性の定義では、ある定数 δ の存在が重要で、定数の値はあまり重要ではない。次の事実は重要である「測地空間 X, Y が擬等長的であるとする。このとき、X が Gromov 双曲的なら Y は Gromov 双曲的である」。この「双曲性の擬等長不変性」を基に、次の定義を与える。有限生成群 G のケイリーグラフが測地空間として Gromov 双曲的なとき、G を**双曲群**と呼ぶ。したがって、自由群は双曲群であり（あるケイリーグラフがツリーなので）、一方、$\mathbb{Z}^2$ は双曲群でない。一般に $\mathbb{Z}^2 < G$ なら G は双曲群ではない。これは、双曲群の部分群に関する次の基本的な事実から従う。

命題 1.1. G を双曲群とする。部分群 $H < G$ について次のいずれかが成立。

1. 巡回群を有限指数で含む。
2. ランク 2 の自由群を含む。

次の事実は応用上も重要である。群 G が距離空間 X に等長的に作用しているとする。もし作用がプロパーで、作用の商空間がコンパクトなら、G は有限生成で、G のケイリーグラフと X は擬等長的である。ただし、群作用が**プロパー**[3]とは、任意の $x \in X$ と任意の $r \geq 0$ に対して、次の集合が有限であること：$\{g \in G | d(x, gx) \leq r\}$. この事実によれば、$n$ 次元閉双曲多様体 M の基本群 G は双曲群である。M の普遍被覆空間への G の等長作用に上の事実を適用し、双曲性の擬等長不変性を使えばよい。ただし、M のリーマン普遍被覆空間は、この場合 Gromov 双曲的であることは、比較定理を使って示すことが出来る。

上の事実は、幾何学的群論における重要な指針を示している。すなわち、群 G を理解するために、ある幾何学的な対象への作用を考える。この講演でも、その指針の下、写像類群を考える。写像類群そのものは双曲群ではないが、写像類群が作用するある Gromov 双曲空間を利用する。

幾何学的群論に関する参考文献を挙げると、先にあげた Gromov の二つの論文 [G;hyp], [G;asymp] は基本的である。本 [BrHae] は網羅的かつ平易で、リーマン幾何、対称空間との関連も分かりやすい。日本語では、背景となる古典的な双曲平面の幾何について [深谷], 双曲群について [大鹿], 読み物として [藤原] がある。

2. δ-双曲空間

δ-双曲空間について基礎的なことを必要なことを中心に述べる。δ-双曲空間の定義は既に与えたように、すべての測地三角形が δ-細いことである。X を δ-双曲空間とする。X の等長変換 f を次のように分類する。これは双曲平面 $\mathbf{H}^2$ の等長変換の分類の一般化である, cf[深谷]: ある点 $x \in X$ について、巡回群 $\langle f \rangle < \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^2)$ の作用によるオービット集合 $\{f^n(x) | n \in \mathbb{Z}\}$ を考える。

[3]不連続的と訳されることが多い。この訳は空間が局所コンパクトでないとき誤解を招きやすいので、本稿ではプロパーと書く。また定義の中で、任意の r でなく、ある r があってとする流儀もある

1. オービット集合が X の有界集合のとき、f を elliptic と呼ぶ。
2. ある定数 $C>0$ が存在して、すべての $0<n\in\mathbb{Z}$ について $nC\le d(x,f^n(x))$ が成立するとき、hyperbolic と呼ぶ。
3. 上の二つ以外の場合、parabolic と呼ぶ。

elliptic または hyperbolic であるとき、semi-simple [4] と呼ぶ。この定義は、点 x の選択によらないことは容易に確かめられる。

次に個別の等長変換でなく、X に等長変換で作用する群 G を考えよう。たとえば、次のような結果が知られている。命題 1.1 はこれから従う。

命題 2.1. 無限群 G が等長変換で δ-双曲的な X にプロパーに作用しているとする。G のすべての元の作用が *semi-simple* であるなら、G は $\mathbb{Z}$ を有限指数の部分群として含むか、もしくは、ランク 2 の自由群 F を部分群として含む。

この命題で、作用がプロパーであること、各元が semi-simple であることは必要である。たとえば、3 次元の双曲空間 $\mathbf{H}^3$ のホロスフィアは 2 次元ユークリッド空間と等長的であるが、これを不変にするような $\mathbb{Z}^2$ の $\mathbf{H}^3$ へのプロパーな等長作用がある[5]。しかし、この場合、自明でない元の作用は parabolic である。命題の設定で、もし作用の商空間がコンパクトであるなら自動的に G の各元は semi-simple になる。したがって、たとえば、M が 2 次元以上の閉リーマン多様体でその断面曲率が負であるなら、その基本群はランク 2 の自由群を含む。基本群のリーマン普遍被覆空間への作用に命題を適用すればよい。

3. 曲面のカーブグラフと写像類群

3.1. 写像類群. S をコンパクトで向きの付いた曲面とする（境界があるかも知れない）。S の種数を g, 境界の連結成分の個数を p とすると、そのような S は位相同型を除いて一意に決まり、それを $S_{g,p}$ と書く。S の向きを保つ自己同相写像全体のなす群を $\mathrm{Homeo}_+(S)$ と書く。この群を写像のホモトピーによる同値関係で割った商群を S の**写像類群**と呼び、$\mathrm{Mod}(S)$ と書く。写像類群についてのよいサーベイはたとえば [Iv] がある。より発展した話題はたとえば [Mo] を見よ。

$\mathrm{Mod}(S)$ についての基本的な事実をいくつか挙げる：

1. 加算個の元からなる、有限表示群である。表示も求められている。
2. （有限個の）デーンツイストで生成される。
3. 有限指数の部分群で、ねじれ元を含まないものが存在する。そのような有限指数の部分群のコホモロジー次元は有限（g,p の関数として計算されている）である。
4. アーベル部分群 $\mathbb{Z}^{3g+p-3}<\mathrm{Mod}(S_{g,p})$ を含む。従って、$3g+p-3\ge 2$ なら双曲群でない（cf. 命題 1.1)。この部分群は $3g+p-3$ 個のデーンツイストで生成される。
5. [6] $\mathrm{Mod}(S_{1,0})\simeq\mathrm{Mod}(S_{1,1})\simeq\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$

ただし、**デーンツイスト**とは次のように定義される $\mathrm{Mod}(S)$ の元である。曲面 S の単純閉曲線 c を考える。S を c に沿って切断し、360 度ひねり[7]貼り合わせることによって得られる S の自己位相同型のホモトピー類を c に関するデーンツイストとよび、d_c と書く。互いに交わらない閉曲線に関するデーンツイストが可換であるこ

---

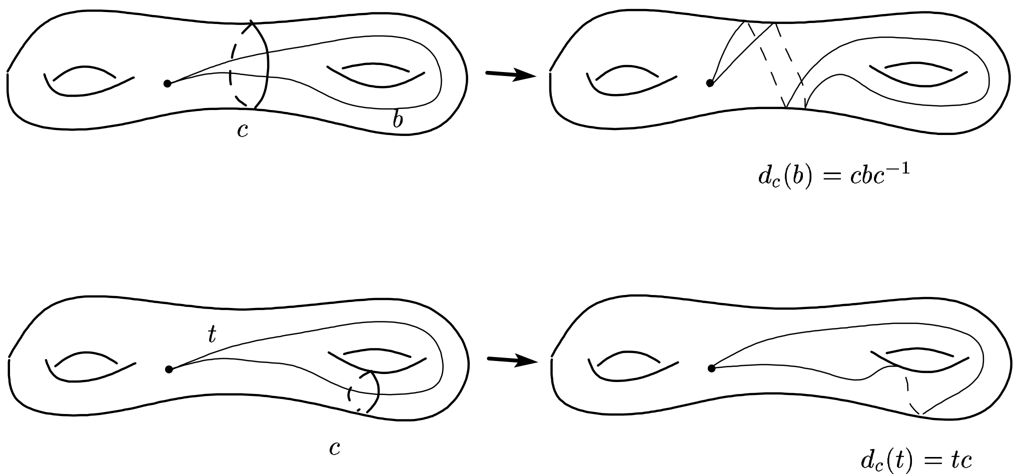
[4] 双曲平面の等長変換群は $SL(2,\mathbb{R})/\pm 1$ であることが知られているが、等長変換として semi-simple であることは行列として semi-simple, すなわち $\mathbb{C}$ で対角化可能であることと同値である.

[5] 商空間で cusp になる

[6] この事実が $\mathrm{Mod}(S)$ と $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ の二つの群の系列の類似の出発点の一つである。実際、両系列の群に共通する性質がいろいろ知られている。一方、互いに異なる群でもある, cf 定理 4.3

[7] 二つの向きがあるが、どちらでもよい。得られる二つの写像は互いに逆写像の関係にある

とは明らか。上の事実4は $S_{g,p}$ が $3g+p-3$ 個の互いに交わらなく、互いにホモトピックでもない本質的な単純閉曲線を含むことによる。ただし、S 上の閉曲線 c が一点にも S の境界成分にもホモトピックでないとき、**本質的**と呼ぶ。



デーンツイスト d_c

写像類群の元 $f \in \mathrm{Mod}(S)$ の分類が知られている。S 上に、いくつかの互いに交わらない、本質的な単純閉曲線の空でない族 $C = \{c_1, \cdots, c_n\}$ があって、この族が f で不変なとき（曲線のホモトピー類を除いて。また、c_i らを入れ替えてもよい）、f は**可約**という。写像類群の元 f の次のような分類は有用であることが知られている。

1. f は有限位数をもつ。すなわち、ある n があって、$f^n = 1$.
2. f は無限位数をもち、かつ可約。
3. f は無限位数をもち、非可約。このような元は**擬アノソフ**と呼ばれる。

この分類は、双曲平面の等長変換の分類：elliptic, parabolic, hyperbolic にある意味で対応している。また、タイプ3が一般的な場合で、デーンツイストは2のタイプである。

写像類群の部分群についての命題を述べる。双曲群の部分群についての性質、命題1.1と類似していることが分かる[8]。

命題 3.1. $\mathrm{Mod}(S)$ の任意の部分群 G について次が成立する。

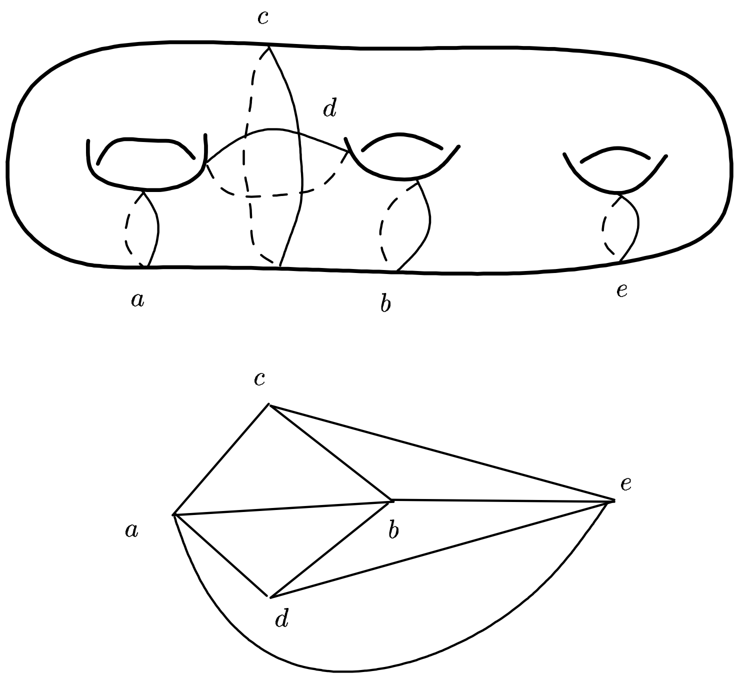
1. G はアーベル群を有限指数で含むか、ランク2の自由群を含む。従って、G が可解な群を有限指数で含めば、アーベル群を有限指数で含む。
2. G が擬アノソフな元を一つ含むとする。このとき、G は無限巡回群（擬アノソフな元で生成される）を有限指数で含むか、もしくは、ランク2の自由群（単位元以外すべて擬アノソフな元と出来る）を含む。

3.2. **カーブグラフ.** S をコンパクトで向きの付いた曲面とする。種数が g、境界の連結成分の個数が p の曲面を $S_{g,p}$ と書いていた。$\kappa(g,p) = 3g+p-4$ とし、断りのない限り $\kappa(g,p) > 0$ の場合だけ考える[9]。S の**カーブグラフ**, $C(S)$, は次のように定義されるグラフである, [Ha]. まず、$C(S)$ の頂点集合は、S 上の本質的な単純（自己交

[8] 偶然ではない, cf. 事項で述べるカーブグラフの双曲性

[9] 既に述べたように、S 上には最大 $\kappa+1$ 個の互いに交わらない、互いにホモトピックでない本質的な単純閉曲線の族がある

差がないこと）閉曲線のホモトピー類全体。さらに、二つの本質的な単純閉曲線が交わらなければ、それらのホモトピー類に対応する 2 頂点を辺で結ぶ [10]。各辺の長さを 1 としてカーブグラフに測地距離を考える。このとき、各頂点の距離は整数で、それを実現する道（いくつかの辺の和集合）が存在する。



カーブグラフ（の一部）
$d(c,d)=2$. 頂点 c,d を結ぶ測地線は無限にある
$c-a-d, c-b-d$ はタイトだが $c-e-d$ はタイトでない

$\kappa(g,p)>0$ とする。カーブグラフ $C(S)=C(S_{g,p})$ について次が知られている (cf. [Iv],[MM]).

1. $C(S)$ は連結で、局所無限なグラフである。
2. $C(S)$ の直径は無限。
3. 2 頂点の距離を実現する測地線は一般的に無限個ある。
4. $\mathrm{Mod}(S)$ は $C(S)$ に等長的に作用。作用はプロパーでない。
5. $\mathrm{Mod}(S)$ の $C(S)$ への作用によって、$C(S)$ の頂点集合に同値関係を考えると同値類は有限個[11]。

補足すると、$C(S)$ の連結性は自明ではないが、二つの頂点 a,b を $C(S)$ の中でつなぐ道（S の閉曲線の列）を具体的に構成できる。アイディアは曲線 a,b の交差数

[10] 一般に n 個の互いにホモトピックでない本質的な単純閉曲線が互いに交わらないとき、それらに対応する n 個の頂点に $(n-1)$ 次元単体を貼るということで定義される複体をカーブ複体と呼ぶ。複体の次元は κ である。カーブグラフはカーブ複体の 1 次元スケルトンである.

[11] さらに、商グラフ $C(S)/\mathrm{Mod}(S)$ は有限グラフである

$I(a,b)$ を減らすような曲線列を取ることである[12]。局所無限であることは、ある閉曲線と交わらない閉曲線（のホモトピー類）が無限個あるから明らか。直径が無限であることは自明ではない [MM]. 写像類群がカーブグラフに作用するのは、S の自己同相写像が閉曲線を閉曲線に写し、かつ互いに交わらないという関係が保たれるからよい。この作用はグラフの自己同型であり、従って等長的である。作用がプロパーでないことは、たとえば、単純閉曲線 c のホモトピー類（簡単のため c と書く）が定める $C(S)$ の頂点の固定化部分群が $\mathrm{Mod}(S\backslash c)$ を含むことから分かる（これは一般に無限群である）。また、デーンツイストの生成する巡回部分群 $\mathbb{Z}$ の作用が既にプロパーでもない。カーブグラフの図において、閉曲線 d に関するデーンツイスト $D=d_d$ を c に作用させて得られる閉曲線 $D(c)$ は曲線 a と交わらないので、$d(D(c),a)=1$. 一般にすべての n にたいして $d(D^n(c),a)=1$. 従って $\langle D\rangle<\mathrm{Mod}(S)$ の作用はプロパーでない。主張 5 は二つの単純閉曲線 $c,d\subset S$ があったとき、$S\backslash c, S\backslash d$ が同相なら、S の自己位相同型写像で c を d に移すものがあることからよい。

次の定理はカーブグラフの幾何についての顕著な結果である。証明は容易ではない。Bowditch による簡略化された議論がある [Bo]。

定理 3.1 ([MM]). $\kappa(g,p)>0$ とする。カーブグラフ $C=C(S_{g,p})$ は δ-双曲的である。

$\mathrm{Mod}(S)$ の $C(S)$ への作用はプロパーではないが、ある種のプロパー性（**弱プロパー**と呼ばれている [BeF]) を持つことが知られている。おおまかに言うと、プロパー性は $C(S)$ の各点への作用が局所有限性を持つことであるが、弱プロパー性は十分離れた二点のなすペアへの群作用の局所有限性を記述している。ここでは Bowditch[Bo2] によってその後導入された**シリンダー無し** (acylindrical) の作用の定義を与える。群 G が距離空間 X に等長的に作用しているとする。任意の $r\geq 0$ に対して、ある定数 L,C が存在して、条件 $d(x,y)\geq L$ を満たす任意の二点 $x,y\in X$ に対して、次の集合の元の個数が C 以下[13]のとき、シリンダー無しの作用と呼ぶ：

$$\{g\in G|d(x,gx)\leq r, d(y,gy)\leq r\}.$$

弱プロパーな作用の定義を正確に述べていないが、シリンダー無しの作用は弱プロパーな作用である。

定理 3.2 ([Bo2]). $\mathrm{Mod}(S)$ の $C(S)$ への作用は、シリンダー無しの作用である。

この作用が弱プロパーであることは知られていた [BeF]. どちらの証明も Masur-Minsky[MM] によって導入された、タイト (tight) な測地線という概念を用いる。Masur-Minsky, Bowditch [Bo2] によって、$C(S)$ の 2 頂点を結ぶタイトな測地線の数は有限個であることが示されている（測地線は無限個あることは述べた）。その有限性を使って、シリンダー無しの作用であることを帰結できる。測地線のタイト性の定義はここでは正確に述べないが、局所無限な $C(S)$ を扱う上で有効な概念である。応用として、$C(S)$ の**漸近的次元** (asymptotic dimension)[G;asymp] が有限であることも示せる [BelF].

4. 結果

4.1. **擬準同型.** G を群とする。G 上の関数 $f:G\to\mathbb{R}$ が**擬準同型** (quasi-homomorphism) であるとは、ある定数 D が存在して、任意の元 $g,h\in G$ に対して

$$|f(gh)-f(g)-f(h)|\leq D$$

が成立すること。定数 D を defect と呼ぶ。$D=0$ のとき、f は準同型である。有界な関数は擬準同型である。G 上の擬準同型全体は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になる。G 上

[12] 距離 $d(a,b)$ と交差数 $I(a,b)$ の関係は単純ではないが重要である, cf.[Bo]

[13] 単に有限個とする定義もある。その場合、プロパーな作用はシリンダー無しの作用である

の準同型と有界な関数が生成する部分空間による商空間を $\mathbf{QH}(G)$ と書くことにする。これも $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間である。本稿では群上の準同型、擬準同型は加群 $\mathbb{R}$ へのものを考える。

群上の準同型だけでなく、擬準同型まで考えることの利点を明確にするために、$G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ を考えよう。G は二つの捩れ元 $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ で生成される[14]。したがって、G 上の任意の準同型 h は自明なものしかない（各生成元上で値 0 を取るから）。一方、G 上には豊富に擬準同型が存在する。実際 $QH(\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}))$ は無限次元であることが知られている (cf. 定理 4.2).

群 G について、$QH(G)$ が自明であるかどうかは既に興味深い性質である。非自明な $QH(G)$ をもつ、最初の例の一つは次の定理による。

定理 4.1 ([Bro]). ランクが 2（以上）の自由群 F について、$QH(F) \neq 0$. さらに、$QH(F)$ は $\mathbb{R}$ 上無限次元である。

群 G が n 個の元で生成されるとき、G 上の準同型全体のなすベクトル空間の次元は高々n である事実と定理 4.1 を対比すると興味深い。また、擬準同型は群の 2 次元有界コホモロジー, $H_b^2(G;\mathbb{R})$, cf. [G;bound] と関連が強いが[15]、曲面群や 3 次元双曲多様体の基本群の有界コホモロジーに関して興味深い結果がいくつか知られている (cf. [MaMo], [Mitsu], [Yo], [So]). 定理 4.1 は双曲群の部分群に拡張されている.

定理 4.2 ([EpF]). G を双曲群とする。部分群 $H < G$ が巡回群を有限指数で含まないとする[16]。このとき、$QH(H)$ は無限次元。

定理 4.1 の証明の内容をここでは述べないが、組み合わせ的な数え上げの方法による。定理 4.2 では、その議論を幾何学的な方法に読み替えた上で、それを適用するには、G が作用する空間に δ-双曲性があれば十分であることを示した。その上で群 G のケイリーグラフへの等長作用を使って、群 $H < G$ 上に擬準同型を豊富に構成した。その手法をさらに押し進めて次の結果が得られる[17].

定理 4.3 ([BeF]). S をコンパクトで向きの付いた曲面とする。写像類群の部分群 $G < \mathrm{Mod}(S)$ が、加群を有限指数で含まなければ、$QH(G)$ は無限次元。

証明には、$\mathrm{Mod}(S)$ の $C(S)$ への等長作用を使う。$C(S)$ の δ-双曲性が重要であるのだが、一方、技術的な困難は作用がプロパーでないことである。しかし、結局、作用が弱プロパー（特に、シリンダー無しならよい）であれば十分であることが示せる (cf. 定理 3.2).

4.2. 剛性. 擬準同型の応用を一つ述べる。$QH(G) = \{0\}$ である群に関する顕著な結果として次がある。

定理 4.4 ([BuMo]). L を半単純なリー群で、そのランクは 2 以上とする。$G < L$ をその既約な格子部分群[18]とする。このとき、$QH(G)$ は自明。

このような $G < L$ の代表的な例は $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}) < \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) (n \geq 3)$ である。一方、$QH(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))$ は無限次元であることは述べた (cf. 定理 4.2). また、微分幾何の結果として、定理 4.4 のような格子部分群 G から $\mathbb{R}$ への準同型は自明であることが知られていた（松島、村上などにより）。

---

[14] $S^6 = T^4 = 1$. これと関係式 $S^3 = T^2 (= -1)$ が群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ の表示を与え、$\mathbb{Z}_6 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_4$ と融合積に書けることも分かる

[15] 実際 $QH(G) \subset H_b^2(G;\mathbb{R})$

[16] 初等的でないと呼ばれる

[17] $G = \mathrm{Mod}(S)$ の場合は [Mo] に予想としてある

[18] 離散部分群で L のハール測度について商空間 L/G が有限なもの

定理 4.4 と定理 4.3 を合わせると次が直ちに分かる。これは群上のランダムウォークにまつわる、群の Poisson 境界についての研究を使って既に知られていた[19].

定理 4.5 ([KaMa], cf.[BeF])**.** ランクが 2 以上の半単純リー群の既約な格子部分群は、曲面の写像類群の部分群ではない。

定理 4.5 に Margulis の正規部分群定理[20]を合わせると次の結論が容易に導かれる。

定理 4.6 ([FaMa], cf.[BeF])**.** G をランクが 2 以上の半単純リー群の既約な格子部分群とし、$f: G \to \mathrm{Mod}(S)$ をコンパクトな曲面の写像類群への準同型とする。このとき、$\mathrm{Im}(f)$ は有限群。

この種の結果はターゲットの $\mathrm{Mod}(S)$ もリー群の格子部分群である場合によく研究されていて、一連の結果は剛性定理と呼ばれる。

4.3. **群の有界生成.** 擬準同型のもう一つの応用を述べるために、一つ定義を与える。群 G に対して、有限個の元 $g_1, \ldots, g_m \in G$ が存在して、任意の元 $g \in G$ に対して、整数 $n_i \in \mathbb{Z}$ が存在して

$$g = g_1^{n_1} \cdots g_m^{n_m}$$

と書けるとき、G は ($g_1, \cdots, g_m$ で) **有界生成** (boundedly generated) であるという。明らかに有限生成なアーベル群は有界生成であるが（任意の有限な生成集合で有界生成される)、任意の有限生成なベキ零群も有界生成であることが知られている。一方、ランクが 2 以上の自由群が有界生成でないことを見るのは容易である。それを説明するために、$F = F(a, b)$ をランク 2 の自由群としよう。いまから F が生成元 a, b では有界生成されないことを見よう。それには、$a^n b^m (n, m \in \mathbb{Z})$ という形の元全体が F に一致しないことを言えばよいが、これは明らかである。F の部分群 $A = \langle a \rangle, B = \langle b \rangle$ にたいして、このような部分集合 $\{a^n b^m\}$ を積集合とよび AB と書く。その様子が図（魚の骨のような部分が積集合 AB) である。この議論から F が有界生成でないことは納得できるだろう。

さらに、$\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ も有界生成ではないが、一方、 $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}), (n \geq 3)$ は有界生成であることも知られている。群の有界生成性は数論に起源を持つ性質である。

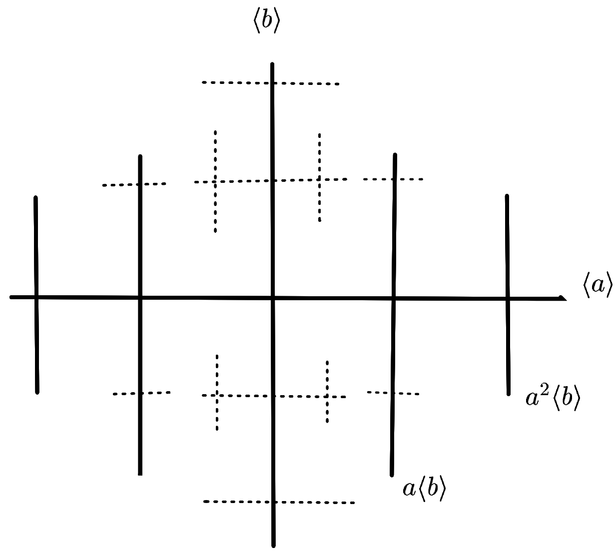
さて、有界生成性を一般化するために、群の部分群の積集合をきちんと定義しよう。群 G の部分群 $H_1, \cdots, H_n$ が与えられたとき、その**積**, $H_1 \cdots H_n$, は次で定義される G の部分集合である。

$$H_1 \cdots H_n = \{h_1 \cdots h_n | h_i \in H_i\}.$$

この定義を使えば、群 G が有界生成であることは、ある巡回部分群 $C_i < G$ が有限個あって、$G = C_1 \cdots C_n$ となることに他ならない。

[19]「Kirby の問題集」に Ivanov の問題としてある

[20]定理 4.5 のような格子部分群の正規部分群は、有限群であるか有限指数をもつ



積集合 (太線で図示) $\langle a\rangle\langle b\rangle \subset F(a,b)$

Farb-Lubotzky-Minsky [FaLuMi] によって、曲面の写像類群がランク 2 の自由群を含めば、有界生成でないことが知られていた[21]。擬準同型を使うと、結果を部分群にまで拡張できる.

定理 4.7 ([Kot], [F]). S を向きの付いたコンパクトな曲面とし、$G < \mathrm{Mod}(S)$ を写像類群の部分群とする。G がアーベル群を有限指数の部分群として含まなければ、G は有界生成でない。

我々[F] の証明の筋は次のようである. 筋は同じなので、$G = \mathrm{Mod}(S)$ の場合に説明する。$\mathrm{Mod}(S)$ が有限指数のアーベル部分群を含まないとき（命題 3.1 より、これは $\mathrm{Mod}(S)$ が F_2 を含むことと同値。ほとんどの S の場合、成立）、$QH(\mathrm{Mod}(S))$ が無限次元であることは既に述べた (定理 4.3). $\mathrm{Mod}(S)$ の有限個の任意の巡回部分群 $C_i (1 \le i \le n)$ に対して、$\mathrm{Mod}(S)$ 上の擬準同型 h ですべての C_i 上で有界なものの集合は $QH(\mathrm{Mod}(S))$ の部分空間になるが、それを $QH(\mathrm{Mod}(S); C_1, \cdots, C_n)$ と書くことにする。このとき、$QH(\mathrm{Mod}(S); C_1, \cdots, C_n)$ も非自明で、さらに無限次元になることが示せる。それに含まれる自明でない擬準同型を $h \neq 0$ としよう。h が各 C_i で有界であることと、擬準同型であることから h は積 $C_1 \cdots C_n$ 上で有界である。一方、h は $\mathrm{Mod}(S)$ 上では有界でないのだから、$\mathrm{Mod}(S) \neq C_1 \cdots C_n$ である[22].

4.4. 写像類群のある部分群と主結果. 写像類群が巡回部分群の積集合としては書けないこと（すなわち有界生成でない）の拡張を考える。すなわち、巡回群とは限らないある種の部分群についても、写像類群はそれらの積集合ではないことを、擬準同型を使って示す。

S, S' をコンパクトで向きの付いた曲面とし、被覆 $p : S \to S'$ が与えられたとする。この被覆に付随する「写像」

$$p^{-1} : C(S') \to C(S)$$

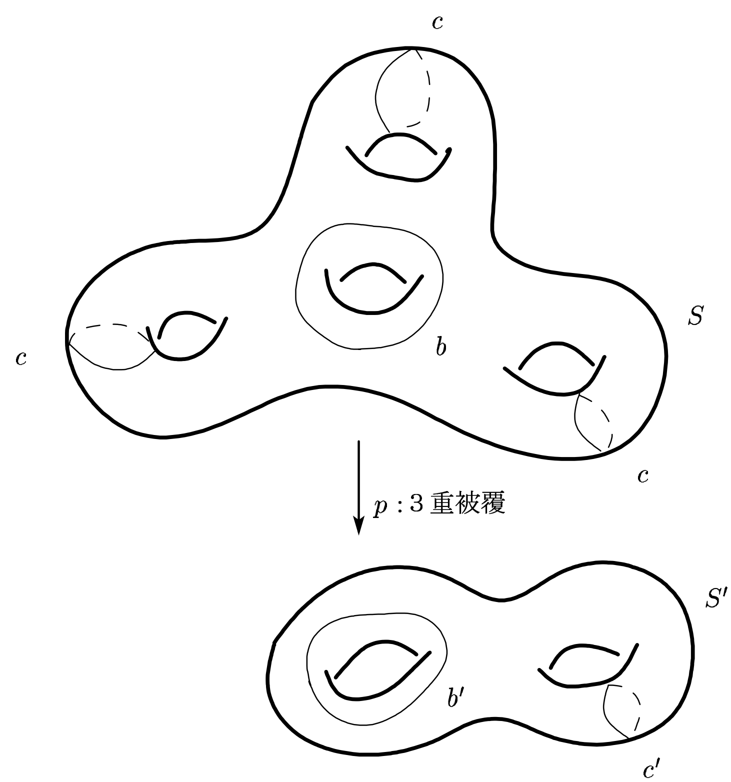
[21] 群の pro-finite completion を使う

[22] [Kot] では次が示されている：$QH(G)$ が無限次元なら G は有界生成ではない。これと定理 4.3 からも直ちに定理 4.7 が従う

を定義する。S' の任意の本質的な単純閉曲線 c' に対して、逆像 $p^{-1}(c')$ を考える。これは連結とは限らないが、各連結成分は S の本質的な単純閉曲線である。したがって、各連結成分は $C(S)$ の頂点を定め、複数ある場合、それらの頂点間の距離は 1 である。このようにして、逆像は $C(S)$ に直径が高々1 の集合を定める。この集合は c' のホモトピー類にしかよらないので、「写像」$p^{-1}: C(S') \to C(S)$ が定義された[23]。この写像の像として与えられる $C(S)$ の部分集合 $p^{-1}(C(S'))$ についての命題を述べるために定義を一つ与える。測地空間 X の中の部分集合 Y が (C-) **擬凸**であるとは、ある定数 C が存在して、Y の任意の二点 x, y について、二点を結ぶ X のある[24]測地線 $\gamma_{x,y}$ が存在して、それが Y の C-近傍に含まれることである。

命題 4.1. 部分集合 $p^{-1}(C(S'))$ は $C(S)$ で擬凸である。

部分集合 $p^{-1}(C(S'))$ を被覆 p に付随する部分集合と呼ぶ。



次に、被覆 p に付随する $\mathrm{Mod}(S)$ の部分群を定義する。S' の向きを保つ自己同相写像 $h' \in \mathrm{Homeo}_+(S')$ に対して、ある元 $h \in \mathrm{Homeo}_+(S)$ が存在して、$h \circ p = p \circ h'$ を満たすとき、h' は**引き上げ可能**である (liftable) といい、h をその引き上げと呼び、$p^{-1}(h')$

[23]一点の像が一点とは限らないので厳密には写像ではない。しかし、像の直径は高々1 なのでわれわれの観点からは写像のようなものである

[24]すべての測地線、とする流儀もある。X が δ-双曲的な場合は同値な定義になる。なぜなら端点を共有する二つの測地線は互いに δ-近傍の中に含まれるからである

と書く[25]。引き上げ可能性は h' のホモトピー類 $[h']$ にしかよらない。$\mathrm{Homeo}_+(S')$ の引き上げ可能な元の全ての引き上げのホモトピー類全体が定める $\mathrm{Mod}(S)$ の部分集合を考え、それを $p^{-1}(\mathrm{Mod}(S'))$ と書くことにする。すなわち、

$$p^{-1}(\mathrm{Mod}(S')) = \{[p^{-1}(h')] \in \mathrm{Mod}(S) | h' \in \mathrm{Homeo}_+(S') \,\mathrm{is\,liftable}\}.$$

$p^{-1}(\mathrm{Mod}(S'))$ は $\mathrm{Mod}(S)$ の部分群であることが容易に分かる。これを、**被覆 p に付随した部分群**と呼ぶ。また、引き上げ可能な元のホモトピー類全体は $\mathrm{Mod}(S')$ の部分群になるが、これは有限指数の部分群[26]であるので、$p^{-1}(\mathrm{Mod}(S'))$ という書き方もある程度正当化されるだろう。

$\mathrm{Mod}(S)$ は $C(S)$ に等長的に作用しているが、上の二つの定義から、部分集合 $p^{-1}(C(S'))$ は、部分群 $p^{-1}(\mathrm{Mod}(S'))$ で不変なことが従う。さて、このような部分群、すなわち、有限被覆に付随した部分群たちに関する結果が主結果である[27]。

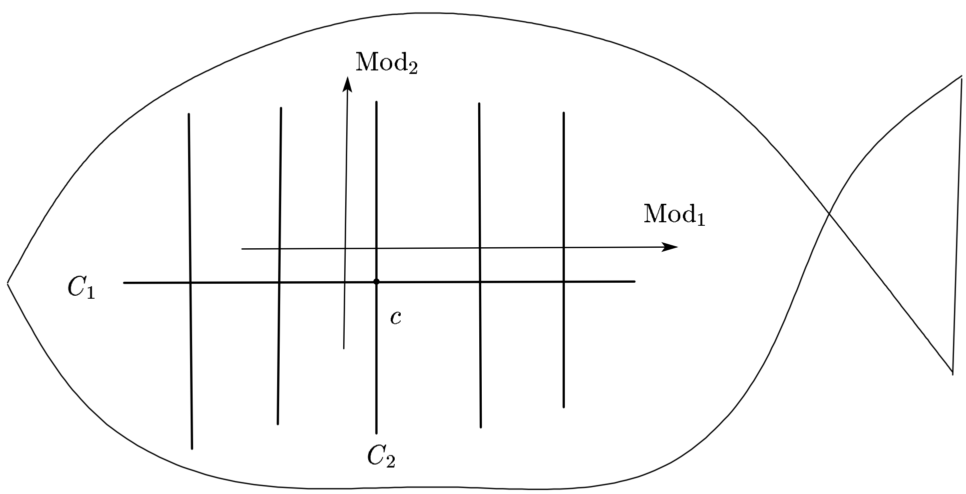
定理 4.8 ([BeF2])**.** $p_i : S \to S_i (1 \leq i \leq n)$ を非自明な被覆とする。ただし、S, S_i は向きの付いたコンパクトな曲面とする。このとき、

$$\mathrm{Mod}(S) \neq p_1^{-1}(\mathrm{Mod}(S_1)) \cdots p_n^{-1}(\mathrm{Mod}(S_n)).$$

ただし、$p_i^{-1}(\mathrm{Mod}(S_i))$ は、被覆 p_i に付随した $\mathrm{Mod}(S)$ の部分群である。

証明の筋は $\mathrm{Mod}(S)$ が有界生成でないことを擬準同型を使って示すのと同様である (定理 4.7)。すなわち、$\mathrm{Mod}(S)$ の有界でない擬準同型 h で、各部分群 $p_i^{-1}(\mathrm{Mod}(S_i))$（簡単のため Mod_i と書く）上では有界であるものが存在することを示す。h は擬準同型なので、積集合 $\mathrm{Mod}_1 \cdots \mathrm{Mod}_n$ 上も有界であり、結論が従う。このような h は、$\mathrm{Mod}(S)$ の $C(S)$ への作用を使って構成するのだが、そのとき、被覆 p_i に付随した部分集合 $p_i^{-1}(C(S_i))$(簡単のため C_i と書く）が Mod_i-不変なことを使い、h がこれらの部分群上で有界であるような制限を実現することが出来る。

幾何学的なアイディアは、$F(a,b)$ が a, b で有界生成されないことを説明するための「魚の骨」のような図と同じ状況が、δ-双曲グラフ $C(S)$ の中に見て取れることである。それを説明する。



[25] h' に対して、その引き上げ h は複数個ある場合もあるが、$p^{-1}(h')$ と表記した。引き上げは、基点の引き上げを決めれば高々一つなので、h は高々、被覆 p の指数 $\mathrm{Ind}(p)$ 個しかない

[26] $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ の合同部分群になぞらえて、被覆 p に付随する $\mathrm{Mod}(S')$ の合同部分群と呼ばれることがある

[27] 曲面 S, S_i が向き付け不能の場合、さらには被覆 p が分岐被覆の場合を含めて結論は正しいと思われるが、まだ議論を書き下してない

前に述べたように $\mathrm{Mod}(S)$ の $C(S)$ への作用の商空間 $C(S)/\mathrm{Mod}(S)$ は有限個の頂点しか含まず、従って直径は有限である。それを D とする。$C(S)$ の頂点 c を一つ固定する。作用のオービット $\mathrm{Mod}(S)(c) \subset C(S)$ の D-近傍は $C(S)$ に一致する。したがって、定理を示すには部分集合 $\mathrm{Mod}_1 \cdots \mathrm{Mod}_n(c) \subset C(S)$ の D-近傍が $C(S)$ に一致しないことを言えば十分である。

以下、簡単のために、固定した頂点 $c \in C(S)$ がすべての n について、$c \in C_n$ を満たすとする。また、$n = 2$ として説明を続ける。$\mathrm{Mod}_1\mathrm{Mod}_2(c) \subset \mathrm{Mod}_1(C_2)$ であるが、右辺は、$C(S)$ の中でちょうど魚の骨のような形になっている。すなわち、C_2 の群 Mod_1 に含まれる元一つ一つによる像が縦の骨一本一本で、背骨（横むき）は $\mathrm{Mod}_1(c) \subset C_1$ である。ここで、C_1, C_2 が $C(S)$ で擬凸であること（命題 4.1) は重要である。この「魚の骨」の K-近傍（任意の K) は全体 $C(S)$ に一致しないことが $C(S)$ の双曲性などから結論できる。

証明の幾何学的なアイディアはこの通りなのだが、これらの論点を書き下すには多くの定数を証明を通して使用しなくてはならず煩雑になる。そこで、もう一つの（技術的な）ポイントは、このような空間についての主張を、群での主張に引き戻すとき、擬準同型の存在、非存在という定式化をする点である。

また、この議論を踏まえると、次のような概念を考えることは有用であるのかもしれない。群 G の部分集合 C に対して、G 上のある非有界な擬準同型 h があって h が C 上で有界なとき、C は G の**まばらな**部分集合（例えば、魚の骨と呼んでいた部分）であると呼ぶ。例えば、$\mathrm{Mod}(S)$ が他にどのようなまばらな部分集合を含むかは興味深い。

References

[BelF] G.Bell, K.Fujiwara. The asymptotic dimension of a curve graph is finite. preprint. 2005. Arxiv math.GT/0509216.

[BeF] M.Bestvina, K.Fujiwara, Bounded cohomology of subgroups of mapping class groups. Geom. Topol. 6 (2002), 69–89.

[BeF2] M.Bestvina, K.Fujiwara, Quasi-homomorphisms on mapping class groups, in preparation.

[Bo] Brian H. Bowditch. Intersection numbers and the hyperbolicity of the curve complex. to appear in J. reine angew. Math.

[Bo2] Brian H. Bowditch. Tight geodesics in the curve complex. preprint, October 2003.

[BrHae] M.R.Bridson, A.Haefliger. "Metric spaces of non-positive curvature". Springer, 1999.

[Bro] Robert Brooks. Some remarks on bounded cohomology. In *Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference*, 53–63, 1981. Princeton Univ. Press.

[BuMo] M. Burger and N. Monod. Bounded cohomology of lattices in higher rank Lie groups. *J. Eur. Math. Soc.*, 1(2):199–235, 1999.

[EpF] David B. A. Epstein and Koji Fujiwara. The second bounded cohomology of word-hyperbolic groups. *Topology*, 36(6):1275–1289, 1997.

[FaMa] Benson Farb and Howard Masur. Superrigidity and mapping class groups. *Topology*, 37(6):1169–1176, 1998.

[FaLuMi] Benson Farb; Alexander Lubotzky; Yair Minsky. Rank-1 phenomena for mapping class groups. Duke Math. J. 106 (2001), no. 3, 581–597.

[藤原] 藤原耕二. 離散群と双曲幾何, 「微分幾何学の最先端 — Surveys in Geometry, special edition」、中島啓編集. 培風館, 2005.

[F] K.Fujiwara. On non bounded generation of discrete subgroups in rank-1 Lie group. preprint, Feb 2004. to apper in Contemporary Math, AMS as the proceedings of the Brooks memorial meeting.

[深谷] 深谷賢治. 「双曲幾何」. 岩波講座現代数学への入門. 岩波書店. 1996.

[G;bound] M.Gromov, Volume and bounded cohomology. IHES Publ.56(1982). 5-99.

[G;hyp] M.Gromov, Hyperbolic groups, in "Essays in group theory", 75-263. MSRI Publ. Springer, 1987.

[G;asymp] M.Gromov. Asymptotic invariants of infinite groups. in "Geometric group theory, Vol. 2 ", 1–295, LMS Lecture Note Ser. 182. 1993.

[Ha] W. J. Harvey. Boundary structure of the modular group. In *Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference*, 245–251, 1981. Princeton Univ. Press.

[Iv] N. Ivanov. Mapping class groups. *Handbook of geometric topology*, 523–633, North-Holland, 2002.

[KaMa] Vadim A. Kaimanovich and Howard Masur. The Poisson boundary of the mapping class group. *Invent. Math.*, 125(2):221–264, 1996.

[Kot] D.Kotschick. Quasi-homomorphisms and stable lengths in mapping class groups. Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2004), no. 11, 3167–3175.

[Mo] S.Morita, Structure of the mapping class groups of surfaces: a survey and a prospect. *Proceedings of the Kirbyfest (Berkeley, CA, 1998)*, 349–406, Geom. Topol. Monogr., 2, 1999.

[MM] Howard A. Masur and Yair N. Minsky. Geometry of the complex of curves. I. Hyperbolicity. *Invent. Math.*, 138(1):103–149, 1999.

[Mitsu] Y.Mitsumatsu. Bounded cohomology and l^1-homology of surfaces. Topology 23 (1984), no. 4, 465–471.

[MaMo] S.Matsumoto; S.Morita. Bounded cohomology of certain groups of homeomorphisms. Proc. Amer. Math. Soc. 94 (1985), no. 3, 539–544.

[大鹿] 大鹿健一,「離散群」, 岩波講座現代数学の展開, 岩波書店. 1998.

[So] T.Soma. Bounded cohomology of closed surfaces. Topology 36 (1997), no. 6, 1221–1246.

[Yo] T.Yoshida, On 3-dimensional bounded cohomology of surfaces. *Homotopy theory and related topics (Kyoto, 1984)*, 173–176, Adv. Stud. Pure Math., 9, North-Holland, 1987.

東北大学　数学

E-mail address: `fujiwara@math.tohoku.ac.jp`