Chow rings of Complex algebraic Groups

2008/01/17 COE Teatime Kyoto Univ.

問：$^\forall G$: simple 1-conn cpx Lie group について。

Chowring $A^*(G)$ を決定せよ

⇓ 分類定理

$G = \underbrace{SL_n, Spin_n, Sp_n}_{n \geq 1}, \underbrace{G_2, F_4, E_6, E_7, E_8}_{1つずつ}$

古典型　　例外型

注：$SL_2 = Spin_3 = Sp_1$ 等

low rank ではかぶる

⇓ [Fulton 参照]

X : variety に対し

- $A^*(X) = \bigoplus_{i \geq 0} A^i(X)$
- $A^i(X) = \left\{ \dfrac{\text{codim } i \text{ alg.cycle}}{\text{rational equiv}} \right\}$
- intersection product

  $A^i \otimes A^j \to A^{i+j}$
- cycle map $A^i \to H^{2i}$ (fundamental class)

  A^i ↑ cpx dim　　H^{2i} ↑ real dim.
- alg cycle : (singular) sub.var の $\mathbb{Z}$ 係数 linear sum

rational equiv : $^\exists$ codim $i-1$ の sub.var 内で linear equiv

§歴史

$G \supset B$: Borel sub gp (maximal solvable, どれとっても共役なのでよい)

$\Rightarrow$ G/B : proj. var になる。「flag variety」とよぶ。

<u>例</u> (1-connでない!)

$G = GL_n$
$B =$ 上三角行列全体
$\Rightarrow G/B = \underbrace{\{0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{C}^n\}}$ "flag"の空間

色々な cohomology theory $h^*(G/B)$ の積構造を調べるのが $\boxed{\text{Schubert Calculus}}$ ← 代数キカ, 組合, 表現論, symplectic…

(はやりは T同変 equiv $h^*_T(G/B)$,
$K_T(G/B)$, $Q_T(G/B)$)

∘ $A^*(G)$ と何の関係が?

<u>Thm (Grothendieck 1958)</u>
[参: Brion]

① cycle map $A^*(G/B) \xrightarrow{\simeq} H^*(G/B : \mathbb{Z})$

② $p : G \to G/B$: proj

$\Rightarrow p^* : A^*(G/B) \twoheadrightarrow A^*(G)$

$\operatorname{Ker} p^* = (A^1(G/B))$

<u>Cor</u> $A^*(G) \simeq H^*/(H^2)$

この2つがわかればよい

今後: $H^* := H^*(G/B : \mathbb{Z})$

§ H^* ($= H^*(G/B : \mathbb{Z})$)

[修正済] $G \supset K$: maximal cpt sub.

$B \supset T$: 〃 torus

ℓ : rank of G ($=\dim T$)

W : Weyl gp

(例: $GL_n \supset U_n$
対角行列全体
n
n次対称群)

Fact $K \hookrightarrow G$ induces $K/T \overset{\text{diffeo}}{\simeq} G/B$

1. Borel 表示

"Thm ?"

$$H^* \simeq \frac{\overset{H^*(BT:\mathbb{Z})}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{Z}[w_1 \cdots w_\ell]}} \otimes \text{多項式環 } R}{(\text{ideal})}$$

← (shur Q-poly, P-poly 等)

例 ⊗R するか $G = GL_n$ or Sp_n のとき

Thm (Borel 1953)

$$H^* \simeq \frac{\mathbb{Z}[w_1 \cdots w_\ell]}{(\text{Weyl群の不変式})}$$ (coinvariant alg of W)

↓ 拡張

Thm (Toda 1975)

over $\mathbb{Z}$ で $^\forall G$ について
H^* のある表示

(fibration
$K \hookrightarrow K/T \to BT$ を 代数トポロジー的な研究)

・具体的な表示は Borel (1953), Bott-Samelson (1958),
Toda-Watanabe (1974), Nakagawa (2001〜)

$\boxed{\text{方針}}$ Borel表示で 2次の生成元 $w_1 \cdots w_\ell = 0$ とおけば $A^*(G) = H^*/(H^2)$ が求まる!

しかし ⇒ その表示では 生成元の 意味が わからない
↖ alg cycle で代表 されるべき

そこで　2. Schubert 表示（デファクトスタンダード）

<u>Thm【Chevalley 1994】</u>　Bruhat 分解　$G = \coprod_{w \in W} BwB$

← indexed by Weyl gp.

$\xrightarrow{\text{induces}}$ cell decomp　$G/B = \coprod_{w \in W} BwB/B$

$BwB/B \simeq \mathbb{C}^{\ell(w)}$ の closure を X_w とかき

Schubert variety とよぶ　　← singular sub.var になる

(<u>$\ell(w)$ について</u>：W は simple reflection で生成される coxeter gp.
w を ↑の積でかいたときの最短表示の長さ)

3.　1 vs 2

$\boxed{\text{方針}}$　1 で計算したものを 2 に変換

⟹ "divided difference operator" (Demazure 1973, B-G-G 1982)

<u>Thm</u>　Borel 表示 $\xrightarrow{\text{characteristic map の表示}}$ Schubert 表示
$\xleftarrow{\text{Giambelli formula}}$

§ Future Work

- $B \subset P$：parabolic に一般化
- H^* のかわりに何か h^*_T
- "Thm" の R：schubert poly のすみか
  Schubert poly の"発見" 特に例外型
  意味は？
  - Toda 表示と他のものの比較
    R のとりかた（indecomposable Schuber var）
- 上の問の GKM-Theory (1998) をつかった組合せ的解しゃく（& 逆に代数トポロジーへの応用

参考文献

[1] S. Billey and M. Haiman, *Schubert polynomials for the classical groups*, J. Amer. Math. Soc. **8** (1995), no. 2, 443–482.

[2] I.N. Bernstein, I.M. Gelfand and S.I. Gelfand, *Schubert cells and the cohomology of the spaces G/P*, L.M.S. Lecture Notes vol.69 Cambridge Univ. Press, 1982, 115-140.

[3] M.Brion, *Equivariant cohomology and equivariant intersection theory*, arXiv:math.AG/9802063v1.

[4] A. Borel, *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts*, Ann. of Math. **57** (1953), 115-207.

[5] C. Chevalley, *Sur les décomposition cellulaires des espaces G/B*, Algebraic Groups and their Generalizations: Classical Methods (W. Haboush, ed.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 56, Part 1, Amer. Math. Soc., 1994, 1-23.

[6] R. Bott and H. Samelson, *Application of the theory of Morse to the symmetric spaces*, Amer. J. Math. **80** (1958), 964-1029.

[7] M. Demazure, *Invariants symmétriques des groupes de Weyl et torsion*, Invent. Math. **21** (1973), 287-301.

[8] S. Fomin and A.N. Kirillov, *Combinatorial B_n-analogues of Schubert polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc. **348**(1996), no. 9, 3591–3620.

[9] W.Fulton, *Intersection theory*, volume 2 of Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]. Springer-Verlag, Berlin, second edition, **1998**.

[10] M. Goresky, R. Kottwitz, and R. MacPherson, *Equivariant cohomology, Koszul duality, and the localization theorem*, Invent. Math. **131** (1998), no. 1, 25–83.

[11] A. Grothendieck, *Torsion homologique et sections rationnelles*, Exposé 5 in Anneaux de Chow et applications, Séminaire C. Chevalley, 1958, Multigraphié, Secrétariat Mathematique, Paris.

[12] V. Kac, *Torsion in cohomology of compact Lie groups and Chow rings of reductive algebraic groups*, Invent. Math. **80** (1985), 69-79.

[13] S. Kaji and M. Nakagawa, *The Chow rings of the algebraic groups E_6 and E_7*, preprint, arXiv:math.AT/07093702

[14] A. Lascoux and P. Pragacz, *Operator calculus for $\widetilde{Q}$-polynomials and Schubert polynomials*, Adv. Math. **140** (1998), no. 1, 1–43.

[15] R. Marlin, *Anneaux de Chow des groupes algebriques* $\mathrm{SO}(n), \mathrm{Spin}(n), \mathrm{G}_2$ *et* F_4, Publications Math. d'Orsay, 95-7419 (1974).

[16] 戸田宏, 三村護. リー群の位相 (上)(下), 紀伊國屋数学叢書. 紀伊國屋書店, 東京, 1978.

[17] M. Nakagawa, *The integral cohomology ring of E_7/T*, J. Math. Kyoto Univ. **41** (2001), 303-321.

[18] M. Nakagawa, *A description based on Schubert classes of cohomology of flag manifolds*, preprint, arXiv:math.AT/07090785v1.

[19] M. Nakagawa, *The integral cohomology ring of E_8/T*, preprint.

[20] H. Toda, *On the cohomology ring of some homogeneous spaces*, J. Math. Kyoto Univ. **15** (1975), 185-199.

[21] H. Toda and T. Watanabe, *The integral cohomology ring of F_4/T and E_6/T*, J. Math. Kyoto Univ. **14** (1974), 257-286.