

かたちと動きの数理基盤 (1) リンク万華鏡

鍛冶静雄

◎九州大学マス・フォア・インダストリ研究所/JST さきがけ

1. 産業革命と数学とのリンク

突然だが、ワイパーの動作原理を考えてみたことはあるだろうか。ワイパーは扇型を往復しながら描くが、折り返すたびにモーターを逆回転させているのはエネルギー効率が悪い。動力源として一定の速度で回転するモーターのみを使い、あのような動きを生むことは可能であろうか。実は、図1のように非常に単純な、純粹に機械式の仕組みで実現できるのである。ワイパーは、**四節リンク**と呼ばれる機構の一例となっている。一般に、複数の剛体が可動式のジョイントで繋がれた機械を**リンク機構** (linkage) と呼ぶ。もっとも単純なリンク機構としては、いわゆるてこがあげられるが、動力伝達の仕組みとして、また折りたたみ構造として、身の回りや自然界に多くの例を見つけることができる(図2)。特にジェームズ・ワットの発明したワットリンクは、レムニスケートの一部を往復する運動(ほぼ線分上の往復運動とみなせる)を回転運動に変換し、蒸気機関の実用化において重要な役割を果たした¹⁾。

図版は権利の関係で省略

<https://monoist.atmarkit.co.jp/mn/articles/1110/25/news009.html> 参照

図1 ワイパーの仕組み

リンク機構の数学的な解析は、オイラーやシルベスター、サーストンといった数学者たちを時代を超えて惹

1) 回転運動を真に直線運動に変換するリンク機構は、ワットリンクより80年後のポースリエーリプキン (Peaucellier-Lipkin) リンクの発明を待たねばならなかった

きつけた。中でも、19世紀にケンペ (Kempe²⁾) によって誤った証明とともに提唱され、21世紀にカポヴィチ (Kapovich) とミルソン (Millson) によって完全な証明が出版された、「どんなサインも、それをなぞるリンク機構を作れる」という意味の定理は、その研究の奥深さを物語るよい例である³⁾。

図版は権利の関係で省略

図2 左:パンタグラフ, 中央: 譜面台, 右: 魚の顎 [9]

2. 配位空間

与えられたリンク機構に対して、その**配位空間**と呼ばれる位相空間を考えることができる。大雑把に言って、そのリンク機構の取り得る状態全体からなる空間である。例えば、長さが l_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) の n 個の線分状の剛体がジョイントで数珠つなぎに接合された n 節リンクの、 d 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^d における配位空間は、

$$\{(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}^d, x_n = x_0, \\ |x_{i+1} - x_i|^2 = l_i^2 \ (i = 0, 1, 2, \dots, n-1)\}$$

という集合を \mathbb{R}^d の合同変換群で割った商空間として定義される。商空間を考えるのは、たいていの場合興味があるのは機構が形を変える動きで、全体の剛体運動は除きたいからである⁴⁾。より一般には、多節リンクは距離グラフとしてモデル化され、その配位空間は適当な距離空間 X への等長はめ込み全体を、 X の等長変換群で割った空間として定義される⁵⁾。

リンク機構の解析における問題の多くは、その配位空間の言葉で定式化できる。配位空間上のある点の近傍で次元が定義されるとき、それは機械工学的にはそ

2) 4色定理の誤った証明でも有名

3) その歴史と正確なステートメントについては [2] を参照

4) 猫が2階からどんな姿勢で落ちようがちゃんと着地する、**ネコひねり問題** (falling cat problem) を考える際は、大域的な合同変換にも興味がある。

5) 配位空間をどう定義すべきかは考えたいコンテキストに依存するので、他の定義を採用する場合もある。例えば、剛体同士が衝突してはならない、という条件を課して考えることはロボットアームの設計など実用上も重要である。

の点に対応する状態での動きの自由度を表す。ロボットアームではさまざまなタスクをこなすために高い自由度が必要だが、動力伝達では自由度が1であり動きが“ガタつかない”ことが望ましい。一方、配位空間の2点が与えられたとき、それらを繋ぐ道を構成することは、二つの状態を連続的に遷移させる方法を与えることであるから、ロボット工学におけるモーションプランニングの問題に対応する。もし2点が異なる連結成分に属するならば、いったんジョイントを外して分解して組み直さなければならぬので、連結成分の判定も問題となる。自由度やモーションプランニングに関しては、実用上大切であると同時に、数学的にも難しい問題が数多く知られている。一般の多節リンクの \mathbb{R}^1 における配位空間が空であるかという問いでさえ、計算量的に複雑な問題に属する。例えば頂点において角度を自由に変えられる n 角形を直線状に折りたたむことを考えると、その折りたたみ方ひとつひとつは、この n 角形に対応する n 節リンクの \mathbb{R}^1 における配位空間の1点に対応する。それは辺の集合を長さの和が等しい二つの部分集合に分けることと同じである。そういう分け方が存在するかという問いは、整数集合分割問題という有名なNP完全問題である。

3. カライドサイクル

カライドサイクル (Kaleidocycle) と呼ばれる折り紙 (図3左) も、リンク機構の一種とみなすことができる。言葉や図では説明しづらいのでぜひ自分で折ってみてほしいのだが⁶⁾、クルクルと回り続ける不思議な形状である。エッシャーの図柄をカラーでプリントした型紙が詰まった [10] や、カライドサイクルに加えていくつかの可動折り紙を扱った [1] は工作として楽しく、公開講座などでも重宝する。

n 個の合同な四面体が対辺をヒンジとして環状に連なったリンク機構を、ここでは n -カライドサイクルと呼ぶことにしよう。カライドサイクルの動きを解析す

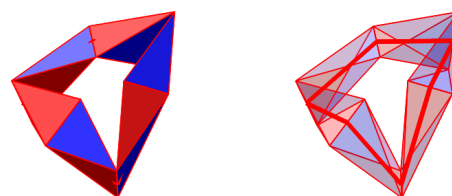


図3 左:6-カライドサイクル, 右: その中心多角形との関係 (後述)

るのに、すべての頂点をジョイントとみなした多節リンクと考えてもよいが、**剛体ヒンジ機構** [5] の一種と見る方が簡単である。すなわち、ヒンジをそれを延長してできる \mathbb{R}^3 内の直線と同一視し、隣り合うヒンジに対応する直線の位置関係が、間に挟まれた剛体である四面体によって固定された形状とみなす。その配位空間を考えたいのだが、直線の配置をパラメトライズするのは面倒があるので、直線に向きを入れて長さ1のベクトルの配置を扱う方が都合がよい。そうしても動きの解析をする上では同じである。すなわち、 $\nu \in (0, \pi)$ と $s \in \mathbb{R}$ を定数として、カライドサイクルの配位空間を、 b_0, b_1, \dots, b_n ($b_i \in \mathbb{R}^3$) に関する連立二次方程式

$$\begin{aligned} |b_i|^2 &= 1, \langle b_i, b_{i+1} \rangle = \cos \nu \quad (0 \leq i < n), \\ b_n &= \pm b_0, \sum_{i=1}^n ((b_i \times b_{i-1}) + s b_i) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

の実数解の空間を直交群 $O(3)$ で割った商空間として定める。ここで $\langle b_i, b_{i+1} \rangle$ は \mathbb{R}^3 の標準内積を表し、 $O(3)$ はすべての b_i ($0 \leq i \leq n$)に一斉に作用するものとする。この定義には少し説明が必要であろう。まず、 b_i は i 番目のヒンジの方向ベクトルを表すが、 $n+1$ 本のヒンジを順に並べていって、最後に両端を閉じるというふうに考える。ヒンジは向きを持たないので、 $b_n = \pm b_0$ が両端のヒンジが重なるということを意味する。さらに、隣り合うヒンジのなす角度(立体化学などではねじれ角と呼ばれる角度)が一定であるという条件が $\langle b_i, b_{i+1} \rangle = \cos \nu$ である。最後の外積の和の条件が多少分かりにくいのが、ヒンジの方向 b_k が決められたとき、ヒンジはその方向を軸にした回転だけを許すことを踏まえつつ隣り合うヒンジの位置関係を一定にして

6) 動きのアニメーション、折り紙の型紙、後に述べる数値実験を含む Maple で書かれたコードを次の URL で公開している: <https://github.com/shizuo-kaji/Kaleidocycle>

配置するには、 k 番目のヒンジを点 $\sum_{i=1}^k (b_i \times b_{i-1} + sb_i)$ を通り方向が b_k である直線に取ればよく (図 4 参照)、それが一周回って閉じることを要請するのが最後の等式である。以下では $s = 0$ の場合に、カライドサイクル

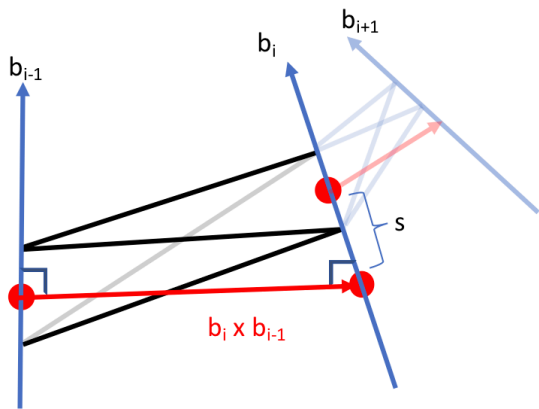


図 4 ヒンジの位置関係

ルの動きを解析しよう。まず、動きの自由度である、連立 2 次方程式 (1) の解空間の次元を数えてみる。一般には、変数の数から式の数を引き求まる。3 次元のベクトル b_i が n 個なので変数の数は $3n$ で、式の数、長さ 1 の条件が n 個、内積の条件が n 個、外積の条件が 3 成分あるので 3 個の合計 $2n + 3$ 個である。直交群の作用からくる $\dim(O(3)) = 3$ の自由度を除くと、結局残る自由度は $n - 6$ である。ここで、典型的な 6-カライドサイクル (図 3) は回らないのか、と思われるかもしれないが、この場合は $\nu = \pi/2$ で高い対称性を持つため、式が冗長になり 1 次元の自由度が残る [3]。さて、以上の計算から n が大きいときには高い自由度を持つことが分かるが、その中でクルクル運動に対応するような、連立方程式 (1) の解の 1 パラメーター族を見つけない。

ここで再び見方を変えて、カライドサイクルの別の化身に着目する。リンク機構であったり、連立方程式の解であったり、はたまた後に見るように帯であったり、クルクルと姿を変えるのがこの対象の面白いところである。ここでは離散的な閉曲線とみなす⁷⁾。空間

内の点を $\gamma_k = \frac{1}{\sin \nu} \sum_{i=0}^{k-1} (b_{i+1} \times b_i)$ と定めると、 $0 = \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n = 0$ は \mathbb{R}^3 内の多角形をなす。これをカライドサイクルの**中心多角形**と呼ぼう (図 3 右)。定義より辺の長さはすべて等しく 1 であり、ベクトル b_i は“接ベクトル” $t_{i+1} = \gamma_{i+1} - \gamma_i$ と $t_i = \gamma_i - \gamma_{i-1}$ の両方に直交するので、陪法線の類似物と思える。中心多角形との対応を通して、カライドサイクルは振率一定の離散閉曲線とみなせ、その運動は振率と弧長を保存する変形とみなせる。では、どのような変形がクルクル運動に対応するのであろうか。詳しくは述べないが、数値実験や位相的制約から、各点 γ_i の速度ベクトルは b_i に垂直であり (つまりは接触平面内にある) その大きさは i によらない、という運動が存在するであろうことが予想される。そこで逆にこのような制約のもと、振率と弧長を保存する条件を書き下してみると、modified KdV 方程式や sine-Gordon 方程式⁸⁾のある種の離散化で記述される変形が得られる [7]。その変形は実は [4] で考察された離散曲線の離散時間変形を、時間に関して連続極限をとったものとなっている。カライドサイクルの中心多角形がこの変形によって描く曲面を図 5 左に示した。

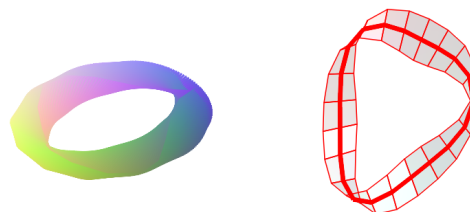


図 5 左: 21-カライドサイクルの中心多角形の modified KdV 方程式による変形の軌跡, 右: 21-カライドサイクルのなす三半捻りメビウスの帯

4. 終わりに

このカライドサイクルはクルクル回る他にも不思議な性質をいくつも持つようである [6]。その一つを紹介して本稿を終えたい。

7) 空間曲線の離散化にはいくつかの流儀があるが、ここで扱う折れ線による離散化については [8] の 3 節を参照されたい。

8) 本項の出版後に追記

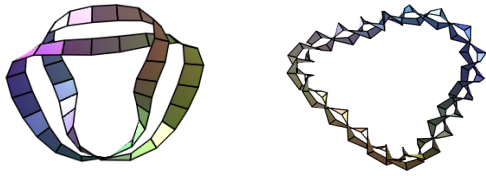


図 6 結び目状のカライドサイクル

$b_n = -b_0$ の場合は、小さな $\epsilon > 0$ について、4 点

$$\gamma_i - \epsilon b_i, \gamma_{i+1} - \epsilon b_{i+1}, \gamma_{i+1} + \epsilon b_{i+1}, \gamma_i + \epsilon b_i$$

をこの順でつないで得られる捻れた四辺形が連なってできる帯を考えると、メビウスの帯になっている (図 5 右)。四辺形 1 枚 1 枚の捻れ角 ν が小さすぎると、環状に閉じてメビウスの帯を作ることができないが、ではどんな ν について連立 2 次方程式 (1) は $b_n = -b_0$ であるような解を持つであろうか。より精密には、与えられた捻り数を持つメビウスの帯が存在するような ν の範囲は求まるか、という問いがある⁹⁾。この答えはまだ得られていないが、数値実験によると、不思議なことにどんな n に対しても、半捻りのメビウスの帯を作ることとはできず、三半捻り以上のものしか得られないようである。さらには、 ν を最小にすることができる三半捻りのメビウスの帯に対応するカライドサイクルは、ヒンジの数 n によらずちょうど 1 次元の自由度しか持たないことも数値実験では確かめられる。前節で考察した modified KdV 方程式や sine-Gordon 方程式から得られる運動は ν に依らずに存在するが、 ν が最小の時には $n - 6$ の自由度がすべてその 1 自由度の運動に縮退するのである。

最後に共同研究者である梶原健司氏の受け売りを：「うまい話の裏には可積分系がある」¹⁰⁾

[かじ しずお]

参考文献

9) 図 6 のように、カライドサイクルは非自明な結び目をなするので、結び目タイプを指定して同様の問題を考えることもできる。

10) 他のうまい話も知りたい方は、数学セミナー 2019 年 3 月号の特集「ひろがりゆく可積分系の世界」を参照。

- [1] R. Byrnes, *Metamorphs: Transforming Mathematical Surprises*, Tarquin Pubns, 1999.
- [2] エリック・D・ドメイン, ジョセフ・オルーク, 『リンクージュ, 折り紙, 多面体 - 幾何的な折りアルゴリズム』, [上原 隆平 訳] 近代科学社, 2009.
- [3] P. W. Fowler and S. D. Guest, *A symmetry analysis of mechanisms in rotating rings of tetrahedra*, Proc. R. Soc. A, 461, 1829–1846, 2005.
- [4] J. Inoguchi, K. Kajiwara, N. Matsuura, and Y. Ohta, *Discrete mKdV and discrete sine-Gordon flows on discrete space curves*, J. Phys. A: Math. Theor. **47**, 2014.
- [5] T. Jordán, C. Király, S. Tanigawa, *Generic global rigidity of body-hinge frameworks*, J. Comb. Theo. Ser. B, **117**, 59–76, 2016.
- [6] 鍛冶静雄, 曲線の幾何学から生まれた閉リンク機構, 2018 年度精密工学会春季大会 シンポジウム資料集, pp. 62–65.
- [7] S. Kaji, K. Kajiwara, and H. Park, *Linkage mechanisms governed by integrable deformations of discrete space curves*, to appear in Nonlinear Systems and Their Remarkable Mathematical Structures **2**, CRC Press.
- [8] 松浦望, 曲線と曲面の差分幾何, 日本応用数理学会論文誌 23-1, 55–107, 2013.
- [9] M. Muller, *A novel classification of planar four-bar linkages and its application to the mechanical analysis of animal systems*, Phil. Trans. R. Soc. B., **351**(1340), 689–720, 1996.
- [10] D. Schattschneider and W. M. Walker, *M. C. Escher Kaleidocycles*, Pomegranate Communications: Rohnert Park, CA, 1987. (TASCHEN; Reprint edition, 2015).