数学セミナー 2019 年 7 月号掲載・数理のクロスロード
連載●第 19 回

かたちと動きの数理基盤
(2) デザインの数学

鍛冶静雄
◎九州大学マス・フォア・インダストリ研究所／ JST さきがけ

1．形状陶冶

トポロジストとは「ドーナツをマグカップに変える幾何学者」[1)]であるが、実際にインターネットで「トポロジー」と検索すると、ドーナツの形をした図形がだんだんマグカップに化けてゆく動画が見つかる。今回はコンピューター上で形を自在に操る術の一端を紹介する。その技術は映像制作[2)]だけでなく現実世界の形状をデザインするのにも使われている。最近では、マウスや椅子といった身の回りの品々から船や飛行機、建築物に至るまで、形状設計に **CAD**(computer-aided design) を用い、**CAE**(computer-aided engineering) で性能シミュレーションを行い、3D プリンタで試作し、**CNC 工作機械** (computer numerical control machine) で製造するという、一連のプロセスをコンピューターで処理する環境が整いつつある。最初にコンピューター上のデータとして形状をデザインすれば、それを後の工程まで使い回せるのである。

さて、形状をコンピューターで取り扱う上で、まずコンピューターは有限の対象しか扱えないということを考えねばならない。有限個のパラメーターで表現される曲面のクラスとして、多面体、ベジエ曲面、NURBS 曲面、サブディビジョンサーフェスといったものが知られている。ここでは最も簡単な、三角形の面のみで構成された多面体、いわゆる**三角形メッシュ**を取り上げよう (図 1)[3)]。

1)　コーヒーを定理に変えるのが数学者、ドーナツとコーラをコードに変えるのがプログラマーである。

2)　CG と数学の関わりについては安生健一氏の過去の連載 [1] を参照されたい。

3)　タコの形状は研究などでよく使われるモデルを配布している AIM@SHAPE Shape Repository のものを利用。

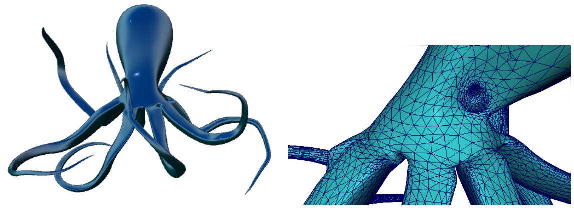

図 1　左: 32946 枚の 3 角形の面、49493 本の辺、16518 個の頂点からなる三角形メッシュとして表現されたタコ 右: 一部分の拡大

任意の多面体は、三角形でない面を適当に分割してやることで三角形メッシュにできるので、面が全て三角形であることを要請しても実用上それほど大きな制約にはならない。

形状デザインにおいてもっとも基本的なのは、ある初期形状から始めて、人間の与える指示に従って新しい形を作り出す**形状変形**である。粘土のかたまりを手で造形してゆくのも、コンピューターを使いこそしないがこの意味での形状変形であるといえる。全ての頂点の位置を人間が指示するのであればアルゴリズムの出番はないから、コンピューターを使うことで人間の手間をなるべく減らしつつ、作り手の意図に沿った形状を実現したい。例えば図 2 のような変形を、タコの足をつまんでクルッとまわすだけで直感的に達成できると嬉しい[4)]。つまり数学的には、疎な入力を補間する問題といえる。ひとつのやり方として、バネ質点系など物体を形作る材料の物理モデルを仮定するという方法があるが、計算量の多いシミュレーションを行う必要があったり、思い通りの形にするのが難しかったりというデメリットがある。そもそも、せっかくコンピューター上で形状を扱うのであるから、現実世界の物理法則に囚われる必要はなく、数学的な観点からもっと自由な造形法を提案できないであろうか。

2．幾何＝トポロジー＋計量

形状を表現するデータ構造として三角形メッシュを採用すると、トポロジーと量的情報を切り分けて管理でき

4)　人間やセンサーからの入力をどのような形で受け取るか、それをどうやってアルゴリズムに組み込んで処理するか、といった外界とコンピューターを繋ぐインターフェースは、デザインに限らずもっと数学を活かしうる舞台であると筆者は考える。

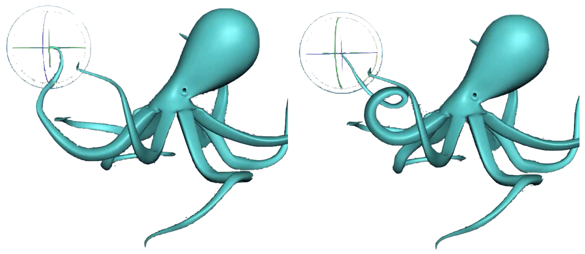

図 2　左: 入力形状と操作ハンドル 右: マウスでハンドルを操作してメッシュを変形

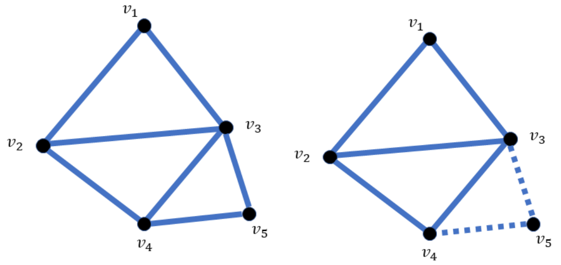

図 3　左: 三角形メッシュM 右: M の部分三角形メッシュは、そこに含まれる面を向きづけに注意して足し合わせた $C_2(M)$ の元 $(v_1, v_2, v_3) + (v_3, v_2, v_4)$ と同一視できる

るという利点がある。頂点集合がV である三角形メッシュのトポロジーは、どの３頂点が面をなすかを指定する面集合 F で記述される。つまり、３つの頂点 $v_1, v_2, v_3 \in V$ が面をなすとき、$\{v_1, v_2, v_3\} \in F$ とする。辺集合 E は面の元の２元からなる部分集合の全体として定まる[5)]。三角形メッシュの３次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内での実現は、その頂点座標を指定する写像 $f : V \to \mathbb{R}^3$ で与えられるが、座標をはじめとして、三角形メッシュの上で定義された量を単体的コチェインとして扱うのが今回の話のミソである。少し長くなるがその定義を述べておこう。単体的コチェインは、単体的チェインの双対として定義されるので、まず単体的チェインの定義から説明する。

面 $\{v_1, v_2, v_3\} \in F$ に対して、その一つの順列 (たとえば (v_1, v_3, v_2)) を有向面と呼ぶことにする。三角形メッシュ$M = (V, E, F)$ の全ての有向面を基底として生成される $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間を考え、さらに同じ面に対する二つの有向面で奇置換になっているものを異符号

5)　要するに、三角形メッシュとは pure な２次元単体複体で、極大単体により指定される。

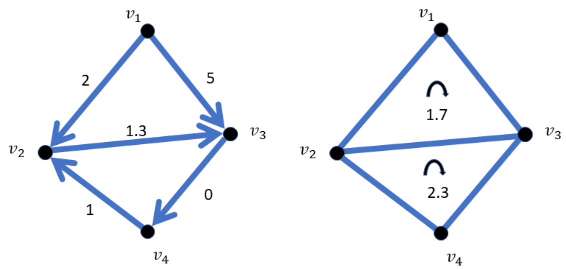

図 4　左: 単体的 1-コチェインの例 右: それを外微分して得られる単体的 2-コチェイン

とする関係で割った商ベクトル空間 $C_2(M)$ を考える。定義を書くとややこしいが、図３の例では、$C_2(M)$ は $(v_1, v_2, v_3), (v_2, v_3, v_4), (v_3, v_4, v_5)$ という３つの有向面 (の代表元) で生成される３次元実ベクトル空間であり、例えば $(v_1, v_2, v_3) + (v_1, v_3, v_2) = 0$ が成り立つ。$C_1(M)$ は同様に有向辺で生成される商ベクトル空間、$C_0(M)$ は頂点で生成されるベクトル空間とする。便宜的に、$k \neq 0, 1, 2$ のときは $C_k(M) = 0$ と定める。これらのベクトル空間は、**境界作用素**という線型写像 $\partial_i : C_i(M) \to C_{i-1}(M)$ を通して、M の組み合わせ構造を反映する形で関連づいている。境界作用素は、有向面に対して $\partial_2((v_p, v_q, v_r)) = (v_q, v_r) - (v_p, v_r) + (v_p, v_q)$、有向辺に対して $\partial_1((v_p, v_q)) = (v_q) - (v_p)$、頂点に対して $\partial_0(v_p) = 0$ とし、それを線型に拡張することで定める。$(C_i(M), \partial_i)$ $(i \geqq -1)$ を $(C_*(M), \partial)$ と書いて[6)]、M の**単体的チェイン複体**と呼ぶ。$C_i(M)$ の双対ベクトル空間 $\mathrm{Hom}(C_i(M), \mathbb{R})$ を $C^i(M)$ と書くと、境界作用素の双対 $d_i : C^i(M) \to C^{i+1}(M)$ が得られ、$(C^*(M), d)$ を M の**単体的コチェイン複体**と呼ぶ。$C^i(M)$ の元は**単体的 i-コチェイン**といい、d_i は**外微分作用素**と呼ばれる。これも一見ややこしい定義に見えるが、図４を見ればわかるように素直な構成である。$C^0(M), C^1(M), C^2(M)$ はそれぞれ頂点、有向辺、有向面の集合上で定義された関数と同じである。特に $\mathbb{R}^3$ へ埋め込まれた三角形メッシュの頂点座標は $C^0(M) \otimes \mathbb{R}^3$ の元と思えることに注意する。

三角形メッシュM の部分メッシュN は図３右の要領で $C_i(M)$ の元とみなせるが、単体的コチェイン $f \in C^i(M)$ による単体的チェイン $N \in C_i(M)$ の像を、f を N の上で

6)　∂ の添え字は省略する。次に出てくる d, δ も同じ。

積分するという気持ちで $\int_N f$ のように書いてみると、∂ と d が双対であるという関係はまさにストークスの定理

$$\int_N dh = \int_{\partial N} h \quad (h \in C^{i-1}(M), N \in C_i(M))$$

のアナロジーになっている。単体的コチェインを用いて、三角形メッシュ上で定義された量の "微積分" を展開し、多面体の幾何を多様体のアナロジーを通して調べるのが、**離散微分幾何**[7]と呼ばれる分野で研究されている **Discrete Exterior Calculus** である。

さて、三角形メッシュのトポロジーの情報は単体的チェインで記述されることを見たが、次に内在的な幾何的情報として計量を考えよう。三角形メッシュ M に対して、単体的コチェイン上の内積

$$g_i : C^i(M) \otimes C^i(M) \to \mathbb{R} \quad (i = 0, 1, 2)$$

を M の**計量**という[8]。計量が定まっているとき、外微分の随伴 $\delta : C^i(M) \to C^{i-1}(M)$ が次式で定義される:

$$g_i(\phi, d\psi) = g_{i-1}(\delta\phi, \psi) \quad {\scriptstyle (\phi \in C^i(M), \psi \in C^{i-1}(M))}.$$

計量とトポロジーを両方便利にまとめてくれる道具として、**ラプラシアン** $\Delta_{(M,g)}$ を次で定める:

$$\Delta_{(M,g)} = d \circ \delta + \delta \circ d : C^i(M) \to C^i(M).$$

定義が続いたが、これで役者は出揃ったので、次章ではそれらが活躍する形状変形アルゴリズムを紹介しよう。

3. 形状変形アルゴリズム

図 2 のように入力形状をマウスで操作して変形する問題を考える。ここでは [4] をもとにしたアルゴリズムを取り上げる。具体的な問題設定として、初期形状である三角形メッシュ M の $\mathbb{R}^3$ での実現 $f_0 : V \to \mathbb{R}^3$ が与えられ、マウス操作によって M の少数の頂点 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ にそれぞれ変換 $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathrm{GL}^+(3)$ が指定されたとき、変形後の形状を表す実現 $f_1 : V \to \mathbb{R}^3$ を出力するということを考える。ここで $\mathrm{GL}^+(3)$ は、$\mathbb{R}^3$ の非退化な線型変換で向きを保つもの全体のなす群である (つまり 3 次実正方行列で行列式が正のもの全体)。マウスで指示した頂点の周りでは局所的に指定された変形に沿うように、大域的な変形を構成するという問題である。図 2 では、ひとつの足先の頂点 v_1 に回転変換 A_1 が設定されているのに加えて、他の足や胴の頂点 $v_2, \cdots, v_7$ に恒等変換が設定されている。

アルゴリズムの第一ステップでは、$A(v_i) = A_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ を満たすように全ての頂点 v に $\mathrm{GL}^+(3)$ の元 $A(v)$ を指定する。つまり、A_i を補間して $A : V \to \mathrm{GL}^+(3)$ を構成する。ここでまず多面体上での補間の感覚を掴む例として、熱の定常状態を取り上げてみよう。図 5 左では、v_1 を 100 度に、$v_2, \cdots, v_7$ を 0 度に保った時の熱分布の定常状態 $u \in C^0(M)$ という気持ちで、**ラプラス方程式**

$$\Delta_{(M,g)} u = 0, u(v_1) = 100, u(v_i) = 0 \ (2 \leqq i \leqq 7)$$

の (最小自乗の意味での) 解を図示している。見かけ上は微分方程式であるが、ただの線型方程式であることに注意する。ちなみにもっと単純な関数の補間として、重力やクーロン力と同様に $\mathbb{R}^3$ の距離の自乗の逆数で加重平均を取る方法があるが、これは形状の幾何を反映せず図 5 右のようになり、形状変形に用いると、一つの足だけ操作したくても隣の足までつられて動いてしまって都合が悪い。

今補間して得たい写像の値域は $\mathrm{GL}^+(3)$ という空間であった。値域が $\mathbb{R}^N$ の形をしていれば上記のラプラス方程式が使えるので、$\mathrm{GL}^+(3)$ をユークリッド空間でパラメトライズしてやろう。行列の指数写像を用いることで、

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{Sym}(3) & \to & \mathrm{GL}^+(3) \\ (X_1, X_2) & \mapsto & \exp(X_1)\exp(X_2) \end{array}$$

という全射が構成できる[9]。ここで $\mathfrak{so}(3)$ は 3 次の実反対称行列全体、$\mathfrak{Sym}(3)$ は 3 次の実対称行列全体の成すベク

7) このアナロジーから、離散微分幾何の文脈では単体的コチェインを離散微分形式と呼ぶ。

8) 三角形メッシュが $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれているとき、$\mathbb{R}^3$ の計量から自然に M に誘導される計量を考えたくなるが、その具体的な導出に関しては [2] を参照。

9) 要するにリー環からの指数写像だが、$\mathrm{GL}^+(3)$ はコンパクトではないので指数写像は全射とはならないからカルタン分解をはさんでいる。この写像とその逆が高速に計算できることを [5] で示している。なお、共著者の落合啓之氏には本稿の原稿全般にもコメントを頂いた。

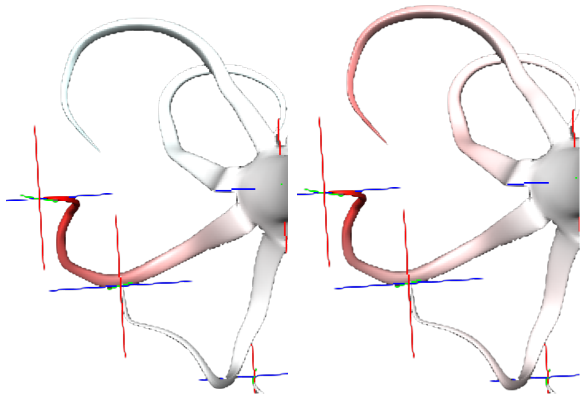

図 5　左: ラプラス方程式による関数補間 右: $\mathbb{R}^3$ の距離の自乗の逆数による関数補間。色の濃さが温度の高さを示す。隣の足への影響の仕方に着目すると、左では形状を反映した内在的な補間になるのに対して、右では形状に関係なく外側の空間における補間となることが見て取れる。

トル空間である。上三角成分を見ることで、$\mathfrak{so}(3) \cong \mathbb{R}^3$、$\mathfrak{Sym}(3) \cong \mathbb{R}^6$ であるから、$\mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{Sym}(3) \cong \mathbb{R}^9$ と同一視してしまおう。これを用いると、ラプラス方程式

$$\Delta_{(M,g)} X = 0, \varphi(X(v_i)) = A_i \ (1 \leqq i \leqq n)$$

の解として $X \in C^0(M) \otimes \mathbb{R}^9$ が得られる。これでめでたく各頂点 v で $A(v) = \varphi(X(v)) \in \mathrm{GL}^+(3)$ が定まった。さらに各有向辺 (v', v) に

$$\varphi\left((X(v) + X(v'))/2\right)\left(f_0(v) - f_0(v')\right) \in \mathbb{R}^3$$

を対応させることで $\xi \in C^1(M) \otimes \mathbb{R}^3$ が定まる。

アルゴリズムの次のステップとして、変形後の各辺の方向が ξ により規定され、

$$f_1(v) - f_1(v') = \xi\left((v', v)\right) \tag{1}$$

となるように実現 $f_1 : V \to \mathbb{R}^3$ を構成したい。しかし、一般に (1) の両辺を完全に一致させることはできない。$f_1 \in C^0(M) \otimes \mathbb{R}^3$ と見るとき、$f_1(v) - f_1(v')$ は外微分 $df_1((v', v))$ の定義そのものであるが、$df_1 = \xi$ となる f_1 が常に存在するとは限らないからである。そこで、両辺の差がなるべく小さくなるような f_1 を、ξ を d の像が張る空間 $\mathrm{Im}(d)$ へ射影することで選ぼう。随伴写像の定義と $d \circ d = 0$ から**ホッジ分解**と呼ばれる直交分解

$$C^i(M) \cong \mathrm{Im} d \oplus \mathrm{Im} \delta \oplus \mathrm{Ker} \Delta_{(M,g)}$$

の存在が簡単に示せるが、ξ の $\mathrm{Im} d$ 成分 ξ^d を取り出して、$df_1 = \xi^d$ なる f_1 を所望の変形後の実現とすれば良い[10)]。以上のアルゴリズムは複雑に見えるが、どのステップも (疎な) 連立一次方程式を解いているだけであるので計算としては軽く、ノート PC でもリアルタイムにタコを操ることができる。

紙数が尽きてしまい、ドーナツをコーヒーカップに変えることは叶わなかったが、一般に、複数の形状を滑らかに補間する技術は**モーフィング**や**形状ブレンディング**と呼ばれ、今回紹介したのと同様のアイデアを用いたアルゴリズムを [3] で扱っている。

ド・ラームが特異コチェインの滑らかな近似として微分形式を用いたのといわば逆向きに、離散微分幾何ではメッシュ上で解析を展開するために単体的コチェインを微分形式のアナロジーとして用いる。温故知新とも言える数学が、かたちのデザインに応用しうるということをおもしろく感じていただけたなら幸いである。

参考文献

[1] 安生健一, 連載『CG につながる数学』『続・CG につながる数学』, 数学セミナー 2009 年 4 月–9 月号、2010 年 10 月–2011 年 3 月号

[2] M. Desbrun, E. Kanso, and Y. Tong, *Discrete Differential Forms for Computational Modeling*, Discrete Differential Geometry, 287–324, A. Bobenko et al. (eds.), Birkhäuser Basel, 2008.

[3] S. Kaji, *Tetrisation of triangular meshes and its application in shape blending*, Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis III, pp. 7–19, Springer-Singapore, 2016.

[4] S. Kaji and G. Liu, *Probe-type deformers*, Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis II, pp. 63–77. Springer-Japan, 2015.

[5] S. Kaji and H. Ochiai, *A concise parametrisation of affine transformation*, SIAM J. Imaging Sci., 9(3), 1355–1373 (2016)

[かじ　しずお]

10)　そのままでは解 f_1 に不定性があるが、連結成分ごとに重心を固定するといった制約のもとで一意に定まる。