

有理ホモトピー論の紹介

鍛冶 静雄

京都大学理学研究科修士2年

2004/2/19

1 導入

ある十分大きな空間のクラスの有理ホモトピー型とある種の比較的計算が簡単な代数との間に、一対一の対応があるというのが有理ホモトピー論の基本となる定理。以下では、この定理を記述するための準備、定理のステートメント、具体的な応用例、の順に進める。

2 準備

以下では代数は全て有理数体 \mathbb{Q} 上、grading は非負整数とする。

Definition 2.1. *CDGA* を *Commutative Differential Graded Algebra*, つまり,

- $ab = (-1)^{|a||b|}ba$
- *degree +1* の *graded derivation* d で $d^2 = 0$ をもつ。

とする。ここで、 $|a|$ は a の次数。

Definition 2.2. ベクトル空間 V に対し、*commutative graded algebra* $\wedge V$ を、

$$\text{Tensor}[V \text{ の even generators}] \otimes \text{Exterior}[V \text{ の odd generators}]$$

で定義する。 $\wedge V$ には *word length* による *filtration* $\wedge^{\geq i} V$ がある。

$(A, d) \in \text{CDGA}$ について、 $(A, d) \hookrightarrow (A, d) \otimes (\wedge V, d)$ で、次を満たすものを *KS-extension* と呼ぶ。 V の *filtration*, $V = \bigcup_{i=0}^{\infty} V_i, V_0 \subset V_1 \subset \dots$ があって、 $d: V_i \rightarrow \wedge V_{i-1}$ を満たす。

$\mathbb{Q} \rightarrow (\wedge V, d)$ が *KS-extension* のとき、 $(\wedge V, d)$ を *Sullivan algebra* とよぶ。また、 $\text{Im} d \subset \wedge^{\geq 2} V$ をみたす *Sullivan algebra* を *minimal model* とよぶ。

3 基本定理

ここでの基本群に関する仮定をはずした理論は ([THT]) を参照.

Lemma 3.1 ([BG]). *Connected* ($H^0(\) = 0$), *augmented*, *of finite type* ($H^i(\)$ が有限次元, $\forall i$) *CDGA* に, *weak equivalence* を *quasi-isomorphism*, *cofibration* を *KS-extension* と同型な射, *fibration* を全射とする *closed model category* ($[Q]$) の構造が入る. これを $CDGA^*$ であらわす.

Lemma 3.2. *Connected*, *nilpotent*¹, *based*, *of finite type*, *CW-space* の *category* に, *weak equivalence* を $H^*(\ ; \mathbb{Q})$ に同型を誘導する写像, *fibration*, *cofibration* を通常のそれとして, *closed model category* の構造がはいる. これを CW^* であらわす.

Theorem 3.3 ([BG]). 次の '良い' *adjoint functors* があって,

$$A_{PL} : Top \rightleftarrows CDGA : |\cdot|,$$

それらはホモトピー圏の間の同値 $M : Ho(CW^*) \rightleftarrows Ho(CDGA^*) : |\cdot|$ を誘導する.

また, *adjunction* $X \mapsto |M(X)|$ は *0-localization*.

$CDGA^*$ のホモトピー圏は,

{augmented Sullivan algebra/quasi isomorphism, homotopy class of maps }

と同値であり, さらにこれは,

{augmented minimal model/isomorphism, homotopy class of maps }

と同値である. つまり, ある種の CW space の有理ホモトピー型は minimal model の同型類と一対一対応がある.

Remark 3.4. $[Q]$ *Connected differential graded Lie algebras* にもある *closed model category* の構造が入り, *1-connected based CW-spaces* との間にホモトピー圏の同値がある.

次に, 基本定理から導かれる幾つかの重要な性質をあげる.

Corollary 3.5. *1-connected based CW-space* X の *minimal model* $M(X)$ を $(\wedge V, d)$ とする.

- $V^i \cong \text{hom}(\pi_i(X), \mathbb{Q})$.

¹ $\pi_1(\)$ が nilpotent かつ $\pi_i(\) (i \geq 2)$ が nilpotent $\pi_1(\)$ 可群

- $d_1 = V \xrightarrow{d} \bigwedge V \longrightarrow \bigwedge V / \bigwedge^{\geq 3} V$ で定めるとき,

$$\langle d_1 v; x \wedge y \rangle = (-1)^{|x|+|y|+1} \langle v; [x, y] \rangle, \quad v \in V, x, y \in \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}.$$

ここで $[x, y]$ は *Whitehead product* をあらす.

- *fibration* \Leftrightarrow *KS-extension* の対応がある.
- X が *H-space* のとき $d = 0$.

いくつかの空間について, minimal model をあげておく. ここで右下の添字は degree をあらわす.

Example 3.6. • $M(S^{2n+1}) = (\bigwedge e_{2n+1}, 0)$

- $M(S^{2n}) = (\bigwedge(e_{2n}, w_{4n-1}), dw = e^2)$
- $M(SU(n)) = (\bigwedge(x_3, x_5 \dots, x_{2n-1}), 0)$
- $M(\mathbb{C}P(n)) = (\bigwedge(x_2, w_{2n+1}), dw = x^{n+1})$
- $M(K(V, n)) = (\bigwedge V, 0)$

はじめの4つの例は cohomology 環の構造だけから簡単に計算できるが, 上の Corollary によって, その \mathbb{Q} -ホモトピー Lie 環の構造が分かる. 特に n 次球面のホモトピー群は $i \geq 2n$ で消えていることがわかるが, つぎの章ではこれの一般化をあげる.

逆に, Eilenberg-McLane 空間 $K(V, n)$ については, ホモトピー群から \mathbb{Q} -cohomology 環の構造が分かる.

4 Rationally elliptic space

応用例として rationally elliptic space のいくつかの性質を調べる. ここではトポロジと代数を併用し有理ホモトピー論の利点を生かした証明を紹介する. 代数のみで証明している [FH] と見比べるとその利点がよくわかる.

Definition 4.1. *1-connected CW-complex* X が次の性質を満たすとき, *rationally elliptic space* であるという.

- $\dim \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} < \infty$,
- $\dim H^*(X; \mathbb{Q}) < \infty$.

すなわち X の *minimal model* $(\bigwedge V, d)$ について,

- $\dim V < \infty$,

- $\dim H^*(\wedge V, d) < \infty$.

rationally elliptic space の例としては, S^n , 有限次元 H -space, 有限次元 Lie 群の等質空間, 底空間・ファイバーが rationally elliptic な fibration の全空間などがある.

Definition 4.2. $f.\dim(\wedge V, d)$ を $H^i(\wedge V, d) = 0, (i > n)$ なる最小の n とする.

Lemma 4.3. $(\wedge V, d)$ を rationally elliptic space の minimal model で,

$$V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle, dv_i \in \wedge(v_1, \dots, v_{i-1})$$

とする. 特に $dv_1 = 0$ である.

$(\wedge W, \bar{d}) = (\wedge(v_2, \dots, v_k), \bar{d}) = (\wedge V, d)/(v_1)$ で定めるとき,

1. $(\wedge W, \bar{d})$ は rationally elliptic,
2. $f.\dim(\wedge W, \bar{d}) = \begin{cases} f.\dim(\wedge V, d) + 2n - 1 & (|v| = 2n), \\ f.\dim(\wedge V, d) - 2n - 1 & (|v| = 2n + 1). \end{cases}$

Proof. 1. 次の事実による. ここで $\text{cat}_0(X)$ は X の 0-localization X_0 の LS-category をあらわす.

- $\dim \pi_*(\) \otimes \mathbb{Q} < \infty$ のとき,

$$\dim H^*(\) < \infty \Leftrightarrow \text{cat}_0(\) < \infty.$$

- $f : X \rightarrow Y, \pi_*(f) \otimes \mathbb{Q} : \text{injective} \Rightarrow \text{cat}_0 X \leq \text{cat}_0 Y$.

これを, 射影 $(\wedge V, d) \rightarrow (\wedge W, \bar{d})$ に適用する.

2. $|v| = 2n$ の場合,

$$0 \longrightarrow (\wedge V, d) \xrightarrow{\wedge v} (\wedge V, d) \longrightarrow (\wedge W, \bar{d}) \longrightarrow 0,$$

に付随する long exact sequence

$$\dots \rightarrow H^i(\wedge V, d) \rightarrow H^{i+2n}(\wedge V, d) \rightarrow H^{i+2n}(\wedge W, \bar{d}) \rightarrow H^{i+1}(\wedge V, d) \rightarrow \dots$$

を見る.

$|v| = 2n - 1$ の場合も同様に,

$$0 \longrightarrow (\wedge W, \bar{d}) \xrightarrow{\wedge v} (\wedge V, d) \longrightarrow (\wedge W, \bar{d}) \longrightarrow 0,$$

に付随する long exact sequence を見る.

□

Definition 4.4. $\dim V < \infty$ なる Sullivan algebra $(\bigwedge V, d)$ に対し, $V = P \oplus Q$, P : odd degrees, Q : even degrees として,

$$(\bigwedge V)_{-s}^r = (\bigwedge Q \otimes \bigwedge^s P)^{r-s},$$

$$F^r(\bigwedge V) = (\bigwedge V)_*^{\geq r},$$

で filtration をいれ, それに付随する spectral sequence

$$(E_0, d_0) = (\bigwedge V, \delta) \Rightarrow H(\bigwedge V, d)$$

を odd spectral sequence という.

$$P = \langle x_1, \dots, x_p \rangle, Q = \langle y_1, \dots, y_q \rangle \text{ とする.}$$

Lemma 4.5. $(\bigwedge V, d)$: elliptic $\Leftrightarrow \mathbb{Q}[y_1, \dots, y_q]/(\delta x_1, \dots, \delta x_p)$: finite dimensional.

Proof. (\Rightarrow): $\exists n, y_i^n \in (y_1, \dots, y_{i-1}, \delta x_1, \dots, \delta x_p)$ を i に関する帰納法で示せばよい.

Lemma 4.3 を繰り返し用いることで, $\bigwedge(y_i, \dots, y_q, x_1, \dots, x_p)$: elliptic がわかる. よって,

$$\exists n, \exists \Phi \in \bigwedge(y_i, \dots, y_q, x_1, \dots, x_p), y_i^n = \bar{d}\Phi.$$

ここで次数を考えると, $\Phi \in \bigwedge V \otimes P$ なので,

$$d\Phi = \sum g_j(y) \delta x_j + \Omega', \quad g_j(y) \in \bigwedge Q, \Omega' \in \bigwedge V \otimes P,$$

とかける. $f(y) \in \bigwedge Q, \Omega \in \bigwedge V \otimes P$ として,

$$\bar{d}\Phi = d\Phi + f(y) + \Omega$$

とかくと,

$$y_i^n = \sum g_j(y) \delta x_j + f(y) + \Omega + \Omega',$$

とかける. よって $\Omega + \Omega' = 0$ がわかる.

(\Leftarrow): odd spectral sequence より. □

次にホモトピー群に関して著しい結果を挙げる.

Theorem 4.6. $|y_i| = 2a_i, |x_i| = 2b_i - 1, n = f.\dim(\bigwedge V, d), \delta x_i = f_i(y_1, \dots, y_q)$ とする.

1. $n = \sum^p (2b_i - 1) - \sum^q (2a_i - 1)$.
2. $\dim P \geq \dim Q$.
3. $n \geq \sum^q 2a_i$.

$$4. 2n - 1 \geq \sum^p (2b_i - 1).$$

Proof. 1. Lemma 4.3 から明らか.

2. Lemma 4.5 によって, $\dim \mathbb{Q}[y_1, \dots, y_q]/(\delta x_1, \dots, \delta x_p) < \infty$ より, $q \leq p$.

3. $a_1 \geq \dots \geq a_q, b_1 \geq \dots \geq b_p$ と並び替えておく.

$$\frac{\mathbb{Q}[y_1, \dots, y_q]}{(\delta x_1, \dots, \delta x_p)} \rightarrow \frac{\mathbb{Q}[y_1, \dots, y_r]}{(f_1(y_1, \dots, y_r, 0, \dots, 0), \dots, f_p(y_1, \dots, y_r, 0, \dots, 0))}$$

$$y_i \mapsto 0, \quad i > r.$$

を考えると, Lemma 4.5 より, 少なくとも r 個の $f_i(y_1, \dots, y_r, 0, \dots, 0)$ は 0 でない. それらを $f_{j_1}, \dots, f_{j_r}, j_r \geq r$ とする.

$$2b_r = |f_r| \geq |f_{j_r}| \geq 4a_r, \quad 1 \leq r \leq q,$$

$$n \geq \sum^q (2b_i - 1) - \sum^q (2a_i - 1) = \sum^q 2(b_i - a_i) \geq \sum^q 2a_i.$$

4.

$$n = \sum^p b_i + \sum^p (b_i - 1) - \sum^q (2a_i) \geq \sum^p b_i + \sum^q (b_i - 2a_i) \geq \sum^p b_i.$$

□

Euler 数 χ についても, 次のような結果がある.

Theorem 4.7. 1. $p > q \Rightarrow \chi = 0$.

2. $p = q \Rightarrow \chi = \prod b_i / \prod a_i$.

Proof. 多項式を以下のように定義すると,

$$F(z) = \sum \lambda_r z^n, \quad \lambda_r = \sum (-1)^i \dim(\bigwedge V)_{-k}^r.$$

ここで明らかに次が成り立つ.

$$F(z) = \prod^p (1 - z^{2b_i}) / \prod^q (1 - z^{2a_i}).$$

よって, $F(1)$ が収束していれば, $\chi = F(1)$ がいえる.

$(\bigwedge V)_*^r$ が d -不変であることから, $\lambda_r = \chi_{H((\bigwedge V)_*^r, \delta)}$ となる.

よって, odd spectral sequence をもちいて上の結果を得る.

$$F(1) = \sum \lambda_r = \chi_{H(\bigwedge V, \delta)} = \chi_{H(E_0, d_0)} = \chi_{H(E_\infty, d_\infty)} = \chi_{H(\bigwedge V, d)} = \chi.$$

□

Remark 4.8. $p = q$ の時, $\lambda_r = \dim H^r(\bigwedge V, d)$ となることも示すことができる.

参考文献

- [BG] A.K.Bousfield and V.K.A.M.Gugenheim: On PL de Rham theory and rational homotopy type. *Memoirs of the Amer. Math. Soc.* 179 (1976)
- [FHT] Y.Félix, S.Halperin, J.Thomas: *Rational Homotopy Theory*. Graduate Texts in Math, 205, New York: Springer-Verlag 2001.
- [Q] D.G.Quillen: *Homotopical algebra*. Lecture Notes in Math. 43, Springer-Verlag, 1967.
- [Q] D.G.Quillen: Rational homotopy theory, *Ann. of Math.* 90(1969),205-295.
- [FH] J.Friedlander, S.Halperin: An arithmetic characterization of the rational homotopy groups of certain spaces. *Inventiones Math.* 53 (1979), 117-133.
- [THT] A.Gómez-Tato, S.Halperin, D.Tanré: Rational homotopy theory for non-simply connected spaces, *Trans. Amer. Math.* 352(1999),1493-1525.