

曲線の幾何学から生まれた閉リンク機構

鍛冶静雄*

A closed linkage mechanism having the shape of a discrete Möbius strip Shizuo KAJI

3次元空間内の複数の剛体をヒンジで数珠状に結合した閉リンク機構には、Bricard6R や Bennett4R といったものが知られている。その設計は高次の代数方程式を解く必要があり一般には難しい。本講演では、ある種の Bricard6R を任意個数のヒンジに拡張する、新しい閉リンク機構の族を提案する。それらは、ちょうど1次元の自由度 (1-DOF) を持つ、ある種のエネルギーが任意の状態において一定値をとるといった、特異な性質を持つ。さらにこのリンク機構は、離散化されたメビウスの帯ともみなせ、純粋数学の観点からも興味深い。しかし、ここで述べることの多くは、数値的に確認された性質で、まだ数学的証明を持たないので注意が必要である。

Key words: (5 - 10 words) linkage mechanism, kinematic chain, deployable structure, Kaleidocycle, rotating ring of tetrahedra, Kirchhoff elastic rod, curve and ribbon theory

1. 序 論

回転軸を持ち、その周りに自由に向きを変えられるジョイントを**ヒンジ**(もしくは revolute joint)と呼ぶ。剛体がヒンジで結合された物体を、リンク機構と呼ぼう。例えば、Bricard6R(Fig.1 左)は、6つのヒンジで構成されたリンク機構である。リンク機構の解析において、その取りうる状態全体、すなわち**配位空間**の決定はもっとも重要なテーマの一つである。数学的には、ヒンジの状態は回転角を用いて単位円 $S^1 := [0, 2\pi)^1$ と同一視されるので、 n 個のヒンジからなる系の配位空間はトーラス $(S^1)^n$ の部分空間となる。

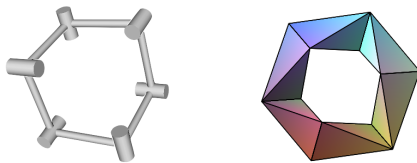


Fig. 1 Bricard6R and 6-Kaleidocycle

リンク機構は、ロボットアーム、折り畳み構造、動力伝達など、様々な応用を持つ。その分類や解析は [10] に詳しい。一方数学では、リンク機構の配位空間を調べることは、講演者の専門とするトポロジーという分野における一つのトピックである [4, 5]。

配位空間の性質でまずもっとも重要なのは、その次元である。これは機構の運動の自由度 degree-of-freedom (DOF と略す) と同値である²。Mobility formula (Chebychev-Grübler-Kutzbach criterion と呼ばれる)

$$M = 6(N - 1 - n) + \sum_{i=1}^n f_i \quad (1)$$

は変数の数と制約を単純に数えることで、系の DOF の見積もり M を与える。ここで N は剛体の数、 n はジョイントの数、 f_i は各ジョイントの DOF³ である。いくつかの制約が独立ではなく冗長であるとき、その系はこの見積もりよりも大きな自由度を持ち、overconstrained であるという。Bricard6R や Bennett4R といった有名な機構は overconstrained である。一方、単純な見積

りよりも小さな DOF を持つ系も存在する。これは後に議論するように、系が実代数多様体であるということに起因する。本講演では、任意の自然数 $n \geq 6$ に対して、 n 個のヒンジが環状に連結された閉リンク機構であり、ちょうど1次元の DOF を持つものを紹介する。特に $n = 6$ の場合はある種の Bricard6R になっており、その一般化とみなせる。

2. Kaleidocycle(カライドサイクル)

ここで紹介する環状の閉リンク機構は、Kaleidocycle[8](Fig.1 右)と呼ばれるおもちゃをもとにしているので、ヒンジの数を $n \geq 6$ として n -Kaleidocycle と呼ぶことにする⁴。Kaleidocycle は一枚の紙から折ることができる、 n 個の合同な四面体が向かい合う辺をヒンジとして環状に連なったもので、クルクルと回し続ける⁵ことができる。一般には n が大きくなるに従い、回る他にたわむ動きなど大きな DOF を持つが、特別な四面体を選ぶとその DOF がクルクル運動のみの 1 に落ちる、というのが本講演の主題である。まず、Kaleidocycle の数学的な枠組みを、リンク機構の解析で標準的な Denavit-Hartenberg parameters を用いて与えよう (例えば [9, Ex 5.2, Ex 8.13] を参照)。

ここではまず、閉リンクの環を一箇所のヒンジで切り開いた直列 (serial) 機構を考え、それが閉じるという条件を inverse kinematics の問題として扱う。 i 番目 ($0 \leq i \leq n$) のヒンジの向きを $b_i \in S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ 、中心位置を $\gamma_i \in \mathbb{R}^3$ とする。ここで n 番目のヒンジとは、環を切り開いたことによって新たにできた端点である。他方の端点にこれに重なれば閉じるが、これには2通りの場合があり、それぞれ

- $b_n = b_0, \gamma_n = \gamma_0$ の場合を**有向**
- $b_n = -b_0, \gamma_n = \gamma_0$ の場合を**無向**

と呼ぶことにする。隣り合うヒンジは剛体で固定されていて、今はその捻れ角が一定 (つまり四面体が全て合同) であるから、ねじれ角のコサインを表すパラメーター $c \in [-1, 1]$ により内積を用いて $b_{i-1} \cdot b_i = c$ とかける。さて、 b_{i-1} と b_i が平行でなければ γ_i は帰納的に外積を用いて $\gamma_{i-1} + b_{i-1} \times b_i$ と定めることができる⁶全てのヒンジが平行である、つまり $c = \pm 1$ の場合は実

⁴Kaleidocycle は文献によって rotating ring of tetrahedra などとも呼ばれるので、検索するときは少し注意が必要である。

⁵今後この動きをクルクル運動と呼ぶことにする。英語だと evert と言えそうだが、良い日本語が思いつかない。

⁶系の DOF を議論するだけであれば、ヒンジの中心が物理的に γ_i にある必要はなく、ヒンジは γ_i を通り b_i の方向ベクトルを持つ直線上のどこにあっても良い (Fig.4 右を参照)。これはヒンジが軸上をスライドする折りたたみ構造への応用を考える際に重要な注意である。

* 山口大学大学院 創成科学研究科 / JST さきがけ

¹正確には閉区間 $[0, 2\pi]$ の両端 $\{0, 2\pi\}$ を一点に潰した空間

²配位空間には特異点が存在する可能性があるが、次元というときは特異点は除いて考える。つまり、機構が一般の状態“ほぼ全て”の状態にあるときの自由度を考える。

³ヒンジでは $f_i = 1$

質平面的な機構でありつまらないので、今後はこれらを**自明な場合**と呼び無視する。

まとめると n -Kaleidocycle の配位空間は

$$\sum_{i=1}^n b_{i-1} \times b_i = (0, 0, 0), \quad b_{i-1} \cdot b_i = c, \quad b_i \cdot b_i = 1 \quad (1 \leq i \leq n) \quad (2)$$

という連立2次方程式の解空間(実数解の集合)と同一視される。その見かけに反して、この解空間を調べるのはそれほど容易ではない(c.f. [6])。

ところで、パラメーター c は自由に選べるわけではない。四面体の形によっては、重ねていった時にどう頑張っても両端を環状に閉じることができない。例えば、 $n=6$ のとき上式は、有向なら $c = \pm 1$ 、無向なら $c = 0$ の場合にしか解を持たない。無向の場合の $c = 0$ が Bricard6R に対応する機構であり、 S^1 と同様な配位空間を持つ。つまり、DOF が 1 である。各 n の有向・無向のそれぞれの場合に対して、解が存在する c の範囲は、ある定数 c_n を用いて次のように書ける：

- 有向で n が偶数: $[-1, 1]$
- 有向で n が奇数: $[-c_n, 1]$
- 無向で n が偶数: $[-c_n, c_n]$
- 無向で n が奇数: $[-1, c_n]$

上記の範囲の非自明な境界値 $c = \pm c_n$ に対応する n -Kaleidocycle を、**extreme n -Kaleidocycle** と呼び、これが本講演の主演である。 n が奇数の場合の有向と無向、 n が偶数の場合の $c = \pm c_n$ はそれぞれ、一つおきにヒンジの向きを逆にすれば移り合うので、各 n に対して extreme n -Kaleidocycle は本質的には一つしかない⁷。

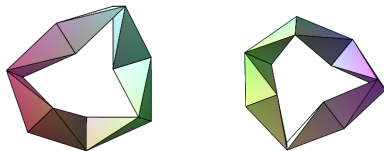


Fig. 2 有向(左)・無向(右) extreme 7-Kaleidocycle

c_n の値は高次多項式の解となり代数的には求められない⁸が、条件付き最適化問題の解として数値的には簡単に求められる。Table1 に記した値は、数値計算により得られたものである。

3. extreme Kaleidocycle

前節で n -Kaleidocycle の全体は連立2次方程式(2)の解空間と同一視できることを見た。系全体の回転・鏡映対称性を考えると、 $b_0 = (0, 0, 1), b_1 = (0, \sqrt{1-c^2}, c)$ として良い。次元をカウントしてみると、(c を除いた)変数の数 $3(n-2)$ 、方程式の数 $3 + (n-1) + (n-2)$ であり、期待される DOF は $n-6$ となる。これは(1)とも合致する。 $c = 0$ の 6-Kaleidocycle の期待される DOF は 0 であるが、実際の DOF は 1 であり overconstrained な機構となっている(これを説明するために[1]で(1)式の改良が議論されている)。期待される DOF と本来の DOF が異なるという現象は、extreme n -Kaleidocycle の特異な性質であり、実は n によらずに DOF が 1 である。Extreme n -Kaleidocycle 以外の n -Kaleidocycle はクルクル回るほかに撓む動きができ、(1)に従い generic には $(n-6)$ -DOF を持つ。講演者はリンク機構

⁷同じ c に対して鏡映も存在する。

⁸ $n=7$ の時は 3 次方程式の解なので代数的に求まる。

に詳しい訳ではないが、どれだけ多くのヒンジを持っても DOF が 1 である機構は他に探すことができなかったので、extreme n -Kaleidocycle は非常に珍しい機構の族をなしているのではありませんかろうか。

補足 3.1. Kaleidocycle の全体は、パラメーター c も変数と思つた(2)の実解の全体と同一視できる。 c を一つ固定するごとにこの解空間のスライスが得られ、その連結成分は対応する Kaleidocycle の配位空間となる。Extreme n -Kaleidocycle の配位空間は c が境界値となる場合のスライスであり、そこだけ次元が 1 に落ちている⁹。ここがミソなので、以下に紙数を割いて非常に単純な例で状況を説明したい。

この例でのみ簡単のため、ヒンジではなく任意の方向に向きを変えられる (S^2 の自由度を持つ) ジョイントを考える。Fig.3 の

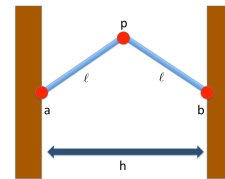


Fig. 3 ーパラメータの値によって DOF が変化する系のシンプルな例

ように、3次元空間内で、それぞれ壁にジョイントで繋がれた二つの棒が、さらにジョイント p で接合された系を考える¹⁰。その配位空間は接合点 p の位置と同一視でき、 $\{p \in \mathbb{R}^3 \mid |p-a|^2 = l^2, |p-b|^2 = l^2\}$ という連立2次方程式の解空間になる。これは、棒の長さ l に依存して

- $2l > h$ のとき配位空間は円周(紙面に垂直な平面内)
- $2l = h$ のとき配位空間は 1 点
- $2l < h$ のとき配位空間は空集合

となる。ここでパラメーター l が境界値 $h/2$ をとるときに配位空間の次元が落ちている。代数方程式の複素数解と比較して、実数解はより複雑な挙動を見せる。

Extreme n -Kaleidocycle は 1-DOF 以外にも不思議な性質をもつので、それらをいくつか紹介したい。[7]では 6-Kaleidocycle の各ヒンジに、回転角度の自乗に比例するエネルギーポテンシャルをもつ巻バネが取り付けられた系を考えている。6-Kaleidocycle をクルクル回すと、状態に応じてこのエネルギーは異なる値を取るので、平衡点を求めるというのがそこのひとつの主題であった。一方、ヒンジの個数が 7 以上の extreme n -Kaleidocycle は、このエネルギーが一定になるという非常に特異な性質を持つ。つまり、 $n \geq 7$ の時、

$$E_{bend} := \sum_{i=1}^n \arccos \left(\frac{(b_{i-1} \times b_i) \cdot (b_i \times b_{i+1})}{|b_{i-1} \times b_i| |b_i \times b_{i+1}|} \right)^2$$

は配位空間上で一定値をとる。これは、クルクル運動中にそれぞれのヒンジ角度は様々な値をとるが、全部合わせるとポテンシャルは一定になるということであり、回すのに力が必要でないということを意味するので理論上も応用上も興味深い。

他にも、各ヒンジの中心に電荷を置いた際のクーロンポテンシャル

$$E_{clmb} := \sum_{i < j} \frac{1}{|\gamma_i - \gamma_j|^\alpha} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

⁹(2) で定まる実代数多様体を Kaleidocycle のモジュライと思い、その c 軸への射影の特異ファイバーを見ている。

¹⁰壁が固定な分(1)は修正しないとそのままは使えない。

さらに有向 extreme n -Kaleidocycle については、各ヒンジの中心に、ヒンジの向きに沿って微小な双極子を置いた時のエネルギーポテンシャル

$$E_{dipl} := \sum_{i < j} \frac{b_i \cdot b_j}{|\gamma_i - \gamma_j|^3} - \frac{3(b_i \cdot (\gamma_i - \gamma_j))(b_j \cdot (\gamma_i - \gamma_j))}{|\gamma_i - \gamma_j|^5}$$

も $n \geq 7$ のとき配位空間上で一定値を取る。上述の巻バネの場合は隣接するヒンジの相互作用のみに依存するエネルギーであるのに対し、こちらは全てのヒンジが互いに寄与するのでより不思議な感じがする。

Table1 で c_n 、後に述べる twist ($c = c_n$ の時のもの)、そして E_{bend} と有向の場合の E_{dipl} の値を列挙する。

Table 1 — extreme n -Kaleidocycle

n	6	7	8	9	15	38
c_n	0	0.2954	0.4700	0.5852	0.8533	0.9773
Tw	1.500	1.416	1.377	1.355	1.309	1.291
E_{bend}	varies	11.9	10.4	9.24	5.60	2.23
E_{dipl}	NA	-4.23	NA	-10.0	-83.7	NA

ちなみに extreme という条件を外して全ての Kaleidocycle を考えると、 E_{bend} は γ_i になるべく平面的で対称性の高い状態で最小値を取るようであり¹¹、extreme n -Kaleidocycle は ($n = 7$ の時を除いて) その極小値すら与えない。

4. 離散化された帯

タイトルにもあるように、extreme n -Kaleidocycle は幾何学的な側面を持つので、最後にその説明をしたい。紙数の都合もあって少し雑なのは容赦願いたい。

3次元空間内の長さ 2π の閉曲線 $\gamma: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3, |\dot{\gamma}(s)| = 1$ を考える。写像 $b: [0, 2\pi] \rightarrow S^2$ であって、 $\forall s, \dot{\gamma}(s) \cdot b(s) = 0, b(0) \cdot b(2\pi) = \pm 1$ を満たすものが与えられた時、 γ と b の組を γ を中心線を持つ帯と呼ぶ。つまり帯とは、曲線上の各点に接線と垂直な方向が定まっているものである。細長い紙の両端を何度かひねって接着したメビウスの帯の様なものをイメージして欲しい。

帯に対してその半ひねり数を、直感的には明らかであるが、正確には Călugăreanu-White の定理を用いて $2(Tw + Wr)$ で定める。ここで、

$$Tw := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{b}(s) \cdot (\dot{\gamma}(s) \times b(s)) ds$$

$$Wr := \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(\dot{\gamma}(s_1) \times \dot{\gamma}(s_2)) \cdot (\dot{\gamma}(s_1) - \dot{\gamma}(s_2))}{|\dot{\gamma}(s_1) - \dot{\gamma}(s_2)|^3} ds_1 ds_2$$

であり、それぞれ twist, writhe と呼ばれる量である。ともに色々な幾何学的解釈を持つが、たとえば、 Tw は $b(0)$ を中心線に沿って平行移動させつつ一周させたものと $b(2\pi)$ とがどれだけ異なっているかを測り、 Wr はあらゆる方向から中心線の射影図を描いた時の平均自己交差数を表す。特に後者は b によらず、中心線のみ依存する量である。直感的には、 Tw は帯が中心線に巻き付く度合い、 Wr は中心線のあばれ具合をあらわしていて、それを足すと全体のひねり数になるという具合である。

Kaleidocycle は、 γ_i を結んだ折れ線を中心線とし、線分 $\gamma_i \gamma_{i+1}$ 上に b_i と b_{i+1} を角速度一定に補間したベクトルが付随した帯

とみなせる (Fig.4 左)。連続曲線の場合、接線の変化の方向を法線、接線と法線の外積を陪法線というのが、 b_i は接続する二つの「接線」 $\gamma_{i-1} \gamma_i, \gamma_i \gamma_{i+1}$ の両方に垂直であるから、符号を除いて陪法線の離散化とも思える。さらに陪法線の変化率を捩率というが、 $\pm c$ は (定数倍を除いて) その離散化とみなせる。

この時 $Tw = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \arccos(b_{i-1} \cdot b_i) = \frac{n \arccos(c)}{2\pi}$ と計算でき、中心折れ線の Wr は例えば [2] で与えられる。Extreme n -Kaleidocycle の場合は、半ひねり数は $c = c_n$ なら $3, c = -c_n$ なら $n - 3$ となる。 $c = c_n$ の場合は、定義より半ひねり数が奇数であるもののうち最もねじれの少ない帯を与えるが、半ひねり数 1 ではなく 3 になるのが不思議である。Table1 を見ると、 $c = c_n$ のとき n が大きくなるにつれ Tw は単調に一定値に収束しているようであり、とすると $2(Tw + Wr) = 3$ より Wr も単調に一定値に収束する。極限として得られる帯やその中心線が何であるのかは分かっていない。クルクル運動に伴って中心線も運動するが、 Tw が一定なので Wr も一定である。これは中心線の接線方向が球面上に描く曲線、つまり Gauss 写像 $s \mapsto \gamma(s)$ を通して見ると興味深い。ただし離散的な Gauss 写像は、球面上のベクトル達 $\frac{\gamma_i - \gamma_{i-1}}{|\gamma_i - \gamma_{i-1}|}$ を大円で結んでできる曲線とする。Gauss-Bonnet の定理より、この曲線が左手に球面から切り取る面積は $2\pi Wr$ に 2π を法として等しい。また E_{bend} は各弧の長さの自乗和となる。クルクル運動に従って Gauss 写像の像は、切り取る面積と各弧の長さの自乗和が共に一定な曲線の運動になる。この時間発展を書き下すこと¹²はまだできていないが、数値実験によるとソリトンらしきものが見え、これが種々のエネルギー一定性の鍵であろう。

中心線の運動は、次のように弾性棒の観点からも解釈が与えられる。帯の中心線の各点に、接線、 b 、その外積を対応させると、中心線に沿った正規直交系の族 (adapted frame) を定める。Adapted frame 付きの曲線は弾性棒のモデルとしてよく扱われる (c.f. [3])。 $n \geq 7$ である extreme n -Kaleidocycle では、 $b_{i-1} \cdot b_i$ が一定であることと E_{bend} が一定であることから、クルクル運動中に等方的な Kirchhoff 弾性エネルギーもやはり一定になることがわかる。[3] の理論との関連も非常に気になるところである。

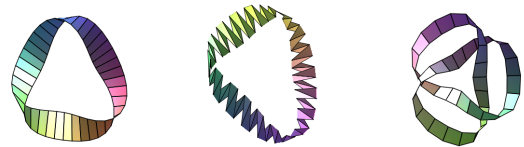


Fig. 4 — $c = c_n, -c_n$ に対応する extreme 38-Kaleidocycle の帯表示 (左・中央)。extreme 19-Kaleidocycle のヒンジの中心をヒンジの方向に一定のオフセットでスライドし二周させてできる 38-Kaleidocycle (右) メビウスの帯の帯の中心を切ったものとみなせ、クルクル回る三葉結び目となる [11]。

最後に、半ひねり数は整数であるので、この値が異なる (2) の二つの解は違う連結成分に属する。連結成分がどうなっているのかという問いは数学的に興味深いですが、半ひねり数が $3, n - 3$ 以外で、 c が境界値をとる n -Kaleidocycle を数値的に探索してみたところ、少なくともここで述べた extreme Kaleidocycle のような特異な性質は持たないようである。

¹¹例えば n が偶数の時は、 $c = 0$ な Kaleidocycle で、 z 軸方向からみた時にヒンジが一つおきに z 軸と平行に正多角形の配置をとるもの

¹²クルクル運動は、角運動量を保ちつつ一周して全体の向きが変わる、いわゆる falling cat motion をとる。例えば無重力下で向きを変えるアンテナなどへの応用も可能かもしれない。

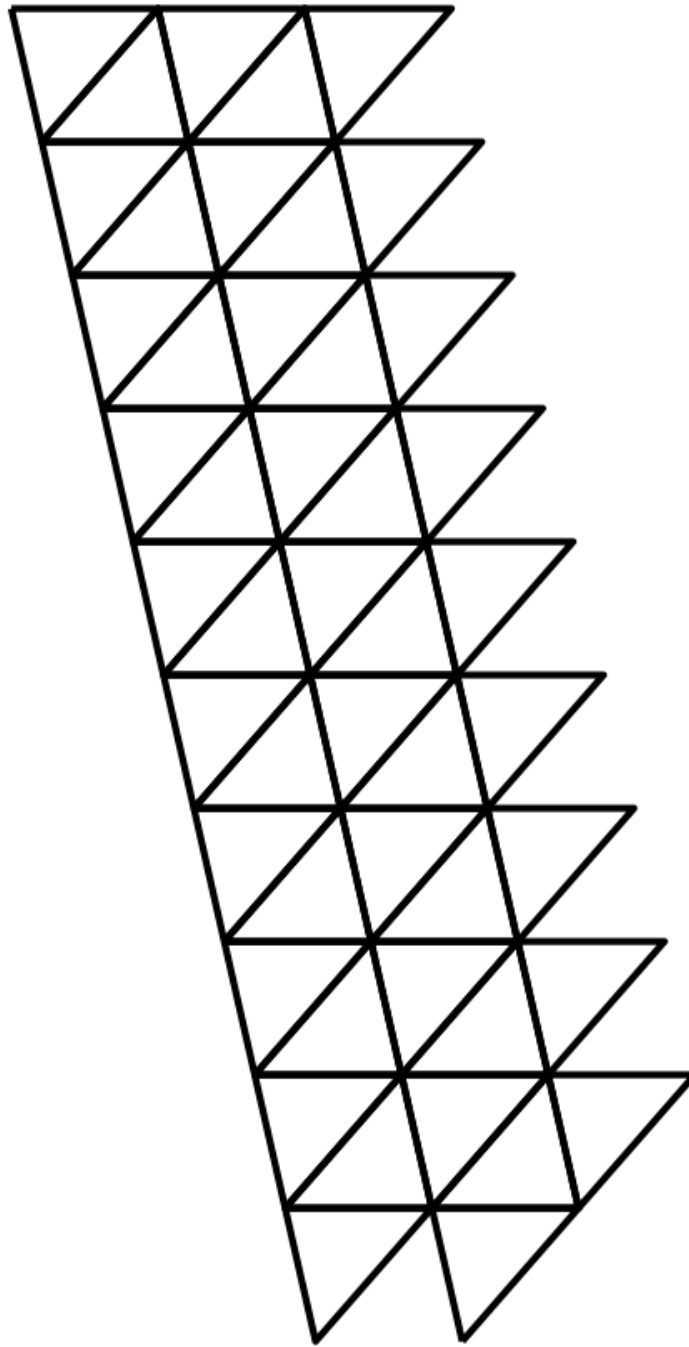


Fig. 5 — extreme 9-Kaleidocycle の展開図。右端と下端はのりしろ。

謝 辞

本講演の内容の一部は E. Fried 氏, M. Grunwald 氏, J. Schönke 氏 (OIST) との共同研究に基づく。講演者は JST さきがけ (Grant Number JPMJPR16E3) の支援を受けている。

参 考 文 献

- [1] P. W. Fowler and S. D. Guest, *A symmetry analysis of mechanisms in rotating rings of tetrahedra*, Proc. R. Soc. A 461, 1829–1846 (2005).
- [2] K. Klenin and J. Langowski, *Computation of writhe in modeling of supercoiled DNA*, Biopolymers 54, 307–317 (2000).
- [3] J. Langer and D. Singer, *Lagrangian Aspects of the Kirchhoff Elastic Rod*, SIAM Reviews 38, 605–618 (1996).
- [4] R. J. Milgram and J. C. Trinkle, *The geometry of configuration spaces for closed chains in two and three dimensions*, Homology, Homotopy and Applications 6.1, 237–267 (2004).
- [5] P. Pavešić, *A Topologist's View of Kinematic Maps and Manipulation Complexity*, arXiv:1707.03899.
- [6] M. Raghavan and B. Roth, *Inverse Kinematics of the General 6R Manipulator and Related Linkages*, J. Mech. Des 115(3), 502–508 (1993).
- [7] C. Safsten, T. Fillmore, A. Logan, D. Halverson and L. Howell *Analyzing the Stability Properties of Kaleidocycles*, J. Appl. Mech 83(5), 051001 (2016).
- [8] D. Schattschneider and W. M. Walker, *M. C. Escher Kaleidocycles*, Pomegranate Communications: Rohnert Park, CA (1987). (TASCHEN; Reprint edition (2015)).
- [9] A. J. Sommese, J. D. Hauenstein, D. J. Bates, and C. W. Wampler, *Numerically Solving Polynomial Systems with Bertini*, Software, Environments, and Tools, Vol. 25, SIAM, Philadelphia, PA (2013).
- [10] Z. You and Y. Chen, *Motion Structures: Deployable Structural Assemblies of Mechanisms*, Taylor & Francis 2011.
- [11] D. M. Walba et al., *The thyme polyethers: An approach to the synthesis of a molecular knotted ring*, Tetrahedron 42, 1883–1894 (1986).