離散群と双曲幾何

– 幾何学的群論のガイドツアー –

藤原 耕二 (東北大学 数学)

fujiwara@math.tohoku.ac.jp

1 パノラマ

Gromov の二つの大論文 [G;hyp], [G;asymp] に刺激されて生まれた一連の仕事を指し示して**幾何学的群論 (geometric group theory)** という言葉が使われ始めたのは、最近 10 年くらいのことである。この文章で扱う離散群として考えているものは、おもに可算個の元からなる群で、例えば多様体や複体の基本群などは良い例である。幾何学的群論とは一言で言うなら離散群の性質を幾何学的、トポロジー的な方法で研究する分野と言える。その中には、群そのものを、Cayley グラフを通して幾何学的対象とする場合も多い。もちろん、Gromov 以前にもそのような結果はあった。この章では、それらの頂上を幾つか見てみよう。文章全体を通して、それらの背景まで伝えたいが、強調したい実用的な指針は次のようなものである。

1. 双曲幾何と離散群
2. 2 次元、3 次元多様体と離散群
3. 部分多様体と離散群の分解

この文章は、2003 年 10 月 29 日〜11 月 1 日、東京大学数理科学研究科における Surveys in Geometry, special edition(落合卓四郎先生還暦記念) での著者の講演「離散群と双曲幾何」の予稿に加筆したものである。集会において、「双曲幾何」のテーマの下では、著者の講演以外に相馬輝彦氏による講演「3 次元多様体と双曲幾何」があった (cf. [相馬]).

原稿について有益な助言を頂いた中島啓氏に感謝します。

大学院で研究指導をして下さった落合卓四郎先生に感謝しています。その時、本 [BGS] の勉強を熱心に薦めてくれ事を、ありがたく思います。

目 次

1.1 Dehn の仕事

1910 年頃 M.Dehn は有限生成群に関する三つの基本的な「決定問題」を与え、閉曲面の基本群について肯定的に解いた。一般の群では否定的に解かれている（つまり決定できない）(P.S.Novikov,1954)。決定問題の意味することを正確に述べるには準備が必要なのでここではしない。およその意味として、肯定的に解けるとは抽象的に決定できることが示せるというだけでなく、具体的な手続きが与えられるということである。

1. **語の問題** (word problem):生成元の積で与えられた任意の元 $g \in G$ が単位元かを有限回の操作で決定する方法を与えよ。
2. **共役問題** (conjugacy problem):G の任意の二元 g, h が G の中で共役であるかを有限回の操作で決定する方法を与えよ。
3. **同型問題** (isomorphism problem): 与えられた二つの群が同型かを有限回の操作で決定せよ。

Dehn はこの 3 つの問題で、その後 100 年の（組み合わせ）群論の研究の指針を与えたというだけでなく、その解決の過程で幾つかの重要な概念も導入している。それを現代的な立場から述べよう.

まず、距離空間 (X, d_X) と (Y, d_Y) に対して、写像 $f : X \to Y$ と定数 $K \geq 1, \epsilon \geq 0$ が存在して次の (1),(2) を満たす時、(X, d_X) と (Y, d_Y) は**擬等長** (quasi-isometric) という。擬等長性は距離空間に同値関係を定める。

(1) 任意の $x, y \in X$ に対して、

$$\frac{d_X(x,y)}{K} - \epsilon \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq K d_X(x,y) + \epsilon.$$

(2) 任意の $y \in Y$ に対して $x \in X$ が存在し $d_Y(y, f(x)) \leq \epsilon$.

擬等長という概念は、幾何学的群論を通して現れる必要かつ重要な概念である。まず、群を幾何学的に考えるため語距離を定義する。(G, S) を有限生成群 G と、ある有限生成元集合 S の組とし $S = S^{-1}$ とする。語 (word) とは S の元の有限列 w のことで、その長さを $l(w)$ と書く。語 w が自然に表す G の元を $\bar{w}$ と書く。G 上の関数 l_S を次で定義しよう: 単位元 e_G については $l_S(e_G) = 0$ とし、e_G でない元 g に対しては次で定義する。

$$l_S(g) = \min_{\{w | \bar{w} = g\}} l(w).$$

G 上に**語距離** (word metric) を

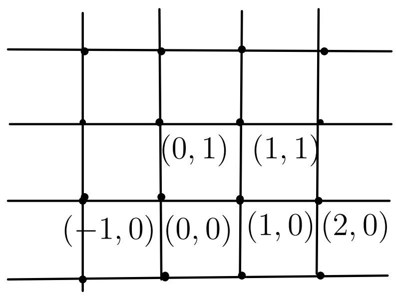
$$d_S(g, h) = l_S(g^{-1}h)$$

と定義する。

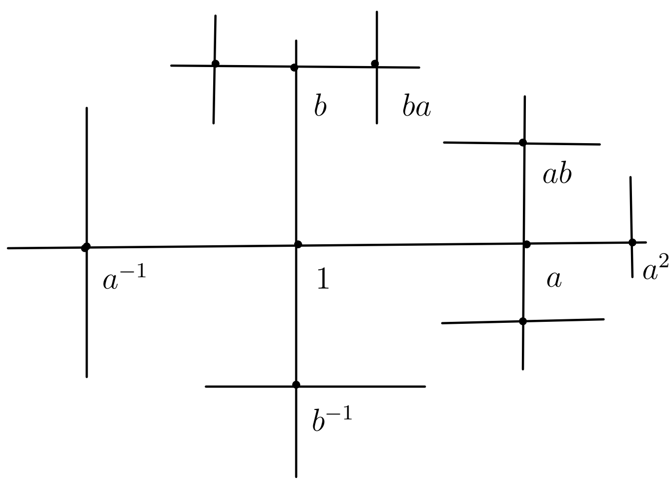
有限生成群の **Cayley グラフ** (Cayley, 1878. 有限群の場合), $\Gamma = \Gamma(G, S)$, を次のように定義する。Γ の頂点は G の元全体。頂点 v と生成元 s に対し、v を始点、$vs \in G$ を終点とする有向辺 (v, s, vs) を対応させる。これは逆向きの有向辺 (vs, s^{-1}, v) と共に、v と vs を結ぶ 1 つの辺を定めると

する。Γ は正規グラフになる。正規グラフとは各頂点での次数が一定のグラフである。

例えば標準的な生成元を考えれば、$\mathbb{Z}^n$ の Cayley グラフは $\mathbb{Z}^n$ 格子、階数 n の自由群の Cayley グラフは、次数が $2n$ の正規ツリーである。



$\mathbb{Z}^2$ の Cayley グラフ



自由群 F_2 の Cayley グラフ

各辺の長さを 1 として定義される Γ 上の測地距離は、頂点（すなわち G) 上で語距離 d_S に等しい。任意の生成元集合 S, S' について $\Gamma(G,S)$ と $\Gamma(G,S')$ は擬等長である。さらに擬等長性は有限生成群全体に同値関係を定めることが分かる。一般に与えられた群に対して、自然な生成元の取り方が定まるものではないから、Cayley グラフを考えるとき、擬等長性の下で考えるのが自然である。従って幾何学的群論では、離散群に関する擬等長性で不変な性質を調べるのが主題になる。

G の Γ への等長 (左) 作用を次で与える:

$$(g,v) \mapsto gv, (g,(v,s,vs)) \mapsto (gv,s,gvs).$$

Dehn は、種数が 2 以上の閉曲面の基本群と双曲平面 $\mathbf{H}^2$ が擬等長であることに気がついて、双曲幾何を曲面群に関する決定問題の解決に本質的に使っている。これを一般の状況に拡張した定理 2.2 を 2 章の双曲群の部分で述べる。

1.2 Stallings のエンド定理

X を局所コンパクトで連結な距離空間とする。任意のコンパクト部分集合 $K \subset X$ に対して、$e(X, K)$ を $X \backslash K$ の非有界な連結成分の個数とする。

$$e(X) = \sup_K e(X, K)$$

と定義し、X の**エンドの個数**と呼ぶ。

例えば、$e(\mathbf{R}) = 2, e(\mathbf{R}^n) = 1 (n \geq 2)$. T が各頂点の次数が 3 以上のツリーなら $e(T) = \infty$.

プロパーな測地空間のエンドの数は擬等長不変である。従って Cayley グラフ $\Gamma(G, S)$ のエンドの個数は生成元集合 S によらない。それを有限生成群 G のエンドの個数と呼び $e(G)$ と書く。これは群の擬等長不変量である。$e(G)$ は $0, 1, 2, \infty$ のいずれかであることが知られていて、$e(G) = 0$ の必要十分条件は G が有限群であることである。一般的な場合は $e(G) = 1$ であると考えられ特に分類はない。例は $e(\mathbb{Z}^n) = 1 (n \geq 2), e(\mathbb{Z}) = 2$.

J.R.Stallings は $e(G) = \infty$ である G の代数的分類を与えた (位数有限の元を含まないとき場合は [St], 1968). $e(G) = 2$ の場合は Hopf による。

定理 1.1 (Stallings,1971). *1.* $e(G) = 2$ の必要十分条件は G が $\mathbb{Z}$ を有限指数の部分群として含むこと。

2. $e(G) = \infty$ である必要十分条件は次のいずれかが成り立つこと。

(a) $G = A *_C B$ と書け、C は有限群で $|A/C| \geq 3, |B/C| \geq 2$ を満たす。

(b) $G = A *_C$ と書け、C は有限群で $|A/C| \geq 2$ を満たす。

上で $A *_C B$ は群 A と B の共通の部分群 C についての**融合積**で、$A *_C$ は A の部分群 C についての **HNN 拡大**と呼ばれるものである（HNN 拡大の定義は 2.7 章)。融合積については、基本群に関するファンカンペンの定理で、なじみがあるだろう。これらについては、2.7 章, 3 章で少し詳しく述べたい。なお、定理 1.1 で G に位数有限の元が無ければ、2(a),(b) の主張は $G = A * B$ と自由積に分解することである。注意として、$A *_1 = A * \mathbb{Z}$ であ

る。また、2.(a) に関連して、$\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ は指数 2 で $\mathbb{Z}$ を含み、$e(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2) = 2$ である。

1.3 Mostow 剛性

Mostow らの剛性定理によれば、基本群が同型な二つのコンパクトで非可約な局所対称空間は等長である。ここでは双曲幾何との関連を強調して、rank-1 の場合を述べる．より一般に、コンパクトでなくても体積が有限なら同様の結論が成り立つ(この一般化は、rank-1 の場合は Mostow-Prasad, rank-2 以上の場合は Margulis による).

定理 1.2 (Mostow. 1973, [Mo]). M, N をコンパクトな双曲多様体とし、次元はともに 3 以上とする。このとき、基本群 $\pi_1(M)$ と $\pi_1(N)$ が同型なら M と N は等長。実際、同型写像は等長写像で誘導される。

rank-2 以上の場合は、Ballmann-Gromov-Schroeder[BGS] による Mostow 剛性の拡張がある。

定理 1.3 (Ballmann-Gromov-Schroeder.1981). M をコンパクトで非可約な局所対称空間で、rank は 2 以上とする。N をコンパクトな C^∞-リーマン多様体とし、断面曲率が $K \leq 0$ とする。M, N の体積は等しいとし、$\pi_1(M), \pi_1(N)$ が同型なら M, N は等長。

この定理で、N も rank が 2 以上のコンパクトで非可約な局所対称空間のときが、Mostow のオリジナルの剛性定理である。

対して rank-1 では次のような現象がある。

定理 1.4 (Farrell-Jones, 1989). 任意の定数 $\delta > 0$ と各 $n \geq 5$ について次を満たす n 次元のコンパクトなリーマン多様体 M, N が存在する。

1. M, N は位相同型だが微分同型ではない。
2. M の断面曲率 $K_M = -1$, N の断面曲率 K_N について

$$-1 - \delta \leq K_N \leq -1.$$

上で N には断面曲率 $= -1$ のリーマン計量は入らないことに注意。もし入れば、Mostow 剛性より M, N は等長、特に微分同型になり矛盾。

テクニックは全く異なるが、類似の性質をもつコンパクトなリーマン多様体 N の Gromov-Thurston による別の構成もある:

定理 1.5 (Gromov-Thurston, 1987). 任意の整数 $n \geq 4$ と定数 $\delta > 0$ に対して、n 次元のコンパクトな多様体 N が存在して次を満たす。

- N にはあるリーマン計量が存在し、その断面曲率 K について $-1-\delta \leq K \leq -1$.
- N は双曲多様体ではない。すなわち、断面曲率 $= -1$ となるようなリーマン計量は N 上存在しない。

Farrell-Jones の定理 1.4 に関連して、次元が 2 の場合は、曲面の分類より上のような M, N のペアは無いが、次元が 3 の場合も上のような例はないと思われる。なぜなら、Thurston の幾何化（この場合は、双曲化）予想（3.5 章参照）が正しいなら N には双曲計量が入り、Mostow 剛性（定理 1.2）より M と N は等長、従って特に微分同型になるからである。

1.4 Gromov の増大度定理

有限生成群 (G, S) に対して、増大度関数 (growth function) を

$$\gamma_S(n) = \sharp\{g \in G | l_S(g) \leq n\} (n \in \mathbb{N})$$

と定義する．n のある多項式 $p(n)$ が存在して、任意の $n \in \mathbb{N}$ について $\gamma_S(n) \leq p(n)$ の時、G は**多項式増大度** (polynomial growth) を持つという。定数 $C > 0$ が存在して、任意の $n \in \mathbb{N}$ について $\exp(Cn) \leq \gamma_S(n)$ の時、G は**指数増大度** (exponential growth) を持つという。

増大度は G の擬等長類だけによる。多項式増大度をもつとき、上界を与える多項式の最小次数も擬等長類で不変である。コンパクトなリーマン多様体の曲率と基本群の増大度に関する結果の代表例として次がある。

定理 1.6 (J.Milnor, 1968). コンパクトで負の断面曲率を持つリーマン多様体の基本群は指数増大度を持つ。

より強い形の結果に次がある。これはひとつの「剛性定理」といえるかもしれない。

定理 1.7 (Avez, 1970). M をコンパクトなリーマン多様体で断面曲率が ≤ 0 とする。M がフラット（すなわち曲率 $K = 0$）でなければ、基本群は指数増大度を持つ。

関連して、$K=0$ なら、Bieberbach の定理より M の基本群は、有限生成自由アーベル群を有限指数で含む。

有限生成のベキ零群は多項式増大度を持ち、その多項式の最小次数もH.Bass によって代数的に計算されている (1972). その逆を主張する次のGromov の定理 [G;poli] は、いまだに高い頂きである。

定理 1.8 (Gromov, 1981). 有限生成群 G が多項式増大度を持つことと、G に有限指数のベキ零部分群が存在することは同値。

増大度が擬等長不変であることは述べた。この定理 1.8 を通して、有限指数のベキ零部分群の存在は群の擬等長不変な性質であることが分かる。

群が多項式増大度も指数増大度も持たない時、中間増大度 (intermediate growth) を持つという。有限生成群で中間増大度を持つ例が知られているが (R.I.Grigorchuk,1983)、有限表示群では例が知られていない。

1.5 Gromov のプログラム

Gromov の二つの論文の一つ、双曲群については 2 章で述べるが、もう一つの論文 [G;asymp] で、Gromov は次のようなプログラムを提唱したといわれている: 「**有限生成群を擬等長によって分類せよ**」。

この観点から 1 章を振り返ってみる。便利な用語として、群のある性質「何々」について、ある群 G が**ほとんど** (virtually) 何々とは、その性質「何々」を満たす部分群 $H < G$ が有限指数で存在することを言う。Stallings のエンド定理（定理 1.1）は、エンドの数という擬等長不変量を群の分解という代数的性質に言い換えているという意味で、Gromov のプログラムの雛形的な定理とみなせる。次に Gromov の増大度定理（定理 1.8）も、G が多項式増大度を持つという擬等長不変な性質と、G が、ほとんどベキ零群である（すなわち、有限指数でベキ零部分群を含む）という代数的な性質の同値性を示している。例えば次のようなことも容易に分かる。

系 1.1. G を有限生成群とし、ユークリッド平面 $\mathbf{E}^2$ と擬等長とする。このとき有限群 F が存在し次の完全系列を満たす。

$$1 \to F \to G \to \mathbb{Z}^2 \to 0.$$

G に位数有限の元がなければ、$G \simeq \mathbb{Z}^2$ である。

議論は、$\mathbf{E}^2$ の距離円の面積は、その半径に関して 2 次の多項式増大度を持ち、それと擬等長な G は、同じく 2 次の増大度を持つ。よって定理 1.8 よりベキ零群 N を有限指数で含み、N も 2 次の増大度を持つ。定理 1.8 の直前で述べた Bass の結果より N は「ほとんど」$\mathbb{Z}$ か $\mathbb{Z}^2$ である。エンドの個数の擬等長不変性を使えば $\mathbb{Z}$ はありえない。よって N、従って G はほとんど $\mathbb{Z}^2$ である。これを正確に言えば結論になる。

これらの例からも分かるように、「代数的性質 $\Rightarrow$ 擬等長的性質」は易しく、逆の向きが難しいことが多い。もう一つの例として次の定理を紹介する。これを、ユークリッド平面の場合の系 1.1 と比較してみると興味深い。ユークリッド平面と擬等長な群は本質的には $\mathbb{Z}^2$ だけであるのに対して、$\mathbf{H}^3$ の場合は全ての一様格子群が 1 つの擬等長類をなしている。

定理 1.9 (Sullivan,1978 -Gromov). 有限生成群 H と 3 次元双曲空間 $\mathbf{H}^3$ が擬等長だとする。このときある準同型 $g : H \to \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^3)$ が存在し $\mathrm{Ker}(g)$ は有限群で、$\mathrm{Im}(g)$ は $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^3)$ の一様格子群になる。

ただし、$\mathrm{Im}(g)$ が一様格子群とは、離散部分群で $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^3)/\mathrm{Im}(g)$ がコンパクトになることである。議論の概略は次のようである。群 H の自身（正確にはある生成元についての Cayley グラフ）への作用（cf. 1.1 章）を考えると語距離について等長変換になる。つまり $H < \mathrm{Isom}(H)$ である。この作用は co-bounded（つまり作用で割った空間が有界) かつ proper（不連続のこと。定義は 2.2 章で述べる）である。

ここで、H と $\mathbf{H}^3$ が擬等長であるという仮定を使うと、H の $\mathbf{H}^3$ への一様な擬等長変換による「擬作用」が得られる。擬作用に適当な同値関係を考える事により（$\sup_{x\in\mathbf{H}^3} d(f(x), g(x)) < \infty$ である変換 f, g を同値とする)、擬作用から作用が得られる。（一様な）擬等長変換のつくる群を $\mathrm{QIsom}(\mathbf{H}^3)$ と書くことにする。つまり準同型 $f : H \to \mathrm{QIsom}(\mathbf{H}^3)$ をえた。これが定める H の $\mathbf{H}^3$ への作用も co-bounded, proper である。

$\mathbf{H}^3$ の理想境界 (cf. 2.1 章) は $\mathbf{S}^2$ だが、それらの変換群の関係について、古典的な結果として次が知られている。ただし $\mathrm{Conf}(\mathbf{S}^2), \mathrm{QConf}(\mathbf{S}^2)$ は $\mathbf{S}^2$ の conformal 変換群、quasi-conformal 変換群である。

$$\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^3) \simeq \mathrm{Conf}(\mathbf{S}^2),\ \mathrm{QIsom}(\mathbf{H}^3) \simeq \mathrm{QConf}(\mathbf{S}^2).$$

さて、Sullivan によれば可算群の $\mathbf{S}^2$ への作用が、一様な quasi-conformal 変換によるなら、この作用は $\mathbf{S}^2$ への conformal な作用と、ある一つの quasi-conformal 変換で共役になる。

このSullivanの結果を、上の同型を使ってIsom, QIsomの話に翻訳し、fに適用する。結論は、ある$a \in \mathrm{QIsom}(\mathbf{H}^3)$と準同型$g : H \to \mathrm{Isom}(\mathbf{H}^3)$が存在して次を満たす。

$$f = aga^{-1}.$$

ただしこれはQIsom($\mathbf{H}^3$)での等号である。このときgとfはquasi-isometry aで共役なので、gから得られるHの$\mathbf{H}^3$への作用はproper, co-boundedであり、このgが求めるものである。

2　双曲群

曲面群における決定問題に関するDehnの仕事は、後にvan Kampen(1933)、R.Lyndon(1966)によってファンカンペン図形(diagram)（cf. 2.6章）を使った議論として整備され、**少重複関係式群**(small cancellation group)の理論として一般化された。少重複関係式群は、幾何学的群論の扱い易い、良いモデルだが、適当な和文の文献が見当たらない。洋書ではCh.V,[LSc]がある。

1980年代初頭、Gromov[G;hyp]が測地空間と有限生成群に「双曲性」を定義し多くの重要な性質を示したことが、幾何学的群論の始まりである。双曲空間、双曲群の和書文献としては[大鹿]がある。

双曲性の組み合わせ的側面は少重複関係式群、幾何学的側面は双曲多様体、またはより一般的な対象として単連結な完備リーマン多様体でその断面曲率Kがある負の定数cについて$K \le c$を満たすものに起源を持つといえる。

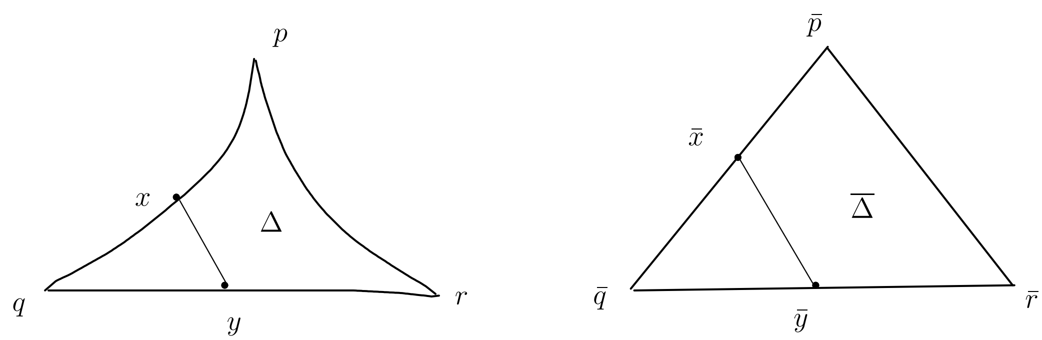
単連結な完備リーマン多様体で$K \le 0$を満たすものを**アダマール多様体**(Hadamard manifold)と呼ぶ。それを一般化して、断面曲率の非正性を測地空間に拡張した概念としてCAT(0)空間があるが、これも[G;hyp]で導入され、引き続き活発な研究がある。詳しい取り扱いは[BrHae]を見よ。Hadamard多様体、CAT(0)空間のモデルとなる良い具体例として対称空間があり、過去にリーマン幾何学、表現論、調和解析などの立場から研究の蓄積があるが、最近の優れた概説の1つはII.10 [BrHae]である。ここではCAT(0)空間の定義だけ述べる。

測地空間Xで、p, q, rを頂点とする測地三角形（三辺が全て測地線である）, $\Delta(p, q, r)$, に対して、ユークリッド平面$\mathbf{E}^2$内の測地三角形で、その三辺の長さがΔと同じものを$\bar{\Delta}(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$とし、「比較三角形」と呼ぶ。$\Delta$の辺上の点$x$に対応する$\bar{\Delta}$の点を$\bar{x}$と書く。ここで対応する点とは、$x$を

含む辺が頂点 p, q を結ぶ測地線 $[p, q]$ であるとき、$\bar{p}, \bar{q}$ を結ぶ測地線 $[\bar{p}, \bar{q}]$（これは $\bar{\Delta}$ の辺である）上の点で、$d(p, x) = d(\bar{p}, \bar{x})$ を満たす点 $\bar{x}$ のことである。

次が成り立つとき、X は**CAT(0) 空間**と言う。CAT は Cartan, Alexandrov, Toponogov の頭文字である: X の任意の測地三角形 Δ の周上の任意の 2 点 x, y と、$\mathbf{E}^2$ 内の比較三角形上の対応する 2 点 $\bar{x}, \bar{y}$ について

$$d(x, y) \leq d(\bar{x}, \bar{y}).$$



CAT(0) 空間

これから双曲群について幾つか述べる前に、一つの観点として、双曲群についてのテクニックには次の 3 つがあることを指摘したい。

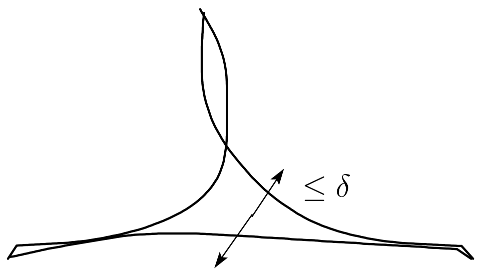
1. 測地三角形などを書いて議論する
2. 理想境界を使って議論する。
3. Gromov-Hausdorff 収束を使う。

Gromov の論文 [G;hyp] では 3 は使われていない。1，2 のテクニックで理論の基本的なことの多くが示された。双曲空間、双曲群に Gromov-Hausdorff 収束を使い出したのは、Paulin, Bestvina, Sela らである。これらは Thurston の仕事への Morgan-Shalen によるアプローチに一つの起源を持つ (cf. 3 章)。群論に Gromov-Hausdorff 収束を使うことで、離散群論は一段と向上した。それを中心的に推進したのは、Rips-Sela, Bestvina-Feighn らである。

2.1 δ-双曲空間

(X, d) を完備測地空間とする。測地空間とは、任意の二点の距離が、それを結ぶ測地線の長さで実現される距離空間である。ある定数 $\delta \geq 0$ と

X の三角形 $\triangle$ について、任意の一辺が他の二辺の和集合の δ-近傍に含まれる時、$\triangle$ は δ-**細い** (thin) と言う。ある定数 $\delta \geq 0$ が存在して、X の任意の測地三角形が δ-細いとき、X は δ-**双曲的** (hyperbolic)、または単に (Gromov-) 双曲的 ((Gromov-)hyperbolic) という。



δ-細い三角形

例えば、ツリーは (0-) 双曲的。単連結な完備リーマン多様体に、ある定数 $c > 0$ が存在して断面曲率が $-c$ 以下なら双曲的。特に、n 次元双曲空間 $\mathbf{H}^n$ は双曲的。次元が 2 以上の Euclid 空間は双曲的でない。

我々にとって、次の重要な事実は最初に確かめたいことである。

定理 2.1. 双曲性は測地空間の擬等長類で不変である。

2 つの測地空間が擬等長の関係にあるとき、その間の擬等長写像を一つ固定すれば、測地三角形が一様に細いという性質は、いかにも不変な性質と見える。しかし、測地線は擬等長写像で保たれないから、少し注意が必要である。そこで次の概念の導入が必要になる。連結な $I \subset \mathbf{R}$ から X への連続写像 $f : I \to X$ を道とよぶ。$K \geq 1$、$\epsilon \geq 0$ を定数とする。弧長パラメータを持つ道 α が (K, ϵ)-**擬測地線** (quasi-geodesic) とは、任意の t、s について次が成立することをいう:

$$|t - s| \leq Kd(\alpha(t), \alpha(s)) + \epsilon.$$

双曲空間の擬測地線について、次に述べる「安定性」が成立することは重要な事実である。これは Euclid 平面では不成立であることに注意。

命題 2.1. 任意の定数 $\delta, \epsilon \geq 0, K \geq 1$ に対して、ある定数 $C(\delta, K, \epsilon) \geq 0$ が存在して次を満たす*:*
任意の δ-双曲空間 X の任意の (K, ϵ)-擬測地線は、X のある測地線の C-近傍に含まれる。

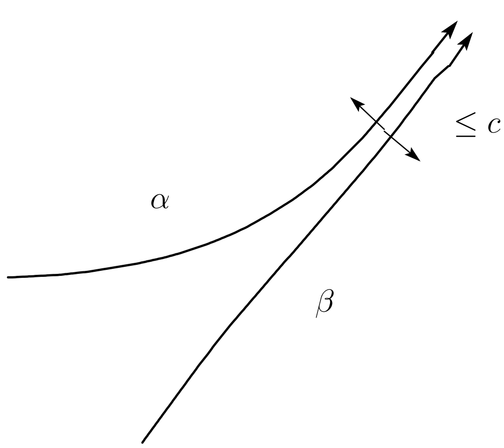
この命題は、リーマン幾何ではよく知られた現象である。証明は（有限の）擬測地線から、その二つの端点を結ぶ測地線への最短点射影を使う。厳密に言うなら、δ-双曲空間では測地線への最短点射影は一点を定めない。一様に有界な集合を与えるだけだが、証明はそれで十分である。この命題を使えば、定理 2.1 の証明は比較的容易である。

命題 2.1 と同じような証明で次の命題 2.2 も示されるが、これは、後で述べる補題 2.1 の簡単な応用でもある。これは一見、テクニカルで無用に見えるが、重要な事実で、例えば双曲群が「オートマチック (automatic) 群」であるという事実 ([Ep]) の、一つの幾何学的背景である。命題 2.2 もユークリッド空間では成立しない。一つ定義をする。定数 l, K, ϵ について、道 γ が、l-**局所** (local) (K, ϵ)-**擬測地線**であるとは、γ の任意の連結部分が、長さ l 以下であれば、(K, ϵ)-擬測地線であること。

命題 2.2. 任意の定数 $\delta \geq 0, K \geq 1, \epsilon \geq 0$ に対して, ある定数 $l(\delta, K, \epsilon) > 0, K'(\delta, K, \epsilon) \geq 1, \epsilon'(\delta, K, \epsilon) \geq 0$ が存在して次を成り立つ:
任意の δ-双曲空間 X の任意の l-局所 (K, ϵ)-擬測地線は、(K', ϵ')-擬測地線である。

以上は、テクニック 1 による。次にテクニック 2 として挙げた境界を考える。Hadamard 多様体と同様に、無限測地線の漸近的 (asymptotic) 同値類集合として、双曲空間 X の**理想境界** $X(\infty)$ が定義される。ここで、二つの (弧長パラメータをもつ) 測地線 $\alpha, \beta : [0, \infty) \to X$ が**漸近的**とは、ある定数 c が存在して、全ての $t \geq 0$ について次が成立すること。

$$d(\alpha(t), \beta(t)) \leq c.$$



漸近的な測地線

測地線 $\alpha(t), t \geq 0$ の同値類の定める理想境界の点を $\alpha(\infty)$ と書く。$\alpha(t)$ が $t \in \mathbf{R}$ で定義されているとき、$0 \geq t$ での同値類の定める点を $\alpha(-\infty)$ と書く。

X がプロパーな空間のとき、理想境界はコンパクト化 $\bar{X} = X \cup X(\infty)$ を与える。X の等長変換は $\bar{X}$ の同相変換に拡張する。もちろん、これらを正当化するには理想境界のトポロジーについて述べる必要があるが、定義は省略する。例として、n 次元の双曲空間, $\mathbf{H}^n$, の理想境界は $n-1$ 次元球面でコンパクト化は n 次元の球である。

プロパーな双曲空間では、上で述べた双曲空間の擬測地線の安定性（命題 2.1）は、無限擬測地線についても同じ定数 C で成立する。また、理想境界を測地線の漸近類で定義したが、全ての擬測地線を考えても良い。

幾何学において大事な概念に凸性がある。それも、擬等長に対応するよう概念を拡大しておこう。(X, d) を測地空間とする。X の部分集合 S に対して、ある定数 $C \geq 0$ が存在して、任意の $x, y \in S$ と x と y を結ぶ全ての測地線 γ に対して

$$\gamma \subset N_C(S)$$

が成り立つとき、S は**擬凸** (quasi-convex) であるという。

上の定義で「全ての測地線が」を、「ある測地線が存在して」としても、双曲空間においては同値な定義である。測地線の安定性があるからである。測地空間の測地線は、本来凸であるべきだろうが、上の定義だと一般には擬凸としか言えない。

2.2 双曲群

有限生成群 (G, S) の Cayley グラフが Gromov-双曲的な時、群 G を**双曲群** (word-hyperbolic group) と呼ぶ。群の双曲性は生成元系に依存しない。なぜなら、同じ群の異なる生成元系に関する Cayley グラフは互いに擬等長で、一方、双曲性は擬等長不変だからである。

定義から直ちに分かる例として、有限群、有限生成自由群（特に $\mathbb{Z}$) は双曲群である。$\mathbb{Z}^2$ は双曲群でないことも定義から直ちに分かる。一般に、$\mathbb{Z}^2$ を部分群として含む群は双曲群でないことは後で説明する (定理 2.7).

群 G の距離空間 X への等長作用が**不連続** (properly discontinuous, or proper) とは任意の点 $x \in X$ について、ある定数 $r > 0$ が存在して、次を

満たす元 g の個数が有限であることをいう:

$$\{g \in G | d(x, gx) < r\}.$$

次に述べる事実は重要である。1 章で定理 1.6 を引用した Milnor の増大度に関する論文 (1968) にも記述がある。既に述べたように曲面群の双曲平面 $\mathbf{H}^2$ への作用の場合について、Dehn はこの現象を認識していた。

定理 2.2. 群 G が測地空間 X に等長的、不連続に作用していて、X/G がコンパクトなら、G は有限生成で X と G（正確にはその Cayley グラフ）は擬等長。例えば、コンパクトなリーマン多様体 M の普遍被覆と $\pi_1(M)$ は擬等長。

定理 2.2 より、コンパクトな負曲率リーマン多様体（特に種数 2 以上の閉曲面）の基本群は双曲群であることが分かる。また、有限生成群 G と、その有限指数の部分群 H は擬等長であることも分かる。理由は、G の Cayley グラフへの H の作用に、定理 2.2 が適用できるからである。従って、G が双曲群であることと H が双曲群であることは同値である。例えば、$SL(2, \mathbb{Z})$ が双曲群であることが分かる。有限生成の自由群を、有限指数の部分群として含むからである。注意として、$SL(2, \mathbb{Z})$ の $\mathbf{H}^2$ への一次分数変換による等長作用 (cf. 2.3 章) は不連続だが、商空間はコンパクトではない。

次の命題は、容易に分かるが重要な事実である。

命題 2.3. 双曲群は有限表示である。

一般に、群のある性質が全ての部分群に共有されるかは標準的な問いである。群の双曲性に関して、肯定的な結果として次は容易に分かる。

命題 2.4. 双曲群 G の擬凸な有限生成部分群は双曲群である。

一方、次が知られている。

定理 2.3 (N.Brady, 1999). ある双曲群の有限表示部分群で双曲群でないものが存在する。

群のある性質が、群の基本的な操作で保たれるかという問いも標準的である。

命題 2.5. 双曲群 A,B の共通の部分群 C についての融合積 $A *_C B$ は、C が有限群なら双曲群である。

これより、$SL(2,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_4 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6$、$PSL(2,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ は双曲群である。部分群 C が無限群のときは難しい。その場合を扱う上で、C が擬凸であることは妥当な仮定であるが、それでは十分ではないのは次の例から分かる。クラインの壷の基本群 $G = \langle a, b | a^2 = b^2 \rangle$ は融合積と考えられる．$A = \langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}, B = \langle b \rangle \simeq \mathbb{Z}, C = \langle c \rangle \simeq \mathbb{Z}$ とし、群のはりあわせは, 関係 $a^2 = c = b^2$ で与えられる。これは、位相的にはメビウスの帯を 2 つ境界で貼り合せてクラインの壷を得ることに対応している。さて、A, B はともに双曲群で, C はどちらでも擬凸な部分群であるが、$G = A *_C B$ は双曲群ではない。実際, $a^2, ab \in G$ で生成される 部分群 $H < G$ は $\mathbb{Z}^2$ に同型（クラインの壷の二重カバーであるトーラスの基本群）であり、指数は 2 である。よって G は双曲群でない。

肯定的な結果を述べるために、一つ概念を導入する。群 G の部分群 C で $\mathbb{Z}$ に同型なものが maximal とは、$C < D < G$ かつ $D \simeq \mathbb{Z}$ なら $C = D$ となることである。上の例で, $C < A, C < B$ はともに maximal ではない。G が双曲群なら、任意の $\mathbb{Z} \simeq C < G$ を含む maximal な $\mathbb{Z} \simeq D < G$ の存在が知られている．これは一般の群では正しくない。例えば, 加群 $\mathbb{Q}$ では不成立である。

次が正しい。位数有限の元をトージョンと呼ぶ。

定理 2.4. G, H を双曲群とし、ともにトージョンを含まないとする。$C \simeq \mathbb{Z}$ を G, H の共通の部分群とし、G, H の両方で maximal とする。このとき、 $G *_C H$ は双曲群である。

この定理は証明なしで [G;hyp] に述べられている。より一般の場合が Bestvina-Feighn [BF] によって証明されている。それを述べるために一つ定義を与える．部分群 $H < G$ が *mal-normal* とは、任意の $g \in G \backslash H$ に対して $gHg^{-1} \cap H = 1$ となること。群 G が双曲群でトージョンを含まないなら、maximal な無限巡回群 C は mal-normal であることが分かる.

定理 2.5 (Combination theorem, Bestvina-Feighn). G, H を双曲群とする。C を G, H の共通の部分群とし、G, H の両方で mal-normal とする。このとき $G *_C H$ は双曲群。

証明は容易でない。論文 [BF] を見よ．HNN-拡大にも同様の結果があり、それから従う結果として、円周上の種数 2 以上の閉曲面束 M のモノドロミー (monodromy) が、pseudo-Anosov 写像であるとき、M の基本群が双曲群であることが分かる。注意として、これ以前に Thurston は、

このコンパクト 3 次元多様体 M に双曲構造が入ることを示しているので (cf. [Kapo])、その事実からも基本群は双曲群であることは分かる。

2.3 理想境界と Tits alternative

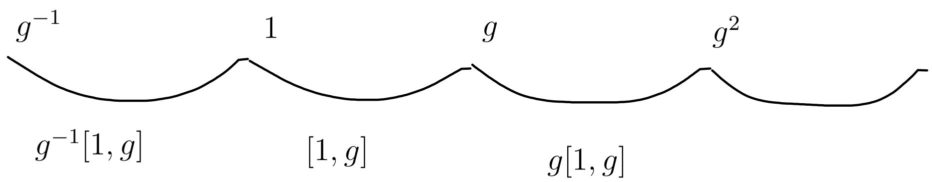
双曲空間と双曲群についてここまで述べたことは、いくつか難しい定理もあるが、測地三角形などを書く事で証明する事実である。次に、双曲群の理想境界が関係する事柄を述べる。

G を双曲群とし, Γ をそのある Cayley グラフとする。G の **(理想) 境界** (ideal boundary), $G(\infty)$, を $G(\infty) = \Gamma(\infty)$ で定義する。G の Cayley グラフは生成元によるが、互いに擬等長である。さらに、それらが双曲的であることから、位相空間 $G(\infty)$ が G だけで決まることが分かる。以下、生成元を一つ固定して、それについての Cayley グラフを考える。$1 \neq g \in G$ とし、Cayley グラフ Γ で二点 $1, g$ を端点とする測地線の一つを $[1, g]$ とする。g は Γ に等長的に作用し、$[1, g]$ を g から g^2 への測地線 $g[1, g]$ に移す。道 $\alpha_g : \mathbb{R} \longrightarrow \Gamma$ を

$$\alpha_g = \bigcup_{-\infty < n < \infty} g^n [1, g]$$

で定義する。

双曲群 G の位数無限な元 $g \in G$ について、道 α_g は Cayley グラフ Γ の中の擬測地線で、擬凸であることは双曲群の理論の中で重要な事実である。これは後で、やや異なる形であるが同値な主張として定理 2.9 で述べ、その証明の概略を述べる。(定理 2.9 の証明は例えば、Prop3.2[Sh] にもある)。



擬測地線 α_g

元 g が無限位数だとしよう。命題 2.1 によれば、擬測地線 α_g は、ある無限測地線 $\gamma = \gamma_g$ から有界の距離にある。この γ の定める二点 $\gamma(\pm\infty) \in G(\infty)$ を $g^{\pm\infty}$ と書く。これらは異なる二点である。$G \cup G(\infty)$ の位相を正確に

述べていないが、自然に定義される位相について、$g^{\pm\infty} = \lim_{n\to\infty} g^{\pm n}$ となる。

有限群、または $\mathbb{Z}$ を有限指数の部分群として含む双曲群を**初等的** (elementary) と呼ぶ。次の定理は重要である。

定理 2.6. G を双曲群とし、H をその任意の部分群とする。このとき H は初等的（な双曲群）であるか、階数 2 の自由群を部分群として含む。

以下しばらく、定理 2.6 の証明の説明をする。定理 2.6 は双曲群に関する **Tits alternative** と考えてよい。そもそも、Tits alternative とは次の事実を言う: 行列群, $GL(n,\mathbb{R})$, の任意の有限生成部分群は、solvable な群を有限指数で含むか、または、階数 2 の自由群, F_2, を含む。

定理 2.6 に関して、より一般に次が正しい; 群 G が測地空間 X に等長的、不連続的に作用し、商空間がコンパクトである状況を考える。X が双曲空間なら、任意の無限部分群 $H < G$ について、H は、ほとんど $\mathbb{Z}$ であるか、もしくは $F_2 < H$ である。

上と同じ状況で測地空間 X が双曲的でない場合について、いくつかコメントする。まず、X が対称空間の場合は、G は対応するリー群の離散部分群になるので、特に行列群であり、従って、オリジナルの意味での Tits alternative が成立する。この場合、X はアダマール多様体、すなわち、単連結な完備リーマン多様体で曲率が 0 以下のものであるが、X が一般のアダマール多様体である場合は、次元が 4 以上の場合は、Tits alternative が成立するかは知られていない。次元が 3 の場合も易しくはないだろう (ただし、Thurston の双曲化予想 (cf. 3.5 章) の肯定的解決を仮定すれば行列群の部分群の場合に帰着)。次元が 2 ならもちろんよい。注意として、X がアダマール多様体の状況では、群 G がほとんど solvable であるなら、G はほとんど abelian であり、X の曲率 $= 0$ であることは自動的に分かる (Preissmann の定理 (1943) の一般化)。

ところで、$F_2 < G$ なら、G は指数増大度を持つ。従って、もし X がアダマール多様体の場合に、G に Tits alternative が成立するなら、前に述べた Avez の定理 1.7 は自明な系である。アダマール多様体の一般化として、X が CAT(0) 空間の場合の Tits alternative は、次元 2 で未解決である。ただし、この場合も、上に述べた Preissmann の定理の一般化は正しい。Avez の定理の CAT(0) 空間での一般化は、未解決と思われる。

定理 2.6 の証明には、G の理想境界を使ったコンパクト化, $\bar{G}$, への G の作用のダイナミクスを使う。ここでは、証明の方針を伝えるだけを目

的とし、そのために双曲平面 $\mathbf{H}^2$ の場合を説明しよう。双曲平面の基本的事項は、例えば [深谷] を見よ。上半平面モデルを考える。

$$\mathbf{H}^2 = \{x + iy | x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}.$$

双曲計量は次で与えられる。

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ が一次分数変換として次のように作用する:

$$x + iy \mapsto \frac{a(x + iy) + b}{c(x + iy) + d}.$$

これは $\mathbf{H}^2$ の向きを保つ等長変換である。$SL(2, \mathbb{R})$ の中心 ± 1 は自明な作用をするので、$PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})/\pm 1$ が $\mathbf{H}^2$ に作用していると考えてよい。これが $\mathbf{H}^2$ の向きを保つ等長変換群, $\mathrm{Isom}_+(\mathbf{H}^2)$, であることが知られている。

δ-双曲空間, X, の等長変換, g, が**双曲的**とは、ある点 $x \in X$ の g-オービット, $g^n(x), n \in \mathbb{N}$ が X のある擬測地線の上にあることと定義する。

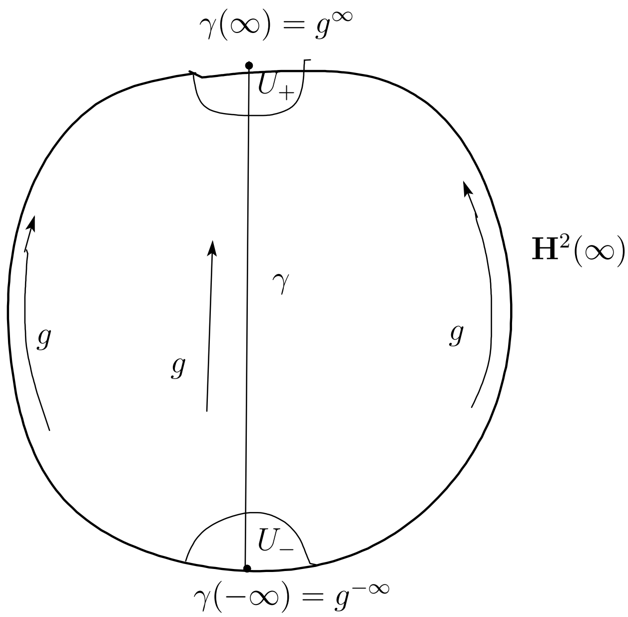
$\mathbf{H}^2$ の等長変換 $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ が双曲的な変換である必要十分条件は、g がある対角行列, $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1/p \end{pmatrix}, 1 < p \in \mathbb{R}$ に、$SL(2, \mathbb{R})$ の元で共役になることである。双曲的な g に対して、不変な測地線 $\gamma(t) \subset \mathbf{H}^2$ がただ 1 つ存在する。加えて、ある定数 $C > 0$ があって、任意の t について $g\gamma(t) = \gamma(t + C)$ となる。この γ を g の「軸」と呼ぶ。$\mathbf{H}^2$ の理想境界 $\mathbf{H}^2(\infty)$ を使ったコンパクト化 $\overline{\mathbf{H}^2}$ は閉円板に位相同型である。

軸 γ が理想境界に定める 2 点 $\gamma(\pm\infty)$ の $\overline{\mathbf{H}^2}$ における任意の近傍 $U_\pm$ を互いに交わらないように取る。このとき、ある $N > 0$ が存在して、任意の $n \geq N$ について、次が成立：

$$g^n(\overline{\mathbf{H}^2} \backslash U_-) \subset U_+,\ g^{-n}(\overline{\mathbf{H}^2} \backslash U_+) \subset U_-.$$

この現象は、一般に δ-双曲空間の双曲的な等長変換について成り立ち、「source-sink のダイナミクス」と呼ばれる。これを使って次を示そう。こ

れは「ピンポンの補題」と呼ばれ、3 次元の双曲幾何学の理論、Klein 群論でよく知られた議論である。



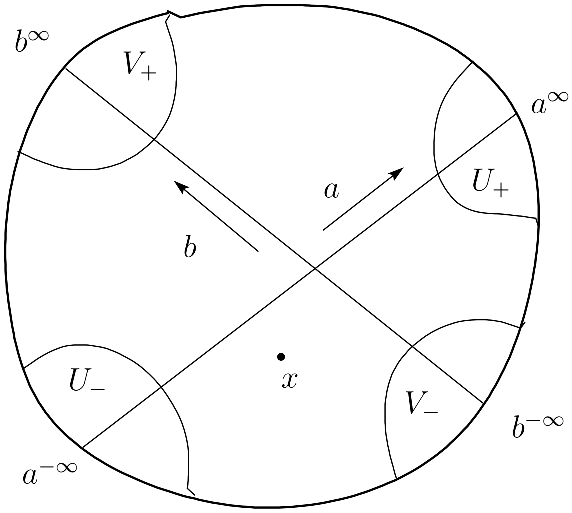
双曲的な g の source-sink ダイナミクス

命題 2.6 (ピンポン). $a, b \in \mathrm{Isom}_+(\mathbf{H}^2)$ とし、ともに双曲的な等長変換とする。それぞれの軸が定める理想境界の 2 点, $a^{\pm\infty}, b^{\pm\infty}$ について、$a^{\pm\infty} \cap b^{\pm\infty} = \emptyset$ と仮定する。このとき、ある $N > 0$ が存在して、任意の $n, m \geq N$ について、a^n, b^m の生成する $\mathrm{Isom}_+(\mathbf{H}^2)$ の部分群は階数 2 の自由群である。

（証明）理想境界の二点 $a^{\pm\infty}$ の $\overline{\mathbf{H}^2}$ における近傍 $U_\pm$ と、二点 $b^{\pm\infty}$ の近傍 $V_\pm$ を、どの 2 つも互いに交わらないように取る。このとき、source-sink のダイナミクスより、ある $N > 0$ が存在して、任意の $n \geq N$ について

$$a^n(\overline{\mathbf{H}^2} \backslash U_-) \subset U_+, \ a^{-n}(\overline{\mathbf{H}^2} \backslash U_+) \subset U_-,$$
$$b^n(\overline{\mathbf{H}^2} \backslash V_-) \subset V_+, \ b^{-n}(\overline{\mathbf{H}^2} \backslash V_+) \subset V_-.$$

となる。



ピンポン

任意に一点 $x \in \mathbf{H}^2 \backslash (U_\pm \cup V_\pm)$ を固定する。$n, m \geq N$ を任意とし、$A = a^n, B = b^m$ とし、A, B が 2 階の自由群を生成することを示す。そのためには、文字 A, B による任意の空でない語 $w = w(A, B)$ が $\mathrm{Isom}(\mathbf{H}^2)$ の中で定める元、それも w と書く、が単位元でないことを示せばよいが、それには、$wx \neq x$ を示せばよい。それには、$wx \in (U_\pm \cup V_\pm)$ を示せばよい。一般の場合は煩雑なので、例えば、$w = ABA^{-1}$ として考えてみよう。

$$
\begin{aligned}
x \notin U_+ &\Rightarrow A^{-1}x \in U_- \Rightarrow A^{-1}x \notin V_- \Rightarrow BA^{-1}x \in V_+ \\
&\Rightarrow BA^{-1}x \notin U_- \Rightarrow ABA^{-1}x \in U_+ \Rightarrow ABA^{-1}x \neq x.
\end{aligned}
$$

一般の w についても良いのは明らかだろう。 □

同じ証明方針で、命題 2.6 で双曲平面を一般の δ-双曲空間に置き換えたものが成り立つことが分かる。注意として、ユークリッド平面では、この命題は成り立たない。実際、双曲的な等長変換は平行移動だが、これが理想境界に定める同相写像は恒等写像であり source-sink のダイナミクスが成立しない。

命題 2.6 の双曲空間での場合への一般化を仮定すれば定理 2.6 は次のように示せる。

(定理 2.6 の証明) まず、H が無限群だとしてよい。このとき、H には双曲的な元, g, が存在することが知られている (cf. 定理 2.10). 元 g が理想境界 $G(\infty)$ に定める 2 点, $g^{\pm\infty}$, の和集合が H-不変なら H は、ほとんど $\mathbb{Z}$ で

あることが分かる（g の定める擬測地線 α_g への H の作用を考えよ）。従って、$g^{\pm\infty}$ は H-不変でないとしてよい。$a \in H$ を $a(g^{\infty} \cup g^{-\infty}) \neq g^{\infty} \cup g^{-\infty}$ となる元とし、$h = aga^{-1}$ を考える。このとき、$g^{\pm\infty} \cap h^{\pm\infty} = \emptyset$ となることが示せて、この g, h に命題 2.6 の双曲空間版を適用すれば、ある $N > 0$ が存在して、任意の $n, m \geq N$ について $\langle g^n, h^m \rangle$ は 2 階の自由群で、H の部分群なのでよい。 $\square$

前に述べたように、Tits alternative をピンポンの補題（命題 2.6）を使って証明するなら、source-sink のダイナミクスの存在がカギである。Tits alternative は CAT(0) 空間に作用する群では知られていないが、解決へのアプローチの 1 つは空間のコンパクト化、または理想境界におけるダイナミクスの考察だろう。

さて、次の事実は証明なしで述べたが、ここで証明しよう。距離 $d(x, y)$ を、簡単のため $|x - y|$ とも書く。

定理 2.7. 双曲群に $\mathbb{Z}^2$ に同型な部分群は存在しない。

（証明） $\mathbb{Z}^2 \simeq H = \langle a, b \rangle \subset G$ として矛盾を導く。位数無限の元 a が境界に定める 2 点を $A = \{a^{\infty}, a^{-\infty}\}$ とする。二点 $a^{+\infty}, a^{-\infty}$ を結ぶ測地線を γ とする。（このような測地線は存在することが分かる。または、擬測地線でも以下の議論は同様に成り立つので、例えば α_a で代用してもよい）。このとき、H が可換だから、2 つの測地線 $\gamma(t), t \geq 0$ と $b\gamma(t), t \geq 0$ は漸近同値。$\gamma(t), t \leq 0$ についても同様なので、$b\gamma(\pm\infty) = \gamma(\pm\infty)$. 従って、$b \cdot A = A$. さらに、任意の n について $b^n \cdot \gamma$ も、$a^{+\infty}, a^{-\infty}$ を結ぶ測地線なので、δ-双曲性より、γ の δ-近傍にある。したがって、ある定数 C が存在して任意の n について、ある i_n が存在して、$|b^n a^{i_n} - 1| \leq C$ となる。よって、部屋割り論法により、ある異なる n, m について、$b^n a^{i_n} = b^m a^{i_m}$. これは矛盾。 $\square$

2.4 Cartan の補題

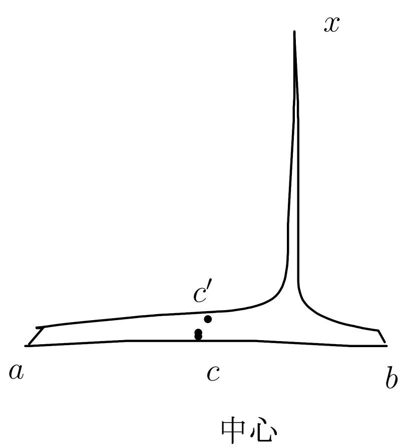
次に、双曲群のトージョンについて述べよう。距離空間 X の点 $x \in X$ を中心とする半径 r の距離球を $B(x, r)$ と表す. 任意の有界な集合 $S \subset X$ に対して、ある $x \in X$ について $S \subset B(x, r)$ となる r の下限を S の「半径」の呼ぶ。さらに、その r について、$S \subset B(x, r)$ となる $x \in X$ を S の「中心」とよぶ。中心は 1 つとは限らない。X がプロパーなら有界な集合には中心が存在する。

次の命題は「Cartan の補題」と呼ばれる現象である。空間の非正曲率性に由来する幾何学的性質である。

命題 2.7. X を δ-双曲空間とする。任意の有界な集合 S とその任意の 2 つの中心 a, b について $|a-b| \leq 6\delta$.

(**証明**) $\delta > 0$ として、$|a-b| < 6\delta$ を示す。$|a-b| \geq 6\delta$ として矛盾を導く。a, b の「中点」を c とする。すなわち、次を満たす $c \in [a, b]$ をとる。$|a-c| + |c-b| = |a-b|$ であり、$|a-c|, |b-c| = |a-b|/2$. このとき、$|a-c|, |b-c| \geq 3\delta$.

S の半径を r とし、$x \in S$ を任意の点とする。このとき、$x \in B(a, r) \cap B(b, r)$ である。測地三角形 $\Delta(a, b, x)$ において、測地辺 $[a, x]$ または $[b, x]$ に点 c' が存在して $|c - c'| \leq \delta$.　以下、$c' \in [a, x]$ として議論を進める。このとき、$|a-x| = |a-c'| + |c'-x|$. 従って、$|c'-x| = |a-x| - |a-c'| \leq |a-x| - |a-c| + |c-c'| \leq |a-x| - 3\delta + \delta = |a-x| - 2\delta$. これを使って、$|c-x| \leq |c-c'| + |c'-x| \leq \delta + |c'-x| \leq \delta + |a-x| - 2\delta \leq |a-x| - \delta \leq r - \delta$. これより $S \subset B(c, r-\delta)$. これは半径 r の定義に矛盾。$\delta = 0$ の場合は、$\delta > 0$ とし、$\delta \to 0$ と極限をとる議論をすればよい。 $\square$



これから次の代数的な性質が得られる。

定理 2.8. G を双曲群とする。このとき、G に有限位数の元は共役を除いて有限個しかない。

（**証明**）G は δ-双曲的とする。集合 A を $A = \{a \in G \,|\, |a| \leq 6\delta + 1\}$ と定義. $g \in G$ を任意の位数有限の元とする。以下で g が A のある元に共役であることを示す. A は有限集合だから, これが定理を示す. $S = \{g^n | n \in \mathbb{N}\}$

は Cayley グラフ Γ 内の有界集合．よって、中心 $c \in \Gamma$ が存在する．このとき、ある頂点 $\gamma \in G$ が存在して, $|c-\gamma| \le 1/2$. 一方, $gS = S$ より gc も S の中心である。ところが、上の命題より $|gc - c| \le 6\delta$. 従って, $|\gamma - g\gamma| \le 6\delta + 1$. これより, ある $a \in A$ が存在して $\gamma a = g\gamma$. 従って, $g = \gamma a \gamma^{-1}$ よりよい。 □

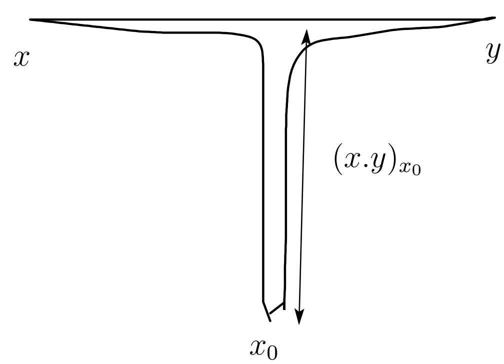
定理 2.8 で述べた性質は、群について確かめるべき基本的な性質の一つである。定理で, 共役をとらないと主張は正しくない. 例えば、$F_2 * \mathbb{Z}_2$ を考える. F_2 は 2 階の自由群を表す。$a \in \mathbb{Z}_2$ を $\mathbb{Z}_2$ の生成元とすれば、任意の $g \in F_2$ に対して, gag^{-1} は位数 2 の元だが、異なる g に対して, これらは全て異なる.

2.5 グロモフ積

双曲群の位数無限の元について考察するために記号を導入する。(X,d) を距離空間とし、$x_0 \in X$ を任意の基点とする。$x, y \in X$ に対して

$$(x.y)_{x_0} = \frac{1}{2}\{d(x,x_0) + d(y,x_0) - d(x,y)\}$$

と定義し、x と y の **Gromov 積** (Gromov product) とよぶ。双曲空間では、点 x_0 から x, y を結ぶ測地線 $[x,y]$ への距離が、およそ $(x.y)_{x_0}$ である。



グロモフ積

次の事実は重要である。

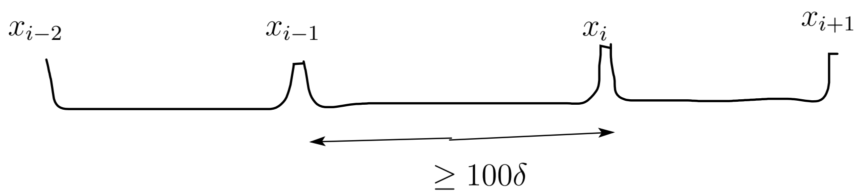
補題 2.1. δ-双曲空間 X に点列 $x_i \in X, i \ge 1$ があり、任意の $i \ge 2$ について次が成立するとする。

$$|x_i - x_{i-1}| - (x_{i-1}.x_{i+1})_{x_i} - (x_{i-2}.x_i)_{x_{i-1}} \ge 100\delta.$$

このとき、任意の $n \geq 2$ について次が成立。

$$|x_n - x_1| \quad \geq \sum_{i=2}^{n} (|x_i - x_{i-1}| - (x_{i-1}.x_{i+1})_{x_i} - (x_{i-2}.x_i)_{x_{i-1}} - 20\delta).$$

この事実の証明は省略する。x_i を頂点とする測地多角形を書いて、その細さを評価するような議論によるが、こみいっている。証明の途中で、$[x_1, x_n] \subset N_{10\delta}(\cup_{i=1}^{n-1}[x_i, x_{i+1}])$ を示す．N_c は集合の c-近傍を表す。



詳細は略すが、以前、事実だけ述べた命題 2.2（局所擬測地線が測地線であるという主張）は、補題 2.1 からの比較的容易な帰結である。補題 2.1 のもう一つの帰結を見るために、$L - 2l \geq 100\delta$ を満たす、ある定数 $L, l > 0$ を考える。点列 x_i が、任意の i について $|x_i - x_{i-1}| \geq L, (x_{i-1}.x_{i+1})_{x_i} \leq l$ を満たすなら、補題 2.1 の仮定が満たされるので、任意の $n \geq 2$ について

$$|x_n - x_1| \geq (n-1)(L - 2l - 20\delta).$$

つまり、点列 x_i は定数 L, l だけから決まる定数についての、ある擬測地線の上にある。

双曲群の元 g について、集合 $\{g^n | n \in \mathbb{Z}\} \subset \Gamma$ がある擬測地線上にあるとき、元 g は**双曲的** (hyperbolic) と呼ぶ。この定義は、元 g の G の Cayley グラフへの等長変換が双曲的 (cf. 2.3 章) であることと同値である。

これから、双曲群の元 g がトージョンでないとき双曲的になることを示す（定理 2.9)。元 g が双曲的とは、上の定義を言い換えれば、2.3 章で与えた道 α_g が擬測地線であることと同値だから、この主張は 2.3 章では証明なしに既に述べた。まず、補題 2.1 から容易に次が従う．点列 $\{g^n\}$ を考えれば良い。ただし、$|g| = d(1, g)$ とする。

補題 2.2. δ-双曲群 G の任意の元 g について、次が成立すれば、g は双曲的な元である。（すなわち、$\{g^n\}_n$ は擬測地線を定める）。

$$(1.g^2)_g \leq |g|/2 - 100\delta.$$

補題 2.2 から次が分る。

補題 2.3. 元 $g, h \in G$ が双曲的でないとする。次が成立すれば、元 gh, hg は双曲的である。

$$(g.h)_1 \leq \min(|g|, |h|)/2 - 20\delta.$$

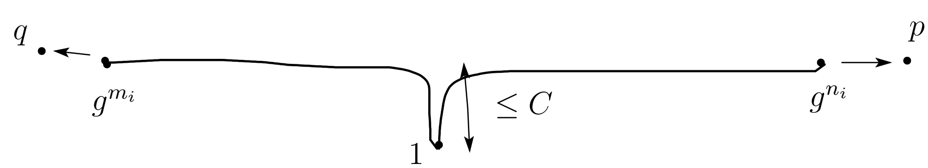
これには点列 $\{1, g, gh, ghg, ghgh, \ldots\}$ を考えれば良い。実際、各 g, h が双曲的でないことから、それぞれについて補題2.2の不等式が不成立である。それに仮定の不等式を合わせて考察すると補題 2.2 の不等式が元 gh, hg それぞれに関して成立することが分かる。

さて、双曲群 G の元の任意の無限列 $\{g_n\}_n \subset G$ にたいして（ただし、元は相異なるとする）、ある部分列 $\{g_n\}_n$（と書くことにする）と点 $g_\infty \in G(\infty)$ が存在して、$\lim_n g_n = g_\infty$ となる。これは、Cayley グラフ Γ がプロパーなのでよい。つまり、任意の非有界な無限列 $\{g_n\}_n$ は境界 $G(\infty)$ に集積点を少なくとも一つ持つ.

定理 2.9. δ-双曲群 G において、任意の無限位数の元 $g \in G$ は双曲的。

（証明） $\delta > 0$ としてよい。位数無限の g が双曲的でないとして、矛盾を導く。まず、元の双曲性の定義から、任意の n に対して g^n は双曲的でない。集合 $\{g^n\}_n$ は無限集合なので、境界 $G(\infty)$ に集積点が存在する。場合を二つに分ける。

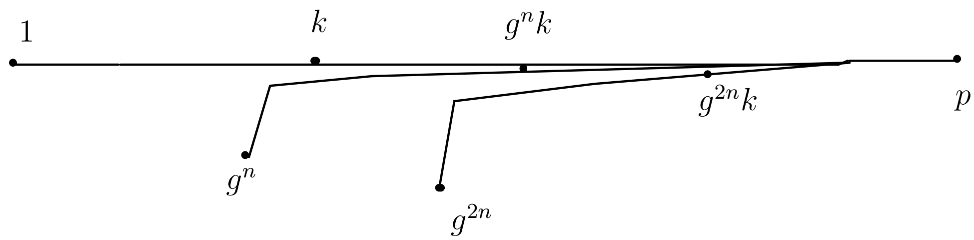
(1) 集積点が 2 つ以上存在する場合. $p \neq q$ を集積点とする。つまり、ある数列 $n_i, m_i > 0$ が存在して、$g^{n_i} \to p, g^{m_i} \to q$ である。この点列にたいして、ある定数 C が存在して、任意の i, j に対して $(g^{n_i}.g^{m_j})_1 \leq C$ となる。従って、十分大きな i, j について、$(g^{n_i}.g^{m_j})_1 \leq \min(|g^{n_i}|, |g^{m_j}|)/2 - 20\delta$. これと、$g^{n_i}, g^{m_j}$ がともに双曲的でない事を合わせれば、補題 2.3 より $g^{n_i+m_j}$ は双曲的. 矛盾。



(2) 集積点が 1 つしかない場合. $p \in G(\infty)$ を唯一の集積点とする。$gp = p$ である。$\gamma = [1, p]$ とする。これは 1 を起点とし、$\gamma(\infty) = p$ となる測地線を表す。$N = \sharp B(1, 1000\delta)$ とする。ただし、B は測地閉球である。さて、任意の n について、$g^n\gamma = [g^n, p]$ である。従って、ある $k \in \gamma$ が存在して、$1 \leq n \leq 2N$ である 任意の n にたいして、$d(\gamma, g^n k) \leq \delta$ と

なる。（実際、$k \in \gamma$ を p に十分近く取れば良い. γ と $g^n\gamma$ は p の近くでは, 互いに δ 程度しか離れていないので）。

一方, G の Γ への作用は自由だから、任意の $h \in G$ にたいして、ある $1 \leq n(h) \leq N$ が存在して、$d(h, g^{n(h)}h) \geq 1000\delta$ である。これを $h = k$ として適用すれば、$n = n(k)$ にたいして、$d(k, g^n k) \geq 1000\delta$. この評価と、前の評価 $d(\gamma, g^n k) \leq \delta$ をあわせて考察すると、次が得られる。$(k.g^{2n}k)_{g^n k} \leq 10\delta$. これより、$(1.k^{-1}g^{2n}k)_{k^{-1}g^n k} \leq 10\delta$. 一方、$|k^{-1}g^n k| = d(g^n k, k) \geq 1000\delta$. よって、元 $k^{-1}g^n k$ に補題 2.2 を適用して、双曲的と結論できる。双曲性は共役を取ることで不変なので、 これより、元 g^n は双曲的。従って元 g も双曲的。矛盾。 □



同じような議論によって次も示せる.

定理 2.10. *G を δ-双曲群とする。任意の無限部分群 H に対して, 双曲的（よって位数無限）な元 $h \in H$ が存在する。*

関連する話題として、全ての元の位数が有限である有限生成な無限群が存在するかという問題は「Burnside 問題」(1902) と呼ばれる。今までに組み合わせ群論の成果で、そのような無限群の存在は知られている。また、考えている群がそのような部分群を含むかというのも、標準的な問題である。Burnside 問題に関する双曲群を使った例として、Gromov による次の結果がある：任意の初等的でない双曲群 G は、その商群, H, として全ての元が位数有限だが無限群であるものを持つ。

ただし一般に H は有限表示群ではない。Gromov の論法は少重複関係式群の理論を使う。概略だが、$n \in \mathbb{N}$ をある自然数として、次のような表示の群を考える。これは階数 2 の自由群の商群である。

$$H_n = \langle a, b | w^n = 1, {}^{\forall} w \rangle.$$

ただし、w は a, b による全ての語 w を考える。従って有限表示ではない。H_n の任意の元は n 乗すると単位元になるが、H_n が無限群になるかは分からない。そもそもの Burnside 問題は、商群を考える自由群の階数が 3

以上の場合も考え、各 n についてこのような表示を持つ群が無限群かを問う問題であった。Gromov は双曲群の商群として、このようなタイプの表示を考え、さらに、語 w によって $n = n_w$ を注意深くとることで (その場合、n_w は一般に有界ではない)、上に紹介した結果を示した ([G;hyp]).

2.6 等周不等式

古典的な等周不等式を復習する。双曲平面 $\mathbf{H}^2$ に単純閉曲線 c を考え、その長さを $l(c)$ とし、それが囲む有界領域の面積を $A(c)$ とする。ある定数 K が存在して任意の c に対して次が成立。これを称して線形の**等周不等式**という。

$$A(c) \leq Kl(c).$$

ユークリッド平面 $\mathbf{E}^2$ において同様のことを考えると 2 次の等周不等式が成り立つ。すなわち、任意の c について、

$$A(c) \leq \frac{1}{4\pi}(l(c))^2.$$

以下、群で等周不等式を考えよう。G を有限表示群として、ある表示が与えられたとする。

$$G = \langle S|R \rangle.$$

有限集合 S が生成元集合で有限集合 R が関係式集合である。$F(S)$ を S の生成する自由群とし、その中で集合 R の生成する正規部分群を $N(R)$ とすれば、群の表示の定義より $G \simeq F(S)/N(R)$ である。すなわち自然な全射準同型

$$F(S) \to G$$

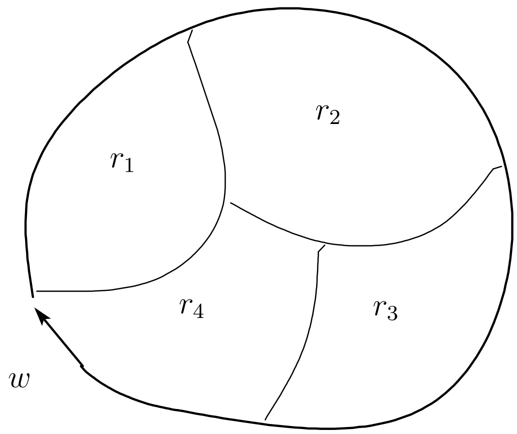
の核が $N(R)$ である。さて $N(R)$ の定義より、各元（またはこの場合、自由群 $F(S)$ の元なので語と呼んだほうが良いかもしれない）$w \in N(R) < F(S)$ は、R の元の $F(S)$ 内での共役の有限個の積でかける：

$$w = r_1^{a_1} \cdots r_n^{a_n}.$$

ただし、$r_i \in R, a_i \in F(S)$ で、$r_i^{a_i} = a_i r_i a_i^{-1}$ のこと。上の等号は $F(S)$ での等号であることに注意。w のこのような表示を全て考え、この表示の「長さ」n の最小値を $A(w)$ と書くことにする。ある定数 K が存在して、任意の $w \in N(R)$ について

$$A(w) \leq Kl(w)$$

が成り立つとき、G は**線形の等周不等式**を満たすという。ただし $l(w)$ はワード w の長さ（1.1 章）である。$A(w) \leq K(l(w))^2$ ならば、「2 次の等周不等式」を満たすなどという。



ファンカンペン図形

次は大変重要な定理である。

定理 2.11. 有限表示群 G について次は同値。

1. G は双曲群。
2. G は線形の等周不等式を満たす.

つまり群論において線形の等周不等式は双曲性を特徴付けている。一方、2 次の等周不等式を満たす群の、これに類する特徴付けは見つかっていない。ただし「オートマチック群」と呼ばれる群のクラスがあり、それは 2 次の等周不等式を満たすことが知られている。一般に双曲群はオートマチック群である。オートマチック群については [Ep] を見よ。

ここで語の問題との関係を述べよう。

定理 2.12. 双曲群 G の語の問題は解ける。

群 G の語の問題とは、G の表示が与えられているとき、任意の語（与えられた表示の生成元の有限列）が単位元かどうかを判定できるか、という問題である（1.1 章）。仮に、ある表示について、線形の等周不等式 $A(w) \leq Kl(w)$ が存在するとし、定数 K も既知とすれば、任意の語 w について、それが単位元かどうか次のように判定できるので、語の問題は解ける。実際、G の中で $w = 1$ なら、自由群 $F(S)$ の中で、ある等式

$w = r_1^{a_1} \cdots r_n^{a_n}$ が成り立ち、$n \le A(w) \le Kl(w)$ となる。K が既知なら $Kl(w)$ は、具体的な数なので、上の等式の右辺に現れる可能性のある語は高々有限個である（図「ファンカンペン図形」参照)。それらの中に、$F(S)$ で上の等式が成立ものがあるか、全てチェックすればよい。もしあれば、w は G の単位元を表すと結論でき、成立するものが一つもなければ、w は G で単位元でない。この議論から、等周不等式の形が重要なのでなく、不等式中の定数の具体的な上界を得ることが重要であることが分かる。従って、本質的なのは次の事実である。

命題 2.8. G を双曲群とし、ある表示が与えられたとする。このとき、線形の等周不等式の係数 K の上界を具体的に計算できる。

証明は省略するが、幾何学的なアイディアに基づく。実際、定数 K を計算するアルゴリズムがあるのだが、それを双曲群でない群に適用すると、有限時間で終わらない。双曲群の場合、有限時間で終わり同時に定数 K のある上界が得られる。双曲群の共役問題も肯定的に解かれている。

双曲群の同型問題については、位数 2 の元を含まない場合は、肯定的に解かれている（Sela,1995.[S])。それには、次章で述べる収束の概念が必要だった。

2.7 Gromov-Hausdorff 収束

Gromov の論文以降の発展として、双曲群に「Gromov-Hausdorff 収束」を使う結果がある。それを少し紹介しよう。次は、初期の良い定理の一つである。

定理 2.13 (Bestvina-Paulin-Rips). 双曲群 G の外部自己同型群 $\mathrm{Out}(G)$ が無限群とする。このとき、G は有限部分群か、ほとんど $\mathbb{Z}$ の部分群, C, について分解する。すなわち $G = A *_C B$（非自明に)、または $G = A*_C$ と書ける。

ただし、$G = A *_C B$ が非自明とは、$A \neq C$ かつ $B \neq C$ が成立することである。この定理は離散群の代数、幾何と低次元トポロジー、双曲幾何の関連を示していて興味深い。境界のないコンパクトな負曲率多様体 M の基本群 G が双曲群であることは述べた（cf. 定理 2.2)。さらに M を双曲多様体として、定理 2.13 を検討してみよう。M が 2 次元なら、$\mathrm{Out}(G)$ は写像類群で、無限群である。定理によれば、G は単位群または $\mathbb{Z}$ につ

いて分解するはずだが、これは曲面群 G では自明である。閉曲面群は自由積には分解しないが、曲面上に単純閉曲線を取り、ファンカンペンの定理を使えば、$\mathbb{Z}$ についての分解が得られる。

一方、M の次元を 3 以上としてみよう。このとき、Mostow 剛性（定理 1.2）から、$\mathrm{Out}(G) \simeq \mathrm{Isom}(M)$ が分かる。一方、負曲率空間の幾何から $\mathrm{Isom}(M)$ は有限群である。従って $\mathrm{Out}(G)$ は有限群であり、定理 2.13 の仮定を満たさない。しかし、3 次元以上でも双曲多様体 M がコンパクトでない（実際はコンパクトで境界がある多様体の内部を考える場合が多い）ときには、G は双曲群とは限らないが、$\mathrm{Out}(G)$ が無限になることはある。3 次元双曲多様体 M の基本群の $SL(2,\mathbb{C})$ 表現に関するモジュライのコンパクト性と、M のトポロジーを関連付けた Thurston, Morgan-Shalen による仕事がある。その結論によれば、定理 2.13 と同様、モジュライ（この場合は $\mathrm{Out}(G)$）の無限性は群の分解と密接に関連している。これについては、群の分解の章（特に 3.7, 3.8 章）で述べる。

定理 2.13 の証明では Gromov-Hausdorff 位相が本質的な役割を果たした。定義だけ述べておく。まず、コンパクトな距離空間 (Z,d) の閉集合 $A, B \subset Z$ の距離 (Hausdorff 距離と呼ぶ) を次で定義する。

$$d_H^Z(A,B) = \inf\{\epsilon > 0 | A \subset N_\epsilon(B), B \subset N_\epsilon(A)\}.$$

ここで、$N_\epsilon(A)$ は A の ϵ 近傍を表す。Gromov はこれは拡張して、任意のコンパクト距離空間 A, B に距離を次で定義した。**Gromov-Hausdorff 距離**と呼ばれる. ただし、Z はコンパクトな距離空間すべてを考える。

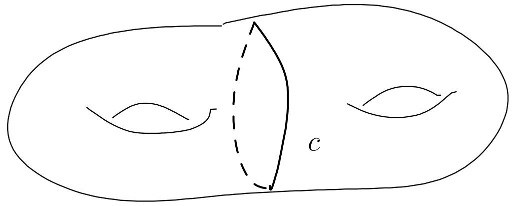
$$d_{GH}(A,B) = \inf_Z\{d_H^Z(A,B) | A, B \subset Z\}.$$

コンパクトな距離空間全体, $\mathcal{CM}$, は Gromov-Hausdorff 距離について完備になる。リーマン幾何における「有限性定理」(finiteness theorems) や、関連して Alexandrov 空間の幾何学などがここから生まれた。Gromov-Hausdorff 距離の導入は Gromov が数学にした大きな貢献の一つだろう。

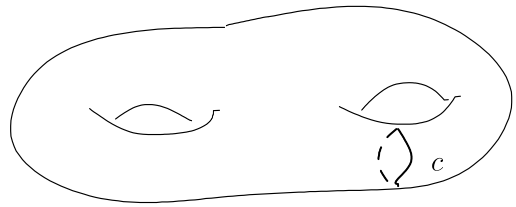
定理 2.13 は曲面群の場合、自明であることは述べた。S を向き付けられた閉曲面とし、G をその基本群とする。c を S 上の単純閉曲線で可縮でないとすると、曲面 S を閉曲線 c で切ることで群の分解

$$G = A *_C B, \text{または} G = A*_C$$

が得られた。群 C は閉曲線 c のホモトピー類が生成する $\mathbb{Z}$ に同型な G の部分群である。$S \backslash c$ が 2 つの連結成分を持てば融合積による分解、1 つの連結成分なら HNN 拡大による分解が得られる。



$A *_C B$



$A*_C$

HNN 拡大の定義を述べる。C を群 A の部分群とし、単射準同型 $f : C \to A$ が与えられたとする。文字 t の生成する無限巡回群 $\langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}$ と A の自由積 $A * \langle t \rangle$ を考え、この群に次のような関係式を導入して定義される群を $A*_{C,f}$ または単に $A*_C$ と書き、A の C についての「HNN 拡大」と呼ぶ。HNN は Higman-Neumann-Neumann の頭文字である。

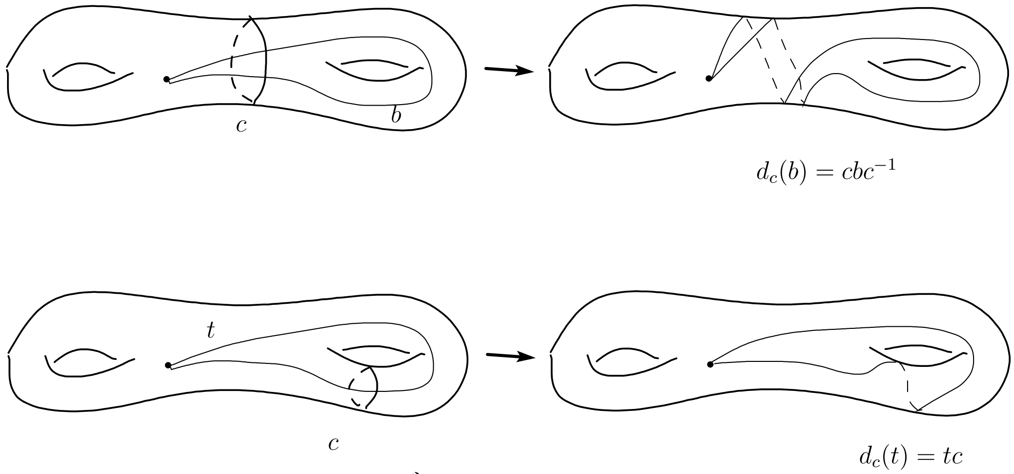
$$\forall c \in C, tct^{-1} = f(c).$$

例えば、$A = C \simeq \mathbb{Z}$ とし、f を id とすれば、$\mathbb{Z}*_{\mathbb{Z},\mathrm{id}} \simeq \mathbb{Z}^2$ である。これはトーラスを例えばメリディアンで切って得られる分解を記述している。群 G が、ある部分群 C について、非自明な融合積または HNN 拡大で書けるとき、「G は C 上分解する」と言う。

さて、曲面 S を c に沿って切って、一回転ねじってから再び貼り合わせて得られる S の自己位相同型を c に関する「デーンツイスト」と呼ぶ。$G = A *_C B$ の場合に、デーンツイストが基本群 G に引き起こす群 G の自己同型, $d_c \in \mathrm{Aut}(G)$, は次になる（基点の位置を適当に固定した）:

$$a \in A \mapsto a, b \in B \mapsto cbc^{-1} \in B.$$

ただし、閉曲線 c が定める G の元も c と書いた。このように、一般に群 G が $\mathbb{Z}$ に同型な部分群 C に沿って融合積に分解するとき、上のように与えられる G の自己同型もデーンツイストと呼び、d_C とかく。より一般に、C が可換なら定義できる。



デーンツイスト d_c

HNN 拡大, $G = A*_C$, についても、次のように代数的なデーンツイスト, $d_C \in \mathrm{Aut}(G)$, が定義される。

$$a \in A \mapsto a, t \mapsto tc.$$

Dehn は曲面について次を示した。G の内部自己同型とは、G の元による共役のことである。

定理 2.14. *S を向き付けられた閉曲面とし、G をその基本群とする。このとき、$\mathrm{Aut}(G)$ はデーンツイストと G の内部自己同型で生成される。*

外部自己同型群 $\mathrm{Out}(G)$ は曲面 S の写像類群である。$\mathrm{Out}(G)$ は有限生成なので、有限個の単純閉曲線についてのデーンツイストが生成元となる。この事実の双曲群への著しい一般化が得られている。

定理 2.15 (Rips-Sela, [RS1]). *双曲群 G が、自由積に分解不能で、位数有限の元も含まないとする。このとき、G の（$\mathbb{Z}$ に同型な部分群上の分解に付随する）代数的なデーンツイストと内部自己同型が生成する $\mathrm{Aut}(G)$ の部分群は、$\mathrm{Aut}(G)$ で有限指数である。*

これは、Bestvina-Paulin-Rips の定理 2.13 を前提とし、その著しい一般化にもなっている。証明はやはり Gromov-Hausdorff 収束と、ツリーと群作用の理論を使う。ツリーと群作用については、3 章で概略を述べるが、そこでこの定理についても説明する。

最後に、双曲群 G に関する未解決の問題を幾つか述べる。どれも難しいと思われる。

1. G は virtually torsion free か？ すなわち、有限指数の部分群でトージョンを含まないものが存在するか？
2. G は、residually finite か？ ただし、residually finite とは、任意の元 $1 \neq g \in G$ について、ある有限群 F への準同型 $a : G \to F$ が存在して $a(g) \neq 1$ となることである。
3. G は線形群か？　線形群とは、ある行列群, $GL(n, \mathbb{R})$, の部分群のことである。

ただし、3 が肯定的なら、1,2 も肯定的であることが自動的に従う。

3　離散群の分解

前章の最後に群の分解が現れたが、着目したい点は、曲面群の場合、その $\mathbb{Z}$ についての分解が曲面上の単純閉曲線による切断という現象の基本群への反映である点である。さらに、写像類群という基本群の外部自己同型全体の無限性は、視点を変えれば、曲面上の単純閉曲線全体の無限性であり、さらには基本群の $\mathbb{Z}$ に関する代数的な分解の全体の無限性であるという相関があった。最後に述べた Rips-Sela の定理 2.15 は、この関連の背後に双曲性があることを示している。

この章では、群の分解についてまとめて述べる。細部までは説明しきれないが、ストーリーを伝えたい。そもそも、対象をより小さなピースに分解することは普遍的なアプローチだが、そのとき、(1) 分解不能なピースの性質を調べること、(2) 分解の全体を調べることは基本である。

3.1　Grushko の定理とプライム分解

A, B を群とし、その自由積を $A * B$ と書く。A, B を基本群にもつ位相空間を X_A, X_B とし、X_A と X_B を線分で結んでできる空間を X とすると $A * B \simeq \pi_1(X)$ である。

逆に $G = A * B$ で、A, B が単位群でないとき、これを G の「自由積分解」と呼ぶ. さらに A が自由積分解可能だとしよう：$A = A_1 * A_2$. これから $G = (A_1 * A_2) * B$ が得られるが, 自由積の順序は結果に影響しないので、これを $G = A_1 * A_2 * B$ と書いてもよい。このように、次々に自由積分解を繰り返すとどうなるだろうか。それに関して次の定理がある。自明でない仕方で自由積に分解しない群を、「自由積分解不能」な群

と呼ぶ.

Grushko の定理 (cf. [LSc]) によれば、任意の有限生成群 G は、

$$G = F_n * G_1 * \cdots * G_m$$

と自由積に分解し次を満たす:

1. F_n は階数 n の自由群、各 G_i は自由積分解不能で、単位群でなく $\mathbb{Z}$ に同型でもない。
2. この分解は次の意味で一意的である:
   $n, m \geq 0$ は一意的で、各部分群 G_i は G の元での共役を除いて一意的。
3. この分解は任意の自由積分解 $G = A * B$ を次の意味で記述する:
   $G_1, \cdots, G_m$ を適当に並べ替え、それらを適当に G の中で共役を取ったものを $G'_1, \cdots, G'_m$ とすれば (これらは A, B による)、ある $0 \leq n_1 \leq n, 0 \leq m_1 \leq m$ が存在して次が成立:

$$A = F_{n_1} * G'_1 * \cdots * G'_{m_1}, B = F_{n-n_1} * G'_{m_1+1} * \cdots * G'_m.$$

つまり **Grushko 分解**は一つの分解で自由積分解の全てを記述している。

ところで上の主張 1 だけでも自明でないことに注意。定理の証明では与えられた群 G が自由積分解可能だとし、任意に自由積分解 $G = G_1 * G_2$ を取り、さらに G_i が自由積分解可能なら続けるというプロセスを考える。このプロセスが有限回で終結するなら主張 1 が従う。実際、プロセスの終結は次のように保証される。有限生成群 G の生成元集合（一意とは限らない）の元の数の最小値を $r(G)$ としよう。このとき任意の自由積分解 $G = G_1 * G_2$ について、G_i は有限生成で次が成立することが知られている。

$$r(G) = r(G_1) + r(G_2).$$

これより、上のプロセスが有限回での終結するのは明らかだろう。

この論理の仕組みは、組み合わせ群論 (他に低次元トポロジーなどいろいろあると思うが) の議論でよくあるパターンである。

1. 対象に、あるプロセスを定義する。
2. ある「複雑度」を定義し、プロセスが進行するごとに複雑度が減少することを示す。
3. 複雑度の下限の存在を示すことにより、プロセスが有限回で終結することを保証する。

実際、後で述べる群の JSJ 分解の存在にもこのような議論が適用される。
この章における我々の着目点は離散群とトポロジーの関連である。群の自由積分解をその観点で眺めてみよう。閉曲面群は自由積に分解しない。単純閉曲線 c が基本群に定める元が単位群なら、それに沿って曲面を切って得られる基本群の自由積分解は自明な分解である。なぜなら、c は曲面内の円板を囲むからである。一方、曲面に境界があるとし、曲面に（自己交差なく）埋め込まれた線分を考える。さらに、線分の 2 つの端点が、ともに曲面の境界に含まれるとしよう。この線分に沿って曲面を切ると、曲面の基本群の分解が得られるが、この分解は自由積分解である。線分の基本群が自明であるからである。線分が、端点を固定して曲面の境界にホモトープでないなら、この自由積分解は非自明である。

次元を上げて、M を向きつけ可能な 3 次元閉多様体とする。M が（非自明な）連結和に分解するとしよう: $M = M_1 \sharp M_2$. 連結和分解は、M に埋め込まれた球面 S^2 で M を切る事によって得られる分解である。球面の基本群は自明だから、ファンカンペンにより、$\pi_1(M) = \pi_1(M_1) * \pi_1(M_2)$ という M の基本群の自由積分解が得られる。この逆も正しいことが知られている。すなわち、$\pi_1(M)$ が非自明な自由積に分解するなら、それは M のある連結和分解により実現される（Kneser 予想の Stallings による解決 [He]).

さらに、Grushko の定理の対応物として次がある。連結和分解しない多様体を「プライム」と呼ぶが、M は有限個のプライムな多様体の連結和に分解することが知られている (Kneser. 一意性は Milnor):

$$M = M_1 \sharp \cdots \sharp M_n.$$

これを「プライム分解」と呼ぶ。基本群の Grushko 分解は連結和分解で実現されるが、ポアンカレ予想が肯定的に解決されれば、3 次元閉多様体のプライム分解と、その基本群の Grushko 分解は完全に対応する。

3.2 曲面上の単純閉曲線

3 次元多様体のプライム分解と、基本群の自由積分解の関係を可能にしたのは、球面が 2 次元（すなわち余次元 1）であることと、その基本群が自明であることである。S を向きつけ可能な閉曲面とし、c をその上の単純閉曲線で可縮でないとする。c のホモトピー類が S の基本群 G の中で生成する部分群を $C \simeq \mathbb{Z}$ とする。ファンカンペンの定理より、曲

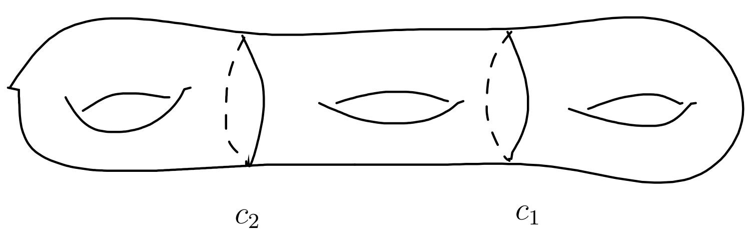
線 c に沿って S を切ることで G の $\mathbb{Z}$ に関する分解を得た。$S\backslash c$ の連結成分が 2 つなら融合積による分解、1 つなら HNN 拡大による分解である：$G = A *_C B, G = A *_C$.

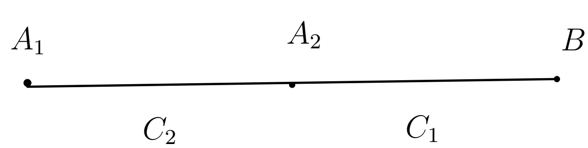
さて、3 次元多様体の基本群の自由積分解はトポロジカルであった。すなわち、それを実現する球面があった。曲面群の $\mathbb{Z}$ についての分解もトポロジカルであることが知られている。

命題 3.1. S を向きつけ可能な閉曲面とし、G をその基本群とする。$\mathbb{Z}$ に同型な部分群についての G の分解は、S 上のある単純閉曲線で S を切ることで実現される（ただし、G の内部自己同型を除いて）。

3 次元多様体 M の連結和分解は、次々に行えば有限回の操作でプライム分解に行き着く。また、連結和分解の順序が異なっていても、最後に行き着く分解は同じである。従って、プライム分解は M に埋め込まれた球面を全て記述している。

しかし、曲面の閉曲線による分解には違う現象があるので、それを見てみよう。曲面 S に 2 つの単純閉曲線 c_1, c_2 が与えられたとする。S を c_1 で切ったとき、2 つの曲面 U, V が得られたとし、対応する基本群の分解を $G = A *_{C_1} B$ とする。仮に、曲線 c_2 が U(または V) に含まれているとし、U を c_2 で切ることで、例えば、分解 $A = A_1 *_{C_2} A_2$ が得られたとする。このとき、$G = A_1 *_{C_2} A_2 *_{C_1} B$ と書いてもよいだろう。ただし、これは $C_1 < A_2$ の場合である。もし、$C_1 < A_1$ なら、A_1, A_2 の順序を入れ替えて書く。いずれにしても、この表示 1 つで、G の C_1, C_2 についてのそれぞれの分解が同時に記述されていることが分かる。





曲面群のグラフ分解

一方、曲線 c_1, c_2 が（ホモトピーで、どう動かしても）交わる場合、このようには C_1, C_2 についての分解を同時に記述することは出来ない。これが、曲面の単純閉曲線全体を記述すること、または群論的に言い換えて、曲面群の $\mathbb{Z}$ についての分解の全体を、同時に記述する事の困難の本質である。

3.3 群のグラフ分解

群の融合積、HNN-拡大を有限回繰り返して群 G が得られる時、その逆操作は G の**グラフ分解** (graph decomposition) を与えると言われる。例として、前に述べた $G = A_1 *_{C_2} A_2 *_{C_1} B$ については、2 辺からなる線状のグラフを考え、その 3 頂点は順に群 A_1, A_2, B によって、また 2 辺は群 C_2, C_1 によってラベルがついていると考える。このように、有限グラフの頂点と辺が、それぞれ、ある群でラベルがついているとき、グラフに沿って、群の融合積と HNN 拡大を行うことで群が得られる。このようにして得られる群 G は、グラフ分解するという。融合積と HNN 拡大は、ひとつの辺からなるグラフの場合で、そのグラフは融合積の場合は線分、HNN 拡大の場合は円周である。

例えば、3 次元多様体の連結和分解は、基本群のグラフ分解を与え、この場合、辺は単位群でラベルがついていて、頂点のラベルは分解の成分である多様体の基本群である。曲面上の互いに交わらない幾つかの単純閉曲線が与える曲面群のグラフ分解では、辺は $\mathbb{Z}$ でラベルがついている。

これらのことを形式的に述べるなら、**群のグラフ**とは、連結な有限グラフ Γ、いくつかの群、いくつかの準同型の組で次のような性質を満たすものである: 各辺 e と各頂点 v は、それぞれ、ある群 G_e とある群 G_v でラベルが付けられ（単に割り当てられているという意味である）、さらに、各辺 e の端点 v_1, v_2(ただし、$v_1 = v_2$ の場合もある) について単射準同型

$$f_i : G_e \to G_{v_i}, (i = 1, 2)$$

が与えられている. これらの情報を簡単に $(\Gamma, \mathcal{G})$ と書こう。このような $(\Gamma, \mathcal{G})$ に対して, 各辺ごとに融合積, または HNN 拡大を準同型 f_i に従って次々に行い, 結果として得られる群を、群のグラフ $(\Gamma, \mathcal{G})$ の（Bass-Serre の意味での）「基本群」とよび、$\pi_1(\Gamma, \mathcal{G})$ と書く. 一方, 群 G が、ある群のグラフ $(\Gamma, \mathcal{G})$ について $G \simeq \pi_1(\Gamma, \mathcal{G})$ となるとき、$(\Gamma, \mathcal{G})$ を G の「グラフ分解」とよぶ。

3.4 Bass-Serre 理論

どのような群が非自明なグラフ分解を持つかは、基本的かつ重要な問題である。この問いに関する初期の良い結果に、次の Serre の定理 [Se] がある。

定理 3.1. $SL(n,\mathbb{Z}), n \geq 3$ はグラフ分解しない。

Serre はこれを幾何学的に示した。Bass-Serre 理論によれば、群 G のグラフ分解の存在と、G のある単体的ツリーへの非自明（作用に共通な固定点がないこと）な等長作用の存在は同値である。実際、上の定理は次を示す事で証明された: $SL(n,\mathbb{Z}), n \geq 3$ がツリーに等長的に作用するなら、ツリー上に共通の固定点を持つ。

対照的に $SL(2,\mathbb{Z})$ は次のような有名な分解を持つ。

$$SL(2,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_4 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6.$$

ただし $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ である。$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすれば、$a^2 = b^3 = -\mathrm{id}$ であり、次のような群表示を得る。

$$SL(2,\mathbb{Z}) = \langle a, b | a^4 = 1, b^6 = 1, a^2 = b^3 \rangle.$$

より一般にランクが 2 以上の単純リー群 L(例えば $SL(n,\mathbb{R}), n \geq 3$) の格子部分群 G（すなわち離散群でハール測度について L/G は有限測度。例えば $SL(n,\mathbb{Z}), n \geq 3$) は「カズダン (Kazhdan) の性質 T」と呼ばれるものを満たし (cf. [G;ran])、そのような群は分解しないことが知られている。一般に分解しない群は、「性質 FA」を持つと言われる。

Bass-Serre 理論の概略を紹介したい。基本的な文献は [Se] である. 単体的なツリーだけ考え、各辺の長さを 1 として測地空間とする。群 G のツリー T への作用は、単体的かつ等長的とし、ある辺の向きを逆にして、その辺に写す作用はないとする。群 G が ツリー T に作用していて、T の空でない部分ツリーで G-不変なものがないとき、この作用は minimal という。群 G がツリー T に作用していているとき、G-不変なある部分ツリーが存在して、その上の G の作用は minimal になるので、以下、minimal な作用だけ考える。

次が Bass-Serre 理論の基本定理 ([Se]) である。

定理 3.2. *1.* $(\Gamma, \mathcal{G})$ を群 G のグラフ分解とする。すなわち、$\pi_1(\Gamma, \mathcal{G}) \simeq G$. このとき、ある単体的ツリー T と、それへの G の等長作用が存在して次を満たす.

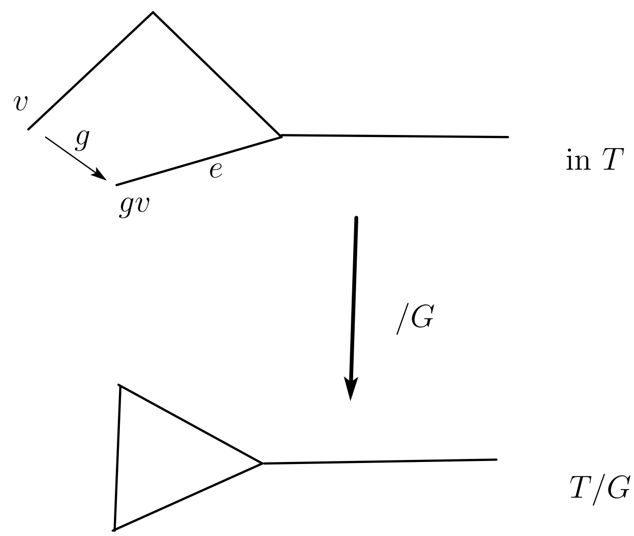
- $T/G = \Gamma$.
- Γ の各辺 e (または 各頂点 v) をラベルする群 G_e(または G_v) は、e(または v) の T における、あるリフトである辺 (頂点) の固定化部分群である。

2. ある有限生成群 G が, ある単体的ツリー T に等長変換によって minimal に作用しているとし、次のような群のグラフ $(\Gamma, \mathcal{G})$ を考える。

- Γ は、作用の商グラフ（自動的に有限である）とする。
- Γ の各頂点、辺は、それらを T にリフトして得られる、ある頂点 v、辺 e（一意ではない）の固定化部分群, $G(v), G(e)$ でラベルされる。
- 準同型は、直前の項目でリフトにより得られた頂点 v と辺 e に包含関係 $v \subset e$ がある場合は、固定化部分群の自然な包含写像 $G(e) < G(v)$ とし、包含関係がない場合は、G の作用を使って、ある元 $g \in G$ により $g(v) \subset e$ とし、g の作用が導く同型 $G(v) \simeq G(g(v))$ を考え、これと包含写像 $G(e) < G(g(v))$ を合成して単射準同型 $G(e) \to G(v)$ を定義する。

このとき、その基本群 $\pi_1(\Gamma, \mathcal{G})$ は G に同型.

定理 3.2 から、群のグラフ分解と, ツリーへの作用が「同値」であることが分かる. 定理で与えられるツリーを, 群のグラフに対応する「Bass-Serre ツリー」と呼ぶ。一言でいうなら、Bass-Serre 理論は、被覆空間と基本群の理論を、作用が自由でない場合に、1 次元の場合に限って定式化したものである。



群のグラフ

群のグラフ分解と、その「普遍被覆」であるツリー、それへの「基本群」の作用の分かりやすい例として、種数 2 以上の閉曲面 S 上の互いに交わらない二つの単純閉曲線 c_1, c_2 についてのグラフ分解がある。S を双曲的とし、c_1, c_2 を閉測地線で実現して、S の普遍被覆 X を考える。X は双曲平面である。c_1, c_2 の X へのリフトは、互いに交わらない測地線の族を定めるが, その dual ツリーが求めるものである。S の基本群 G が, このツリーに作用するのは明らかだろう。

ところで、[Se] によれば Serre が群の分解とツリーへの群作用についての理論を構築したきっかけは、次の定理に刺激されたことによるという。

定理 3.3 (伊原康隆.1966). p を素数とし、p-進リー群 $SL(2, \mathbb{Q}_p)$ の離散部分群 G が位数有限の元を含まないとする。このとき G は自由群。

Serre は Bass-Serre 理論を使って別証を与えたが、その概略を述べる。ちょうど実リー群に、ある対称空間が対応するように、p-進リー群にも、対応する対称空間が存在する。それらは一般に、ある性質をもつ単連結な CW 複体だが、「ランク」が 1 である $SL(2, \mathbb{Q}_p)$ に対応するものは、ある単体的ツリー T である。$SL(2, \mathbb{Q}_p)$ は T に等長的に作用するが、その作用を G に制限すると、G が離散であることと、位数有限の元がないことから、作用が自由であることが分かる。従って、$T \to T/G$ は普遍被覆であり、T/G がグラフなので、その基本群は自由群である。これより、G は自由群である。

この議論は、$SL(2,\mathbb{R})$ の場合と完全にパラレルである。すなわち、位数有限の元を含まない離散部分群 G が与えられたとする。$SL(2,\mathbb{R})$ に対応する対称空間は $\mathbf{H}^2$ であり、$SL(2,\mathbb{R})/\pm 1 = PSL(2,\mathbb{R}) \simeq \mathrm{Isom}_+(\mathbf{H}^2)$ であるから、$G < \mathrm{Isom}_+(\mathbf{H}^2)$ となる。Isom_+ は向きを保つ等長変換群である。従って、G は双曲平面 $\mathbf{H}^2$ に等長的、離散的に作用する。位数有限の元がないことから、作用は自由である。この作用の商空間は向きの付いた双曲曲面であり、従って、G は自由群であるか、向きのついた双曲閉面群の基本群である。

この章のテーマは群の分解と幾何学の関係だが、多様体 M^n の基本群の分解と、余次元 1 の部分多様体 N の存在の相関は重要である。ファンカンペンにより、M の基本群は N の基本群について分解するからである。余次元 1 の N の存在は $H_{n-1}(M)$ の非自明性、すなわち $H_1(M)$ の非自明性と関連しているが、Serre の定理 3.1 と関連して、$SL(n,\mathbb{Z}), n \geq 3$ の $\mathbb{R}$-係数の H_1 が自明である事実 (松島, 村上, Borel など) に注意しよう。性質 $H_1 = 0$ は、これらの群の有限指数の部分群でも成立する。一方、$SL(2,\mathbb{Z})$ も、位数有限の元で生成されるので、$H_1 = 0$ であるが、$SL(2,\mathbb{Z})$ は有限指数で有限生成自由群 F を含む。もちろん $H_1(F) \neq 0$ である。

3.5 3 次元多様体の JSJ 分解

群の分解について、3 次元多様体論の立場から、もう少し見てみる。有限生成群の自由積分解については、Grushko の定理 (3.1 章) は満足できる結果であり、3 次元多様体においては、プライム分解の理論とパラレルになっていることは述べた。大事な点は、分解の全体が同時に記述できた点である。全体を記述することで、自己同型で不変な対象を得る事が出来る。次に、3.2 章で $\mathbb{Z}$ に関する分解については、曲面群の場合を見た。これについては、群論とトポロジーの相関（すなわち、分解と単純閉曲線が対応）はあったが、それらの全てを一挙に記述することには困難があった。以下で、$\mathbb{Z}^2$ に関する分解を考えよう。これはトーラスの基本群なので、トーラスが余次元 1 の部分空間になる 3 次元多様体にモデルを求めるのは自然である。

M を向きの付いた 3 次元閉多様体で、プライムとする。すなわち、連結和には分解せず、従って基本群は自由積分解不能である。2 次元部分多様体 $N \subset M$ が本質的 (essential) とは N の基本群が M の基本群の部分群になっているときを言う。結論から言うと、M の全ての本質的トーラス

を記述することが成功していて、M の **JSJ 分解**と呼ばれる (1977). JSJ とは、理論の構築者 Jaco-Shalen, Johannson の頭文字である。

JSJ 分解を説明するために、まず、Seifert（ザイフェルト）多様体（または空間）と呼ばれるトーラスを豊富に含む 3 次元多様体を考える。向きの付いた曲面 S の基本群の $\mathbb{Z}$ に関する分解と、S 上の単純閉曲線 c の関係については述べた. ここでは、$M = S \times \mathrm{S}^1$ を考える. M をトーラス $c \times \mathrm{S}^1$ で切れば、ファンカンペンにより、M の基本群 G は $c \times \mathrm{S}^1$ の定めるトーラスの基本群 $\mathbb{Z}^2$ について分解する。この現象は、多様体 M が 曲面 S 上の S^1- バンドルでも同様である（向きつけの問題はあるが)。このとき、G は次のような完全系列を持つ. $\mathbb{Z}$ はファイバーである S^1 の基本群である。

$$0 \to \mathbb{Z} \to G \to \pi_1(S) \to 1.$$

これを一般化して、ある 2 次元オービフォールド (orbifold) S 上の S^1-バンドルの構造を持つ 3 次元多様体 M を「Seifert 多様体」と言う (cf. [小島])。この場合も、M の基本群 G について次のような完全系列が得られる。

$$0 \to \mathbb{Z} \to G \to \pi_1^{\mathrm{orb}}(S) \to 1$$

となる。$\pi_1^{\mathrm{orb}}(S)$ は orbifold の意味での基本群である (cf. [相馬]). 前と同様に、S 上の単純閉曲線 c とファイバーの積空間で M を切ることで、対応する部分群についての G の分解を得る。この場合、対応する部分群は $\mathbb{Z}^2$ とは限らず、例えば、c が orbifold の cone-特異点の周りのループなら、$\mathbb{Z}$ を有限指数の部分群として含む群である。

Seifert 多様体はトーラスを豊富に含む。底空間の orbifold 上の単純閉曲線とファイバーの円周の積によるトーラスである。3 次元多様体論の成果で、Seifert 多様体のトーラスは、ホモトピーをのぞいて、このようなものに限ることが分かっている（いくつか例外的なケースを除いて)。

準備が出来たので、3 次元多様体の JSJ 分解 (cf. [J]) を述べよう。

定理 3.4 (Jaco-Shalen, Johannson). *M を 3 次元多様体で、向き付け可能, コンパクト, 境界なし, プライムとする。このとき、有限個の互いに交わらない本質的なトーラス $\{T_i\}_i$ が存在して（存在しない場合も許す）次を満たす.*

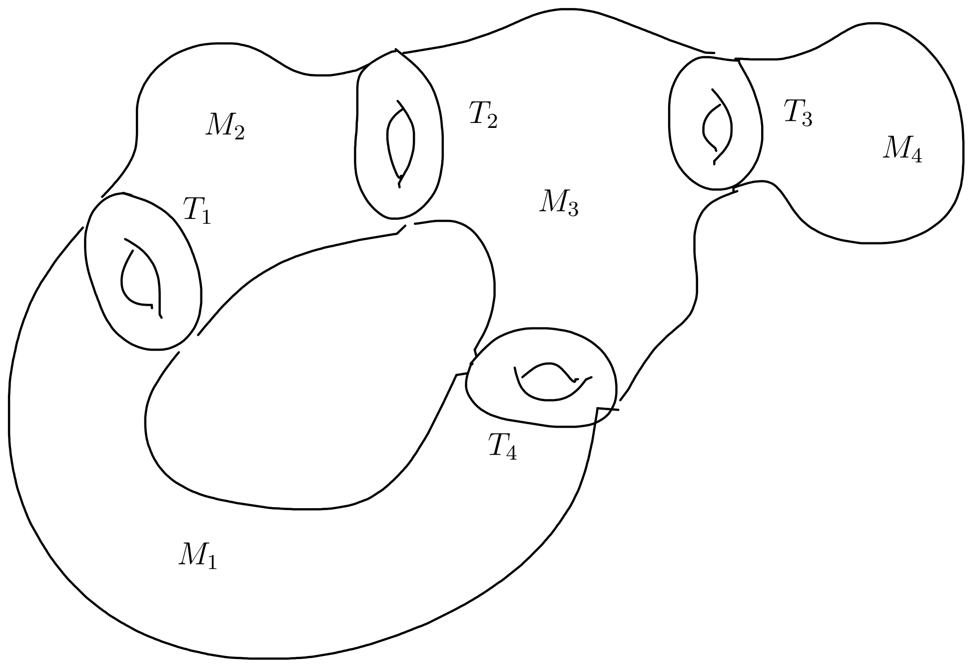
1. *M から $\{T_i\}_i$ を除いて得られる多様体の各連結成分 M_j は, 次のいずれかを満たす。*
   (a) M_j は Seifert 多様体.

(b) M_j の本質的なトーラスは、M_j の境界のトーラスにホモトピックなものに限る.（トーラスを含まないという意味で「atoroidal」と呼ばれる）.

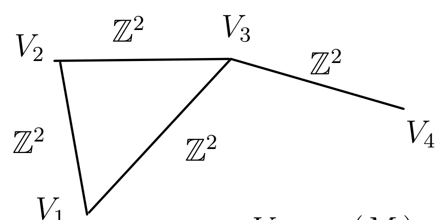
2. M の 本質的なトーラスは, 1.(a) の Seifert 多様体の一つのなかにホモトピック.

普通は、定理を満たすようなトーラスの族の最小集合を考え、その分解を **JSJ 分解**（「トーラス分解」とも言う）と呼ぶ。この分解により、M は (a) トーラスを豊富に含む部分と、(b) 全く含まない部分に分かれ, さらに、M の本質的なトーラスは、ある Seifert 多様体の中にホモトピックである。この意味で定理 3.4 は M の本質的なトーラスを全て記述している。定理を満たすトーラスの最小族は、M の自己同相変換を除いてユニークである。

M の JSJ 分解に現れるトーラス T_i で M を切ることにより、基本群 $\pi_1(M)$ のグラフ分解が得られる。辺をラベルする群はトーラスの基本群 $\mathbb{Z}^2$ であり、頂点には、各連結成分 M_i の基本群が対応する。さらに、基本群 $\pi_1(M)$ の $\mathbb{Z}^2$ についての分解の全ても、このグラフ分解から読み取れる（微妙な詳細を除いて）。すなわち、辺に対応する $\mathbb{Z}^2$ に関する分解か、または Seifert 多様体である M_i に含まれるトーラスに沿って M を切った場合に得られる $\mathbb{Z}^2$ 上の分解が、その全てである。



JSJ 分解



$V_i = \pi_1(M_i)$.

JSJ 分解は Thurston による 3 次元多様体の**幾何化予想**の前提を与えた。幾何化予想 (cf. [Kapo], [小島]) とは、コンパクト、向きつけ可能、境界なしの 3 次元多様体は、プライム分解と JSJ 分解で分解すれば、それぞれのピースに等質性または対称性の高い、ある完備なリーマン計量が入るというもので、さらに、そのリーマン計量のタイプは 8 つに限定されている。関連事項として、任意のコンパクト 2 次元多様体、すなわち曲面には曲率が $-1, 0, 1$ のいずれかのリーマン計量が入る。言い換えれば、そのリーマン普遍被覆が $\mathbf{H}^2, \mathbf{E}^2, \mathbf{S}^2$ であるという事実はよく知られている。これを、コンパクト 2 次元多様体の幾何化と言ってもよい。

Seifert 多様体は、上に述べた 8 つの標準的なリーマン計量のどれか 1 つを許容することが分かっている。さらに Thurston 自身の定理により、仮

に JSJ 分解のトーラスの族が空でなければ、(b) の各連結成分 M_i は、有限体積の完備な双曲多様体になることが分かっている。

従って、プライムな多様体に関して、幾何化予想で未解決の部分は、JSJ 分解のトーラスの族が空である場合で、かつ M が Seifert 多様体でない場合、言い換えれば、M 自身がタイプ (b) の場合である。加えて、基本群が $\mathbb{Z}$ に同型なら $M = \mathrm{S}^2 \times \mathrm{S}^1$ となることが分かっているのでよい。結局、次の二つの場合が未解決である。

1. M がプライムで、本質的トーラスを含まない. かつ、基本群が無限で $\mathbb{Z}$ に同型でない場合。
2. M の基本群が有限。

予想は、(1) の場合は、双曲的であり（M の普遍被覆が $\mathbf{H}^3$)、(2) の場合は M の普遍被覆が $\mathbf{S}^3$ に等長である (M が単連結の場合が Poincare 予想) というものである。ただし、(1) の場合でもトーラスとは限らない本質的な曲面を含む「Haken」と呼ばれる場合には双曲的であることが既に分かっている.

関連して、Seifert 多様体については次のような特徴付けが、Scott, Mess, Tukia, Gabai, Casson-Jungreis らの仕事を合わせて 1990 年代に得られている : M をコンパクトでプライムな 3 次元多様体とする。基本群が $\mathbb{Z}$ に同型な正規部分群を持てば、M は Seifert 多様体である (cf. [小島], [相馬]).

閉 3 次元多様体 M の JSJ 分解は、M の基本群を、トーラスの基本群 $\mathbb{Z}^2$ に関してグラフ分解していた。境界のあるコンパクトな 3 次元多様体 M を考えるには、部分多様体として本質的なシリンダーも考える必要があり、基本群の部分群では $\mathbb{Z}$ が対応する。M の連結和分解まで合わせて考えると、M の基本群の、単位群、$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^2$ についてのグラフ分解を与える。付け加えて、3 次元多様体の幾何化予想は、同等な主張が、多様体が向きつけ不能、境界ありの場合もあるが、詳細は省略する。

大事な点は、3 次元多様体をある標準的な方法で分解すれば、（予想としては）一つ一つのピースに標準的な幾何構造（リーマン計量）が入ることである。実際、幾何の存在によってトポロジーや群論の問題が著しく容易になることは多い。

3.6 群の JSJ 分解

3.5 章で述べた 3 次元多様体の JSJ 分解の類似、または背景である現象が有限表示群でも存在する。具体的には、一般の有限表示群 G について、$\mathbb{Z}^n(n \geq 0)$ に同型な部分群に関する全ての分解を記述する一つのグラフ分解 (G の **JSJ 分解**と呼ばれる) が存在することが知られている (E.Rips-Z.Sela[RS], B.Bowditch, M.Dunwoody-M.Sageev [DS], K.Fujiwara-P.Papasoglu [FP])。実際は、$\mathbb{Z}^n$ に同型な部分群だけでなく、slender な部分群についての分解の全てが記述される。ただし、「slender」な群とは、その任意の部分群が有限生成になる群のことである。群の JSJ 分解は、有限生成群の自由積分解を全て記述した Grushko の定理の著しい拡張とも考えられるし、3 次元多様体の JSJ 理論の群論での一般化とも思える。3 次元多様体において JSJ 理論が重要だったように、有限表示群の理論において今後 JSJ 分解の果たす役割は大きいだろう。

詳細は省くが、群の（$\mathbb{Z}^n, n \geq 0$ に関する）JSJ 分解を与えるグラフ分解において、辺をラベルする群はほとんど $\mathbb{Z}^n, n \geq 0$ で、頂点をラベルする群は、次の 2 つの場合があり、3 次元多様体の JSJ 分解と類似する（すなわち、Seifert 多様体と atoroidal な空間）：

1. ザイフェルト空間の基本群の一般化で、ザイフェルト空間の基本群が満たす完全系列において (3.5 章)、ファイバー群を $\mathbb{Z}^n, n \geq 0$ にした群（ザイフェルト空間は $n = 1$ の場合）。
2. $\mathbb{Z}^n, n \geq 0$ 上で分解しない群。

(2) については 3 次元多様体の場合は Thurston の幾何化予想（3.5 章）によって特徴付けがある（双曲的であるなど）わけだが、有限表示群ではそのような特徴付けはない。分解しないという意味で剛性の強い部分と考えられる。

いくつかの群に JSJ 分解を適用した結果を述べる。まず、閉曲面群, G, の場合は、自明なグラフ分解である。つまり 1 つの頂点だけからなるグラフで、G 自身がそれをラベルしていて、上の分類では (1) に入る ($n = 0$ である)。

一般に、自由積分解不能で、位数有限の元を含まない双曲群, G, に JSJ 分解を適用すると、G が曲面群でないとするなら、非自明なグラフ分解が得られる場合がある。その場合、辺は $\mathbb{Z}$ でラベルされ、頂点をラベルする群のうち、(1) のタイプは境界のある曲面の基本群（すなわち自由群）である。(2) のタイプは、$\mathbb{Z}$ 上分解しない群である（双曲群には $\mathbb{Z}^n, n \geq 2$

に同型な部分群がないので)。結局、JSJ 分解は双曲群を曲面群と、$\mathbb{Z}$ 上分解しない部分に、自然にグラフ分解する。ここで自然にとは、JSJ 分解の性質より、このグラフ分解が群の任意の外部自己同型で保たれることを言っている。特別な場合として、3 次元の閉双曲多様体 M の基本群 G は双曲群だが、この JSJ 分解は自明な分解で、ただ 1 つの頂点は G でラベルされ、タイプ (2) である。

コンパクトな 3 次元多様体の基本群に適用した場合は、多様体で得られている JSJ 分解が基本群に導くグラフ分解と同等である (微妙な細部を除いて)。しかし群の JSJ 分解の多様体への反映は他にはあまり知られていない。そもそも、Kneser 予想、すなわち、多様体の基本群が自由積に分解しているとき、多様体が、それを実現するような連結和に分解するかという問いが、5 次元以上では否定的に解決されている (Cappell, 1974). 一般に、4 次元多様体 M に関して、有限個の $\mathrm{S}^2 \times \mathrm{S}^2$ と M の連結和を考えれば（基本群は不変)、基本群の自由積を実現する連結和に分解することが知られている。しかし、基本群は自由積に分解するが、多様体は連結和に分解しない 4 次元閉多様体の例が構成され、Kneser 予想は否定的に解決されている (Kreck-Luck-Teichner, 1995).

群の JSJ 分解の理論には、いくつかのグループの貢献があり、4 種類のかなり異なったアプローチがある。Fujiwara-Papasoglu [FP] による証明は Bass-Serre 理論を高次元化した理論、すなわち、可縮な CW 複体への自由とは限らない群作用に関する、基本群と被覆空間の理論 (Stallings, Haefliger らによる．cf. III,[BrHae]）を使う。

3.7 境界のある 3 次元多様体

閉 3 次元多様体 M の基本群 G の分解を考えるとき、自由積分解の次に $\mathbb{Z}^2$ に関する分解を考えるのは自然であった。$\mathbb{Z}$ を基本群にもつ閉曲面がないからである。しかし、M に境界があれば、その中にシリンダー、$\mathrm{S}^1 \times [0,1]$ を考える事が出来、それにそって M を切れば、基本群の $\mathbb{Z}$ に関する分解, $G = A *_{\mathbb{Z}} B$, または $A*_{\mathbb{Z}}$, が得られる。このような状況での双曲構造のモジュライのコンパクト性を考えよう。

$\mathbf{H}^n$ を n 次元双曲空間とし、その向きを保つ等長変換群を $\mathrm{Isom}_+(\mathbf{H}^n)$ と書く。有限表示群 G の $\mathrm{Isom}_+(\mathbf{H}^n)$ への忠実で離散的 (faithful, discrete) な表現全体を $\mathrm{Hom}_{FD}(G, \mathrm{Isom}_+(\mathbf{H}^n))$ と書く。これを、$\mathrm{Isom}_+(\mathbf{H}^n)$ の元

による共役で割った次の空間を考える:

$$\mathrm{Hom}_{FD}(G, \mathrm{Isom}_+(\mathbf{H}^n))/\mathrm{conj}.$$

すなわち、2 つの元 $f, h \in \mathrm{Hom}_{FD}(G, \mathrm{Isom}_+(\mathbf{H}^n))$ について、ある元 $a \in \mathrm{Isom}_+(\mathbf{H}^n)$ があって、任意の $g \in G$ について、$f(g) = ah(g)a^{-1}$ なら $f \sim h$ とする。

Mostow 剛性 (定理 1.2) によれば、n 次元の閉多様体 M, $n \geq 3$, の基本群 G については、$\mathrm{Hom}_{FD}(G, \mathrm{Isom}_+(\mathbf{H}^n))/\mathrm{conj}$ は高々一点である。すなわち、一点のときが M が双曲多様体になるときである。

一方、種数 $g > 1$ の閉曲面 S の基本群 G については、$\mathrm{Hom}_{FD}(G, \mathrm{Isom}_+(\mathbf{H}^2))/\mathrm{conj}$ は S のタイヒミュラー空間であり、$\mathbf{R}^{6g-6}$ に同相である。特にコンパクトでない。

表現のモジュライのコンパクト性に関して、次元が 2 の場合と 3 以上の場合に差が出るのは興味深いが、これを群の分解の観点から見てみる。3 次元多様体にうめこまれた球面 S^2 が本質的とは、あるうめこまれた 3 次元球の境界にならないことである。次が知られている。

定理 3.5 (Thurston のコンパクト性定理). M を 3 次元コンパクト多様体 (境界があるかもしれない) とし、その基本群 G は、ほとんどアーベル群ではないとする。M は本質的な球面、シリンダー、トーラスを含まないとする。このとき、$\mathrm{Hom}_{FD}(G, \mathrm{Isom}_+(\mathbf{H}^3))/\mathrm{conj}$ はコンパクト。

もちろん、M に境界が無ければ、表現のモジュライはコンパクトであるだけでなく、高々一点である。この定理の仮定を群論から検討してみよう。$\mathrm{Hom} = \mathrm{Hom}_{FD}(G, \mathrm{Isom}_+(\mathbf{H}^3))/\mathrm{conj}$ と書く。2，3 次元多様体では、余次元 1 の部分多様体と群の分解はパラレルな現象であった。まず、定理の仮定を基本群の言葉に言い換える。既に一部述べたように、3 次元トポロジーの事実によれば、M が本質的な球面、シリンダー、またはトーラスを含むことは、基本群 G がある部分群 $C \simeq 1, \mathbb{Z},$ または $\mathbb{Z}^2$ について分解するのと同値である。

G が $1, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2$ のいずれかについて分解するとしよう。分解 $G = A *_C B$, または $A*_C$ において、$C \simeq \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2$ の場合、アーベル群なので、単位元でない元 $c \in C$ に関する代数的なデーンツイスト, $d_c \in \mathrm{Aut}(G)$, が空間 Hom に作用する。すなわち、$f \in \mathrm{Hom}$ は準同型 $f : G \to \mathrm{Isom}_+(\mathbf{H}^3)$ であるが、$f \circ d_c \in \mathrm{Hom}$ を考えればよい。G が自由積に分解している場合、すなわち、$G = A * B$ なら、例えばある元 $1 \neq a \in A$ についてのデーンツ

イスト $d_a \in \mathrm{Aut}(G)$ を考えればよい (定義は同じである。B の元だけ a で共役を取る)。これらのデーンツイストは、G の外部自己同型の元として自明な元でないだけでなく、無限位数の元である。(厳密には、例えば自由積の場合、A が可換なら d_a は内部自己同型なので、少し注意が必要)。これらが空間 Hom に作用するのだから、Hom のコンパクト性には定理 3.5 の仮定が必要そうであることが納得できる。

3.8 コンパクト化と R-ツリー

Thurston の定理 3.5 は、次のように群論的に一般化された。

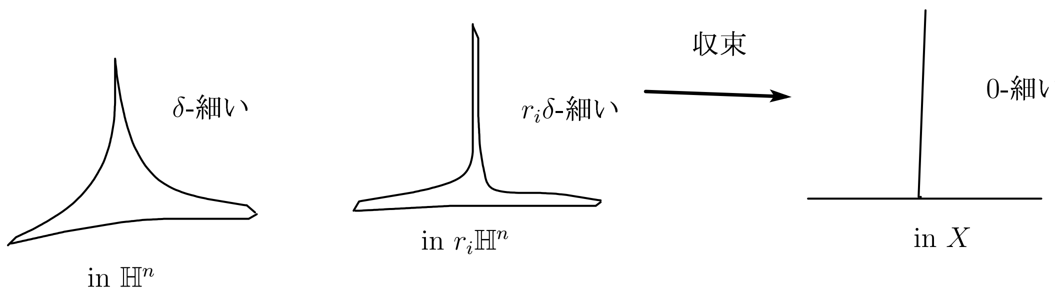
定理 3.6 (Bestvina-Feighn). G を有限表示群とし、ほとんどアーベル群でないとする。ある n について、$\mathrm{Hom}_{FD}(G, \mathrm{Isom}_+(\mathbf{H}^n))/\mathrm{conj}$ はコンパクトでないとする。このとき、G は、ほとんどアーベル群である部分群 C について分解する。

Thurston の定理 3.5 の状況では $C \simeq 1, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2$ のいずれかである。関連して、既に述べた双曲群の外部自己同型の無限性についての Bestvina-Paulin-Rips の定理 2.13 を思い出そう：G を位数有限の元を含まない双曲群とする。$\mathrm{Out}(G)$ が無限なら、G は 1 または $\mathbb{Z}$ について分解する。

これから、定理 3.5 と定理 2.13 の 2 つの現象が Gromov-Hausdorff 収束と $\mathbf{R}$-ツリーの理論を使って統一的に扱えることを説明したい。$\mathrm{Hom}_{FD}(G, \mathrm{Isom}_+(\mathbf{H}^n))/\mathrm{conj}$ を、Hom と書く。まず、空間 Hom をコンパクト化するために、Hom の元の無限列が与えられたとき、その極限を見つけたい。Hom の中で収束しない無限列 $f_i \in \mathrm{Hom}$ が与えられたとする。各 f_i は G の $\mathbf{H}^n$ への作用を与える。基点 $x \in \mathbf{H}^n$ を固定して、各作用 f_i による x の G-オービットを考える。f_i による作用の列が発散するので、オービットの列が発散する。すなわち、ある元 g について、$f_i(g)$ による x の像が、$\mathbf{H}^n$ の中で発散するということである。必要なら部分列を取って、これらを何かに収束させたいので、適当な定数列 $r_i > 0$ に関して空間 $\mathbf{H}^n$ の距離を定数倍した空間、$X_i = r_i\mathbf{H}^n$ を考える。G の $\mathbf{H}^n$ への作用 f_i は、自然に X_i への作用を与えるが、それも f_i と書く。発散する作用を収束させたいのだから、少なくとも $r_i \to 0$ は必要である。

$\mathbf{H}^n$ は δ-双曲的なので、X_i は $(r_i\delta)$-双曲的である。従って、X_i がある測地空間 X に Gromov-Hausdorff 収束すれば、$\lim_i r_i\delta = 0$ より、X は連結で 0-双曲的である。よって、X はツリーである。ただし、ここに現れ

るツリーは一般的に単体的なツリーではなく、**R-ツリー**と呼ばれるものである。定義を述べると、**R**-ツリーとは、連結な測地空間で、その任意の 2 点を結ぶ埋め込まれた道が、ただ 1 つ存在する（従って、それが測地線）ものである。同値な定義として、ループ（埋め込まれた部分集合で S^1 と位相同型なもの）がないと定義しても、0-双曲的であると定義してもよい。



構成の仕方から、G の X へのある等長作用が、作用の列 f_i の極限として得られる。定数列 r_i を注意深くとることで、この作用が自明でないようにできる（すなわち、G が X に共通の固定点を持たないこと）。要約すると、Hom のコンパクト化が次のように得られる。

$$\overline{\mathrm{Hom}} = \mathrm{Hom} \cup \{G \text{ の } \mathbf{R} - \text{ツリーへのある種の等長作用}\}$$

粗筋はこれで良いが、実際に証明に使うには、コンパクト化で現れるツリーへの群作用が満たす性質を特定する必要がある。それについては述べないで話を進めるために、その性質を (*) と書く。

自明に分かることは、もし何かの理由で G の **R**-ツリーへの作用で条件 (*) を満たすものがないことが分かれば、Hom はコンパクトである。そのような筋で議論するために、群 G のツリー T への作用で (*) を満たすものの存在のための必要条件や、存在した場合の分類などが、研究課題になる。この方面の顕著な結果に次がある。

定理 3.7 (Bestvina-Feighn, [BF2]). 有限表示群 G が **R**-ツリーに等長的に作用していて、共通の固定点がないとする。もし作用が stable なら、G は次の完全系列を満たすある部分群 H について分解する。

$$0 \to C \to H \to \mathrm{stab}(I) \to 1.$$

ただし、$I \subset T$ は、ある線分で、$\mathrm{stab}(I)$ はその固定化部分群。C は単位群または $\mathbb{Z}$ に同型。

作用がstableであることの定義は省略する。大事な事は、条件(*)が定理3.7の仮定を保証することである。従って、Homがコンパクトでない場合、極限として得られるGの$\mathbf{R}$-ツリーへの作用に定理3.7が適用でき、結論として、Gがある部分群H上分解することが分かる。さらに、この場合、双曲幾何の基本的事実からstab(I)が、ほとんどアーベル群であることが分かる。このことをThurstonのコンパクト性定理（定理3.5）の状況に、すなわち$\mathbf{H}^3$の場合に適用すると、Homがコンパクトでなければ、$H \simeq 1, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2$のいずれかについて、$G$が分解すると結論される。一方、$M$に関するトポロジカルな仮定(本質的な球面、シリンダー、トーラスがないこと）から、基本群Gが$1, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2$について分解しないことが保証されていたので矛盾が導かれて、従ってHomのコンパクト性が結論される。

同じ路線で双曲群のOut(G)についてのBestvina-Paulin-Ripsの定理2.13も見直そう。Gを双曲群として、Out(G)が無限とする。Gの生成元を固定して、そのCayleyグラフΓを考える。Out(G)が無限なので、そこから無限列f_iを取る。GはΓに等長的に作用していたが、その作用をϕと書く。この標準的な作用にf_iを合成することで、GのΓへの作用の列, ϕ_i, ができる。すなわち、$\phi_i = \phi \circ f_i$である。前のHomの場合と同じように、f_iがOut(G)の無限列であることから、作用の列ϕ_iは発散する。従って、それを収束させるために、Γを適当な定数r_iで縮小した空間$r_i\Gamma$を考える。定数r_iはその逆数$1/r_i$が、およそ作用の発散具合を表している。$r_i \to 0$より、$r_i\Gamma$のGromov-Hausdorff収束した空間は、0-双曲的なので$\mathbf{R}$-ツリー、T、であり、TへのGの等長作用が作用の列ϕ_iの極限, ϕ_∞, として得られる。定数列r_iを適当にとり、作用ϕ_∞が固定点を持たないように出来る。

この状況にBestvina-Feighnの定理3.7が適用でき、結局、Gが定理3.7の結論に現れるような部分群Hに関して分解する。さらにGが双曲群であることから、stab(I)は$1, \mathbb{Z}$に同型で、従ってHも$1, \mathbb{Z}$しかありえない（$\mathbb{Z}^2$は双曲群Gの部分群にはならない)。よって定理2.13の結論が導かれた。

ところでThurstonのコンパクト性定理の証明を群の$\mathbf{R}$-ツリーへの作用から証明しようとしたのは、Morgan-Shalenである(80年代後半)。ただし、ここで説明したGromov-Hausdorff収束で双曲空間と作用の列をツリーへの作用に収束させる議論ではなく、3次元多様体の中のlaminationという構造を使い、そのleaf空間に着目して$\mathbf{R}$-ツリーへの作用を考えた。

これは、双曲曲面の単純閉曲線のリフトの dual が単体的ツリーになり、曲面群の閉曲線に関する分解の Bass-Serre ツリーを与える事の類似である。彼らの仕事は、群のツリーへの作用の理論の重要性、特に双曲幾何との関連で、を認識させる大きなきっかけになった。その仕事で、**R**-ツリーに等長的かつ自由に作用する有限生成群 G の分類が予想として提出された。それを肯定的に解決したのが次の Rips の大定理である。

定理 3.8 (Rips, 1991). 有限生成群 G が **R**-ツリー, T, に等長的かつ自由に作用するなら、G はいくつかの自由アーベル群と、いくつかの曲面群の自由積である。

結論に現れる群が **R**-ツリーにこのような作用をすることは分かるので、この定理は完全な分類を与えている。T が単体的なツリーなら、Bass-Serre 理論により、G は自由群である。また、Bestvina-Feighn の定理 3.7 を適用するなら、作用が自由なので $\mathrm{stab}(I) = 1$ であるから、G は $1, \mathbb{Z}$ のいずれかについて分解することは分かる。曲面群が $\mathbb{Z}$ について分解することは、言うまでもないだろう。

定理 3.8 の結論を Bass-Serre 理論を使って言い換えるなら、G がある単体的ツリーに作用し、各辺の固定化部分群は単位群で、各頂点の固定化部分群は自由群または曲面群になる。どのような条件の下、群 G の **R**-ツリーへの非自明な等長作用の存在から、G の単体的ツリーへの非自明な等長作用の存在が導かれるかは興味深い問題である。

参考文献

[BGS] Werner Ballmann; Mikhael Gromov; Viktor Schroeder. “Manifolds of nonpositive curvature”. Progress in Mathematics, 61. Birkhauser. 1985.

[BF] M.Bestvina, M.Feighn. A combination theorem for negatively curved groups. J. Differential Geom. 35 (1992), no. 1, 85–101.

[BF2] M.Bestvina, M.Feighn. Stable actions of groups on real trees. Invent. Math. 121 (1995), no. 2, 287–321.

[BrHae] M.R.Bridson, A.Haefliger. “Metric spaces of non-positive curvature”. Springer, 1999.

[DS] Dunwoody, M. J. Sageev, M. E. JSJ-splittings for finitely presented groups over slender groups. Invent. Math. 135 (1999), no. 1, 25–44.

[Ep] D.B.A.Epstein, W.Thurston et al. "Word processing in group theory". Jones and Bartlett Publishers, 1992.

[FP] K.Fujiwara, P.Papasoglu, JSJ-decompositions of finitely presented groups and complexes of groups. preprint, 1998.

[深谷] 深谷賢治.「双曲幾何」. 岩波講座現代数学への入門. 岩波書店. 1996.

[G;poli] M.Gromov, Groups of polynomial growth and expanding maps. IHES Publ.53(1981). 53-73.

[G;hyp] M.Gromov, Hyperbolic groups, in "Essays in group theory", 75-263. MSRI Publ. Springer, 1987.

[G;asymp] M.Gromov. Asymptotic invariants of infinite groups. in "Geometric group theory, Vol. 2 ", 1–295, LMS Lecture Note Ser. 182. 1993.

[G;ran] M.Gromov. Random walk in random groups. GAFA 13 (2003), 73–146.

[He] John Hempel. 3-Manifolds. Ann. of Math. Studies, No. 86. Princeton University Press. 1976.

[J] W. Jaco, Lectures on Three-manifold Topology, Regional Conference Series in Mathematics 43 (1981), AMS.

[Kapo] Michael, Kapovich. "Hyperbolic manifolds and discrete groups". Progress in Mathematics, 183. Birkhauser, 2001.

[小島] 小島定吉.「3次元の幾何学」. 朝倉書店. 2002.

[LSc] R.C.Lyndon, P.E.Schupp. "Combinatorial group theory". Springer, 1977.

[Mo] Mostow, G. D. Strong rigidity of locally symmetric spaces. Annals of Mathematics Studies, No. 78. Princeton University Press, 1973.

[大鹿] 大鹿健一, 「離散群」, 岩波講座現代数学の展開, 岩波書店. 1998.

[RS1] E.Rips, Z.Sela. Structure and rigidity in hyperbolic groups. I. Geom. Funct. Anal. 4 (1994), no. 3, 337–371

[RS] E.Rips, Z.Sela, Cyclic splittings of finitely presented groups and the canonical JSJ decomposition. Ann. of Math.146 (1997). 53-109.

[S] Z.Sela. The isomorphism problem for hyperbolic groups. I. Ann. of Math. (2) 141 (1995), no. 2, 217–283.

[Se] J-P.Serre, “Trees”, 1980, Springer.

[Sh] H. Short and others, Notes on word hyperbolic groups, in ”Group Theory from a Geometrical Viewpoint” edit by H. Ghys and others, World Scientific, 1991, 3-63.

[相馬] 相馬輝彦. 「3 次元多様体」。出版予定。

[St] J.R.Stallings, On torsion-free groups with infinitely many ends, Ann. of Math.88 (1968). 312-334.