# $G_2$ 型旗多様体の同変コホモロジー

鍛冶 静雄
福岡大・理

福岡ホモトピー論セミナー
福岡大学セミナーハウス, 2010 年 1 月 9 日

# 目次

# 記号

| 記号 | 例 |
|---|---|
| $G$: コンパクト Lie 群 | $SU(n+1)$ |
| $T$: 極大トーラス | 対角行列 |
| $W$: ワイル群 | $\Sigma_{n+1}$: 対称群 |
| $s_1, \ldots, s_n$: 単純鏡映 | $s_i = (i, i+1)$: 単純置換 |
| $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathfrak{t}^*$: 単純ルート | $t_{i+1} - t_i \in \hom(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$ |
| $G/T$: 旗多様体 | $Fl_{n+1} = \{0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{n+1} = \mathbb{C}^{n+1}\}$ |

## 問題

$H^*(G/T; \mathbb{Z})$ を計算せよ

## 例

$$H^*(SU(n+1)/T; \mathbb{Z}) \cong H^*(Fl_{n+1}; \mathbb{Z}) \cong \frac{\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_{n+1}]}{(c_1, \ldots, c_{n+1})}$$

# 記号

| 記号 | 例 |
|---|---|
| $G$: コンパクト Lie 群 | $SU(n+1)$ |
| $T$: 極大トーラス | 対角行列 |
| $W$: ワイル群 | $\Sigma_{n+1}$: 対称群 |
| $s_1, \dots, s_n$: 単純鏡映 | $s_i = (i, i+1)$: 単純置換 |
| $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathfrak{t}^*$: 単純ルート | $t_{i+1} - t_i \in \hom(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$ |
| $G/T$: 旗多様体 | $Fl_{n+1} = \{0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{n+1} = \mathbb{C}^{n+1}\}$ |

## 問題

$H^*(G/T; \mathbb{Z})$ を計算せよ

## 例

$$H^*(SU(n+1)/T; \mathbb{Z}) \cong H^*(Fl_{n+1}; \mathbb{Z}) \cong \frac{\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_{n+1}]}{(c_1, \dots, c_{n+1})}$$

# 記号

| 記号 | 例 |
|---|---|
| $G$: コンパクト Lie 群 | $SU(n+1)$ |
| $T$: 極大トーラス | 対角行列 |
| $W$: ワイル群 | $\Sigma_{n+1}$: 対称群 |
| $s_1, \ldots, s_n$: 単純鏡映 | $s_i = (i, i+1)$: 単純置換 |
| $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathfrak{t}^*$: 単純ルート | $t_{i+1} - t_i \in \hom(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R})$ |
| $G/T$: 旗多様体 | $Fl_{n+1} = \{0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{n+1} = \mathbb{C}^{n+1}\}$ |

## 問題

$H^*(G/T; \mathbb{Z})$ を計算せよ

## 例

$$H^*(SU(n+1)/T; \mathbb{Z}) \cong H^*(Fl_{n+1}; \mathbb{Z}) \cong \frac{\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_{n+1}]}{(c_1, \ldots, c_{n+1})}$$

# Borel の方法

ファイバー束

$$G/T \xhookrightarrow{i} BT \to BG$$

をしらべる。

**定理 (Borel)**

$$H^*(G/T;\mathbb{Q}) \cong \frac{H^*(BT;\mathbb{Q})}{(H^+(BT;\mathbb{Q})^W)}$$

ここで、$H^*(BT;\mathbb{Q})$ は多項式環 $S(x) := \mathbb{Q}[x_1,\dots,x_n]$ であるから、右辺はワイル群の余不変式環となっている。

この方針は [Toda '74] により $\mathbb{Z}$ 係数に拡張されたが、実際の計算は困難。
(つい最近、[Nakagawa preprint] により $G = E_8$ まで計算された)

# Borel の方法

ファイバー束

$$G/T \overset{i}{\hookrightarrow} BT \to BG$$

をしらべる。

## 定理 (Borel)

$$H^*(G/T;\mathbb{Q}) \cong \frac{H^*(BT;\mathbb{Q})}{(H^+(BT;\mathbb{Q})^W)}$$

ここで、$H^*(BT;\mathbb{Q})$ は多項式環 $S(x) := \mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_n]$ であるから、右辺はワイル群の余不変式環となっている。

この方針は [Toda '74] により $\mathbb{Z}$ 係数に拡張されたが、実際の計算は困難。
( つい最近、[Nakagawa preprint] により $G = E_8$ まで計算された)

# Chevalley の方法

胞体分割

$$G/T \cong \bigcup_{w \in W} \sigma_w, \quad \dim(\sigma_w) = 2l(w)$$

を調べる。

**定理 (Chevalley)**

$$H^*(G/T; \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z}\{\sigma_w\}$$

問題点としては、積構造を見るのが困難。
(こちらも最近、[Duan-Zhao, preprint] や [Nakagawa-K, preprint] において、$G = E_8$ まで全て計算された)

# Chevalley の方法

胞体分割

$$G/T \cong \bigcup_{w\in W} \sigma_w, \quad \dim(\sigma_w) = 2l(w)$$

を調べる。

**定理 (Chevalley)**

$$H^*(G/T;\mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{w\in W} \mathbb{Z}\{\sigma_w\}$$

問題点としては、積構造を見るのが困難。
(こちらも最近、[Duan-Zhao, preprint] や [Nakagawa-K, preprint] において、$G = E_8$ まで全て計算された)

# Bernstein-Gelfand-Gelfand

[Bernstein-Gelfand-Gelfand '82] では、二つの方法の融合が考察された。

**定理 (BGG, Demazure)**

差分商作用素 $\Delta_w : S^{l(w)}(x) \to \mathbb{Q}$ が定義でき、

$$\forall f \in S^d(x), \quad f = \sum_{w \in W; l(w)=d} \Delta_w(f)\sigma_w \in H^{2d}(G/T;\mathbb{Q})$$

これにより、

- $f_w(x) = \sigma_w$ なる多項式の族 $\{f_w(x)\}_{w \in W}$ を見つけ、
- $\sigma_u \cup \sigma_v = \sum_w \Delta_w(f_u f_v)\sigma_w$ を計算する

ことで、(原理的には) コホモロジー環を決定できる。

(別の視点: $\bigcap_{w \in W} \dfrac{\{\Delta_w \text{の整数点}\}}{\ker(\Delta_w)} = H^*(G/T;\mathbb{Z})$ )

# Bernstein-Gelfand-Gelfand

[Bernstein-Gelfand-Gelfand '82] では、二つの方法の融合が考察された。

**定理 (BGG, Demazure)**

差分商作用素 $\Delta_w : S^{l(w)}(x) \to \mathbb{Q}$ が定義でき、

$$\forall f \in S^d(x), \quad f = \sum_{w \in W; l(w)=d} \Delta_w(f)\sigma_w \in H^{2d}(G/T;\mathbb{Q})$$

これにより、

- $f_w(x) = \sigma_w$ なる多項式の族 $\{f_w(x)\}_{w\in W}$ を見つけ、
- $\sigma_u \cup \sigma_v = \sum_w \Delta_w(f_u f_v)\sigma_w$ を計算する

ことで、(原理的には) コホモロジー環を決定できる。

(別の視点: $\bigcap_{w\in W} \dfrac{\{\Delta_w の整数点\}}{\ker(\Delta_w)} = H^*(G/T;\mathbb{Z})$ )

## Bernstein-Gelfand-Gelfand

[Bernstein-Gelfand-Gelfand '82] では、二つの方法の融合が考察された。

**定理 (BGG, Demazure)**

差分商作用素 $\Delta_w : S^{l(w)}(x) \to \mathbb{Q}$ が定義でき、

$$\forall f \in S^d(x), \quad f = \sum_{w \in W; l(w)=d} \Delta_w(f)\sigma_w \in H^{2d}(G/T;\mathbb{Q})$$

これにより、

- $f_w(x) = \sigma_w$ なる多項式の族 $\{f_w(x)\}_{w \in W}$ を見つけ、
- $\sigma_u \cup \sigma_v = \sum_w \Delta_w(f_u f_v)\sigma_w$ を計算する

ことで、(原理的には) コホモロジー環を決定できる。

(別の視点: $\bigcap_{w \in W} \dfrac{\{\Delta_w \text{の整数点}\}}{\ker(\Delta_w)} = H^*(G/T;\mathbb{Z})$ )

## シューベルト多項式

$f_w(x) = \sigma_w$ なる多項式はシューベルト多項式と呼ばれ、

カップ積 $\sigma_u \cup \sigma_v \Leftrightarrow$ 対称式の積 $f_u f_v$

という対応を与える。

$f_w(x) \in S(x)$ の選び方にはイデアル $(S^W(x))$ の不定性があるが、うまい選択が $G$ の型により色々と考察されている。

**例**

- $H^*(Gr(n, n+m); \mathbb{Z})$: シューア関数
- $H^*(SU(n+1)/T; \mathbb{Z})$: 元祖シューベルト多項式 [Lascoux-Schützenberger '82]
- $G$ が古典型の時: たくさんの候補が知られている [Billey-Haiman '95, Fomin-Kirillov '96, etc...]

しかし、例外型は無視されている。

# シューベルト多項式

$f_w(x) = \sigma_w$ なる多項式はシューベルト多項式と呼ばれ、

$$\text{カップ積 } \sigma_u \cup \sigma_v \Leftrightarrow \text{対称式の積 } f_u f_v$$

という対応を与える。
$f_w(x) \in S(x)$ の選び方にはイデアル $(S^W(x))$ の不定性があるが、うまい選択が $G$ の型により色々と考察されている。

## 例

- $H^*(Gr(n, n+m); \mathbb{Z})$: シューア関数
- $H^*(SU(n+1)/T; \mathbb{Z})$: 元祖シューベルト多項式 [Lascoux-Schützenberger '82]
- $G$ が古典型の時: たくさんの候補が知られている [Billey-Haiman '95, Fomin-Kirillov '96, etc...]

しかし、例外型は無視されている。

## シューベルト多項式

$f_w(x) = \sigma_w$ なる多項式はシューベルト多項式と呼ばれ、

カップ積 $\sigma_u \cup \sigma_v \Leftrightarrow$ 対称式の積 $f_u f_v$

という対応を与える。
$f_w(x) \in S(x)$ の選び方にはイデアル $(S^W(x))$ の不定性があるが、うまい選択が $G$ の型により色々と考察されている。

### 例

- $H^*(Gr(n, n+m); \mathbb{Z})$: シューア関数
- $H^*(SU(n+1)/T; \mathbb{Z})$: 元祖シューベルト多項式 [Lascoux-Schützenberger '82]
- $G$ が古典型の時: たくさんの候補が知られている [Billey-Haiman '95, Fomin-Kirillov '96, etc...]

しかし、例外型は無視されている。

# $f_w(x)$ の選び方

$f_w(x) \in S(x)$ は、一般に次の方針で見つけることができる。

**手順**

$w_0 \in W$ を、最長元 $(2l(w) = \dim(G/T)$ なる唯一の $w)$ として、

1. $f_{w_0}(x) \in S^{l(w_0)}(x)$ を何とかしてみつける
2. $f_w(x) := \Delta_{w_0 w^{-1}} f_{w_0}(x)$ により帰納的に定義

一番の問題は、如何にして $f_{w_0}$ を見つけてくるかになる。

# 旗多様体の同変コホモロジー

ここまでは、常コホモロジーの場合を概観した。

ここからは、$G$ の極大トーラス $T$ の、旗多様体 $G/T$ への作用を考え、その同変コホモロジーを考察する。

空間としては “pullback”・代数的には係数拡大 $\mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n] \otimes_{\mathbb{Z}}$ と思える。

# トーラス作用

- $T \curvearrowright G/T$: 左からのかけ算
- $G/T \hookrightarrow ET \times_T G/T \to BT$: Borel 構成
- $H_T^*(G/T;\mathbb{Z}) := H^*(ET \times_T G/T;\mathbb{Z})$: トーラス同変コホモロジー
    - $H_T^*(G/T;\mathbb{Z})$ は $H_T^*(pt;\mathbb{Z}) \cong H^*(BT;\mathbb{Z})$ 代数構造を持ち、トーラス作用の情報を内包する
    - $H^*(G/T;\mathbb{Z})$ は $H_T^*(G/T;\mathbb{Z})$ から復元できる

      ( $H^*(G/T;\mathbb{Z}) \cong \dfrac{H_T^*(G/T;\mathbb{Z})}{(H_T^*(pt;\mathbb{Z}))}$ )

**目標**

$H_T^*(pt)$ 代数として、$H_T^*(G/T;\mathbb{Z})$ を決定せよ

理由:

- 素性の良い Hamiltonian 作用の典型例となっている
- 旗束の退化跡と関係

# トーラス作用

- $T \curvearrowright G/T$: 左からのかけ算
- $G/T \hookrightarrow ET \times_T G/T \to BT$: Borel 構成
- $H_T^*(G/T;\mathbb{Z}) := H^*(ET \times_T G/T;\mathbb{Z})$: トーラス同変コホモロジー
  - $H_T^*(G/T;\mathbb{Z})$ は $H_T^*(pt;\mathbb{Z}) \cong H^*(BT;\mathbb{Z})$ 代数構造を持ち、トーラス作用の情報を内包する
  - $H^*(G/T;\mathbb{Z})$ は $H_T^*(G/T;\mathbb{Z})$ から復元できる
  
  $( H^*(G/T;\mathbb{Z}) \cong \dfrac{H_T^*(G/T;\mathbb{Z})}{(H_T^*(pt;\mathbb{Z}))} )$

**目標**

$H_T^*(pt)$ 代数として、$H_T^*(G/T;\mathbb{Z})$ を決定せよ

理由:

- 素性の良い Hamiltonian 作用の典型例となっている
- 旗束の退化跡と関係

# トーラス作用

- $T \curvearrowright G/T$: 左からのかけ算
- $G/T \hookrightarrow ET \times_T G/T \to BT$: Borel 構成
- $H_T^*(G/T;\mathbb{Z}) := H^*(ET \times_T G/T;\mathbb{Z})$: トーラス同変コホモロジー
  - $H_T^*(G/T;\mathbb{Z})$ は $H_T^*(pt;\mathbb{Z}) \cong H^*(BT;\mathbb{Z})$ 代数構造を持ち、トーラス作用の情報を内包する
  - $H^*(G/T;\mathbb{Z})$ は $H_T^*(G/T;\mathbb{Z})$ から復元できる
    $$\left( H^*(G/T;\mathbb{Z}) \cong \frac{H_T^*(G/T;\mathbb{Z})}{(H_T^*(pt;\mathbb{Z}))} \right)$$

**目標**

$H_T^*(pt)$ 代数として、$H_T^*(G/T;\mathbb{Z})$ を決定せよ

理由:

- 素性の良い Hamiltonian 作用の典型例となっている
- 旗束の退化跡と関係

# トーラス作用

- $T \curvearrowright G/T$: 左からのかけ算
- $G/T \hookrightarrow ET \times_T G/T \to BT$: Borel 構成
- $H^*_T(G/T;\mathbb{Z}) := H^*(ET \times_T G/T;\mathbb{Z})$: トーラス同変コホモロジー
    - $H^*_T(G/T;\mathbb{Z})$ は $H^*_T(pt;\mathbb{Z}) \cong H^*(BT;\mathbb{Z})$ 代数構造を持ち、トーラス作用の情報を内包する
    - $H^*(G/T;\mathbb{Z})$ は $H^*_T(G/T;\mathbb{Z})$ から復元できる
      $\left( H^*(G/T;\mathbb{Z}) \cong \dfrac{H^*_T(G/T;\mathbb{Z})}{(H^*_T(pt;\mathbb{Z}))} \right)$

**目標**

$H^*_T(pt)$ 代数として、$H^*_T(G/T;\mathbb{Z})$ を決定せよ

理由:

- 素性の良い Hamiltonian 作用の典型例となっている
- 旗束の退化跡と関係

# Borel の方法の同変版

$BT = EG \times_G G/T$ とみなすと、

$$\begin{tikzcd} G/T \arrow[r, hook] & EG \times_G G/T \arrow[r] & BG \end{tikzcd}$$

と pullback が得られ、$H^*(BG;\mathbb{Q}) = H^*(BT;\mathbb{Q})^W$ に注意すると、

$$\begin{tikzcd}
 & H^*(BT;\mathbb{Q}) \otimes_{H^*(BT;\mathbb{Q})^W} H^*(BT;\mathbb{Q}) \arrow[d, equal] & \\
H^*(G/T;\mathbb{Q}) \arrow[d, equal] & H^*_T(G/T;\mathbb{Q}) \arrow[l, two heads] & H^*(BT;\mathbb{Q}) \arrow[l] \\
H^*(G/T;\mathbb{Q}) & H^*(BT;\mathbb{Q}) \arrow[l, two heads] \arrow[u] & H^*(BG;\mathbb{Q}) \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

# Borel の方法の同変版

$BT = EG \times_G G/T$ とみなすと、

$$\begin{tikzcd}
G/T \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & ET \times_T G/T \arrow[r] \arrow[d] & BT \arrow[d] \\
G/T \arrow[r, hook] & EG \times_G G/T \arrow[r] & BG
\end{tikzcd}$$

と pullback が得られ、$H^*(BG;\mathbb{Q}) = H^*(BT;\mathbb{Q})^W$ に注意すると、

$$\begin{tikzcd}
 & H^*(BT;\mathbb{Q}) \otimes_{H^*(BT;\mathbb{Q})^W} H^*(BT;\mathbb{Q}) \arrow[d, equal] & \\
H^*(G/T;\mathbb{Q}) \arrow[d, equal] & H_T^*(G/T;\mathbb{Q}) \arrow[l, two heads] & H^*(BT;\mathbb{Q}) \arrow[l] \\
H^*(G/T;\mathbb{Q}) & H^*(BT;\mathbb{Q}) \arrow[l, two heads] \arrow[u] & H^*(BG;\mathbb{Q}) \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

# Borel の方法の同変版

$BT = EG \times_G G/T$ とみなすと、

$$\begin{tikzcd} G/T \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & ET \times_T G/T \arrow[r] \arrow[d] & BT \arrow[d] \\ G/T \arrow[r, hook] & EG \times_G G/T \arrow[r] & BG \end{tikzcd}$$

と pullback が得られ、$H^*(BG;\mathbb{Q}) = H^*(BT;\mathbb{Q})^W$ に注意すると、

$$\begin{tikzcd} & H^*(BT;\mathbb{Q}) \otimes_{H^*(BT;\mathbb{Q})^W} H^*(BT;\mathbb{Q}) \arrow[d, equal] & \\ H^*(G/T;\mathbb{Q}) \arrow[d, equal] & H_T^*(G/T;\mathbb{Q}) \arrow[l, two heads] & H^*(BT;\mathbb{Q}) \arrow[l] \\ H^*(G/T;\mathbb{Q}) & H^*(BT;\mathbb{Q}) \arrow[l, two heads] \arrow[u] & H^*(BG;\mathbb{Q}) \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

# Chevalley の方法の同変版

胞体分割

$$G/T \cong \bigcup_{w \in W} \sigma_w, \quad \dim(\sigma_w) = 2l(w)$$

は同変。

**定理 (Chevalley)**

$$H_T^*(G/T;\mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{w\in W} H_T^*(pt;\mathbb{Z})\{\sigma_w\} \cong \bigoplus_{w\in W} \mathbb{Z}[t_1,\ldots,t_n]\{\sigma_w\}$$

やはり問題点としては、積構造を見るのが困難。

# Chevalley の方法の同変版

胞体分割

$$G/T \cong \bigcup_{w \in W} \sigma_w, \quad \dim(\sigma_w) = 2l(w)$$

は同変。

**定理 (Chevalley)**

$$H_T^*(G/T;\mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{w \in W} H_T^*(pt;\mathbb{Z})\{\sigma_w\} \cong \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z}[t_1,\dots,t_n]\{\sigma_w\}$$

やはり問題点としては、積構造を見るのが困難。

# BGG の方法の同変版

$H_T^*(G/T;\mathbb{Q}) \cong H_T^*(pt;\mathbb{Q}) \otimes_{H^*(BT;\mathbb{Q})^W} H^*(BT;\mathbb{Q})$ を、$S(t) \otimes_{S^W} S(x)$ と書くことにすると、

## 定理

差分商作用素 $\Delta_w : S(t) \otimes_{S^W} S^{l(w)}(x) \to S(t)$ が定義され、

$$f(t;x) = \sum_w \Delta_w(f)|_{x=t=\alpha} \cdot \sigma_w \in H_T^*(G/T;\mathbb{Q})$$

これにより、

- $f_w = \sigma_w$ なる (2 変数族) 多項式の族 $\{f_w\}_{w\in W}$ を見つけ、
- $\sigma_u \cup \sigma_v = \sum_w \Delta_w(f_u f_v)|_{x=t=\alpha}\sigma_w$ を計算する

ことで、(原理的には) コホモロジー環を決定できる。

(別の視点: $\bigcap_{w\in W} \dfrac{\Delta_w \text{の整点}}{\ker(\Delta_w)} = H_T^*(G/T;\mathbb{Z})$ )

# BGG の方法の同変版

$H_T^*(G/T;\mathbb{Q}) \cong H_T^*(pt;\mathbb{Q}) \otimes_{H^*(BT;\mathbb{Q})^W} H^*(BT;\mathbb{Q})$ を、$S(t) \otimes_{S^W} S(x)$ と書くことにすると、

## 定理

差分商作用素 $\Delta_w : S(t) \otimes_{S^W} S^{l(w)}(x) \to S(t)$ が定義され、

$$f(t;x) = \sum_w \Delta_w(f)|_{x=t=\alpha} \cdot \sigma_w \in H_T^*(G/T;\mathbb{Q})$$

これにより、

- $f_w = \sigma_w$ なる (2 変数族) 多項式の族 $\{f_w\}_{w\in W}$ を見つけ、
- $\sigma_u \cup \sigma_v = \sum_w \Delta_w(f_u f_v)|_{x=t=\alpha}\sigma_w$ を計算する

ことで、(原理的には) コホモロジー環を決定できる。

(別の視点: $\bigcap_{w\in W} \frac{\Delta_w \text{の整点}}{\ker(\Delta_w)} = H_T^*(G/T;\mathbb{Z})$ )

# BGG の方法の同変版

$H_T^*(G/T;\mathbb{Q}) \cong H_T^*(pt;\mathbb{Q}) \otimes_{H^*(BT;\mathbb{Q})^W} H^*(BT;\mathbb{Q})$ を、$S(t) \otimes_{S^W} S(x)$ と書くことにすると、

## 定理

差分商作用素 $\Delta_w : S(t) \otimes_{S^W} S^{l(w)}(x) \to S(t)$ が定義され、

$$f(t;x) = \sum_w \Delta_w(f)|_{x=t=\alpha} \cdot \sigma_w \in H_T^*(G/T;\mathbb{Q})$$

これにより、

- $f_w = \sigma_w$ なる (2 変数族) 多項式の族 $\{f_w\}_{w \in W}$ を見つけ、
- $\sigma_u \cup \sigma_v = \sum_w \Delta_w(f_u f_v)|_{x=t=\alpha}\sigma_w$ を計算する

ことで、(原理的には) コホモロジー環を決定できる。

(別の視点: $\bigcap_{w\in W} \dfrac{\Delta_w \text{の整点}}{\ker(\Delta_w)} = H_T^*(G/T;\mathbb{Z})$ )

## 二重シューベルト多項式

$f_w(t;x) = \sigma_w$ なる多項式はシューベルト多項式と呼ばれ、やはり古典型については色々とうまい選び方が提案されている。

**例**

- $H_T^*(Gr(n, n+m); \mathbb{Z})$: factorial Schur 関数
- $H_T^*(SU(n+1)/T; \mathbb{Z})$: 元祖二重シューベルト多項式 [Lascoux-Schützenberger '82]
- $G$ が古典型の時: [Fulton '96, Ikeda-Mihalcea-Naruse '08, etc...]

しかしここでも、例外型は無視されている。

# 二重シューベルト多項式

$f_w(t;x) = \sigma_w$ なる多項式はシューベルト多項式と呼ばれ、やはり古典型については色々とうまい選び方が提案されている。

## 例

- $H_T^*(Gr(n, n+m); \mathbb{Z})$: factorial Schur 関数
- $H_T^*(SU(n+1)/T; \mathbb{Z})$: 元祖二重シューベルト多項式 [Lascoux-Schützenberger '82]
- $G$ が古典型の時: [Fulton '96, Ikeda-Mihalcea-Naruse '08, etc...]

しかしここでも、例外型は無視されている。

# 具体的な計算例

常コホモロジーの場合と同様に BGG の方法に従い、同変コホモロジーを多項式代数の計算に帰着させることができで、実際の計算が可能。

それだけでは modulo イデアルの計算が厄介だが、作用の固定点への局所化を考えることでうまくいく。

# 方針

$$
\begin{tikzcd}
 & H^*(BT;\mathbb{Q}) \otimes_{H^*(BT;\mathbb{Q})^W} H^*(BT;\mathbb{Q}) \arrow[d, equal] \\
H^*(BT;\mathbb{Q}) \otimes H^*(BT;\mathbb{Q}) \arrow[ur, two heads] \arrow[r, two heads] & H^*_T(G/T;\mathbb{Q}) \\
 & H^*_T(G/T;\mathbb{Z}) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}
$$

- $\ker \pi = \ker \pi'$ が分かれば良い

# 方針

$$
\begin{tikzcd}
 & H^*(BT;\mathbb{Q}) \otimes_{H^*(BT;\mathbb{Q})^W} H^*(BT;\mathbb{Q}) \arrow[d, equal] \\
H^*(BT;\mathbb{Q}) \otimes H^*(BT;\mathbb{Q}) \arrow[ur, two heads] \arrow[r, two heads] & H_T^*(G/T;\mathbb{Q}) \\
\{\Delta_w \text{の整点}\} \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads, "\pi"] & H_T^*(G/T;\mathbb{Z}) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}
$$

- $\ker \pi = \ker \pi'$ が分かれば良い

# 方針

$$
\begin{tikzcd}
 & & H^*(BT;\mathbb{Q}) \otimes_{H^*(BT;\mathbb{Q})^W} H^*(BT;\mathbb{Q}) \arrow[d, equal] & \\
H^*(BT;\mathbb{Q}) \otimes H^*(BT;\mathbb{Q}) \arrow[urr] \arrow[rr, two heads] & & H_T^*(G/T;\mathbb{Q}) & \\
\{\Delta_w \text{の整点}\} \arrow[u, hook] \arrow[rr, two heads, "\pi"] \arrow[drr, "\pi'"] & & H_T^*(G/T;\mathbb{Z}) \arrow[u, hook] \arrow[d, hook] & \\
 & & \bigoplus_{w\in W} H_T^*(wT/T;\mathbb{Z}) \arrow[r, equal] & \bigoplus_{w\in W} H^*(BT;\mathbb{Z})
\end{tikzcd}
$$

- $\ker\pi = \ker\pi'$ が分かれば良い

# 固定点への局所化

今考えているトーラス作用の固定点は、ちょうど $wT/T \in G/T$ と一致している。

これらの固定点への制限写像

$$H_T^*(G/T;\mathbb{Z}) \to H_T^*\left((G/T)^T;\mathbb{Z}\right) \cong \bigoplus_{w\in W} H_T^*(pt)$$

は単射となり、その像は組合せ論的に記述される。

**定理 (Goresky-Kottwitz-MacPherson '98)**

同変コホモロジー $\Leftrightarrow$ $H_T^*(pt)$ でラベルづけされたモーメントグラフ

さらに、$H_T^*(G/T;\mathbb{Z}) \to H_T^*(wT;\mathbb{Z})(\Leftrightarrow S(t)\otimes_{S^W} S(x) \to S(t))$ は、代入

$$f(t;x) \mapsto f(t;w(t))$$

で与えられる。

# 固定点への局所化

今考えているトーラス作用の固定点は、ちょうど $wT/T \in G/T$ と一致している。
これらの固定点への制限写像

$$H_T^*(G/T;\mathbb{Z}) \to H_T^*\left((G/T)^T;\mathbb{Z}\right) \cong \bigoplus_{w\in W} H_T^*(pt)$$

は単射となり、その像は組合せ論的に記述される。

**定理 (Goresky-Kottwitz-MacPherson '98)**

同変コホモロジー $\Leftrightarrow$ $H_T^*(pt)$ でラベルづけされたモーメントグラフ

さらに、$H_T^*(G/T;\mathbb{Z}) \to H_T^*(wT;\mathbb{Z})(\Leftrightarrow S(t)\otimes_{S^W} S(x) \to S(t))$ は、代入

$$f(t;x) \mapsto f(t;w(t))$$

で与えられる。

# 固定点への局所化

今考えているトーラス作用の固定点は、ちょうど $wT/T \in G/T$ と一致している。
これらの固定点への制限写像

$$H_T^*(G/T;\mathbb{Z}) \to H_T^*\left((G/T)^T;\mathbb{Z}\right) \cong \bigoplus_{w\in W} H_T^*(pt)$$

は単射となり、その像は組合せ論的に記述される。

**定理 (Goresky-Kottwitz-MacPherson '98)**

同変コホモロジー $\Leftrightarrow$ $H_T^*(pt)$ でラベルづけされたモーメントグラフ

さらに、$H_T^*(G/T;\mathbb{Z}) \to H_T^*(wT;\mathbb{Z})(\Leftrightarrow S(t)\otimes_{S^W} S(x) \to S(t))$ は、代入

$$f(t;x) \mapsto f(t;w(t))$$

で与えられる。

# 実際の計算結果

- $G = G_2$: 階数 2 の例外型リー群
- $W = D_{12} = \langle s_1, s_2 \rangle$: 位数 12 の正 2 面体群

## 例

$$H_T^*(G_2/T;\mathbb{Z}) \cong \frac{\mathbb{Z}[\alpha_1,\alpha_2][\sigma_{s_1},\sigma_{s_2},\sigma_{s_2s_1s_2}]}{(r_2,r_3,r_6)},$$

where

$$\begin{aligned}
r_2 =& 3\sigma_{s_1}^2 + \sigma_{s_2}^2 - 3\sigma_{s_1}\sigma_{s_2} - 3\alpha_1\sigma_{s_1} - \alpha_2\sigma_{s_2}\\
r_3 =& 2\sigma_{s_2s_1s_2} - 2\sigma_{s_1}^2\sigma_{s_2} - \sigma_{s_1}\sigma_{s_2}^2 + 3\sigma_{s_1}^2\sigma_{s_2} + 3\alpha_1\sigma_{s_1}^2 + \alpha_2\sigma_{s_1}\sigma_{s_2} + \cdots\\
r_6 =& -2\sigma_{s_1}^2\sigma_{s_2}\sigma_{s_2s_1s_2} + \alpha_2\sigma_{s_2}\sigma_{s_1}^4 + (10\alpha_1 + 4\alpha_2)\,\sigma_{s_2s_1s_2}\sigma_{s_1}\sigma_{s_2} + \cdots
\end{aligned}$$

# 常コホモロジー

$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ とおくと、常コホモロジーが復元される

## Bott-Samelson ’53, Duan-Zhao ’08

$$H^*(G_2/T;\mathbb{Z}) \cong \frac{\mathbb{Z}[\sigma_{s_1}, \sigma_{s_2}, \sigma_{s_2 s_1 s_2}]}{(r_2', r_3', r_6')},$$

where

$$\begin{aligned}
r_2' &= 3\sigma_{s_1}^2 + \sigma_{s_2}^2 - 3\sigma_{s_1}\sigma_{s_2} \\
r_3' &= 2\sigma_{s_2 s_1 s_2} - 2\sigma_{s_1}^2\sigma_{s_2} - \sigma_{s_1}\sigma_{s_2}^2 - 3\sigma_{s_1}^2\sigma_{s_2} \\
r_6' &= \sigma_{s_2 s_1 s_2}^2 - 2\sigma_{s_1}^2\sigma_{s_2}\sigma_{s_2 s_1 s_2} + \sigma_{s_1}^6 + \sigma_{s_1}^4\sigma_{s_2}^2 - 2\sigma_{s_1}^5\sigma_{s_2} + 2\sigma_{s_2 s_1 s_2}\sigma_{s_1}^3.
\end{aligned}$$

# いくつかの補足と今後の課題

- $G_2$ 型旗多様体には、2 つの partial 旗多様体があるが、それらも同様に計算できる
- $F_4, E_6, E_7, E_8$ 型についても同様の手法で計算可能
- $\Rightarrow$ 結果は煩雑になるので、(単に代数の表示をあたえるという) 問題設定を変えるべき
- $G_2$ 型のシューベルト多項式としては、最長元に対して次のように定義できる

$$f_{w_0}(t;x) = \frac{1}{2}(x_1 - t_1)(x_1 - t_1 - t_2)(x_1 - 2t_1 - t_2)(x_1 + t_1 + t_2)(x_1 + 2t_1 + t_2)(x_2 - 3t_1 - t_2)$$

- $\Rightarrow$ 型によらない統一的な選択は可能か？
(ルートの分解 $G_2 \simeq A_2 \times A_2, F_4 = D_4 \times D_4$ で古典型に帰着するが、$E$ 型の場合は？)

# 2010 年　寅年


(Wish prosperity for the type “T” flag)