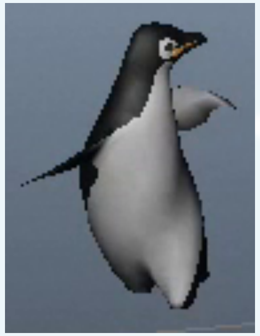
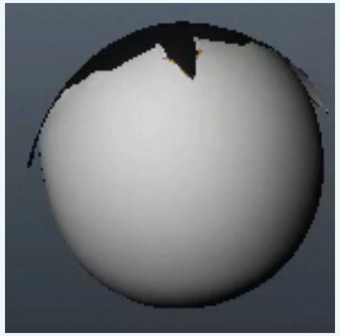
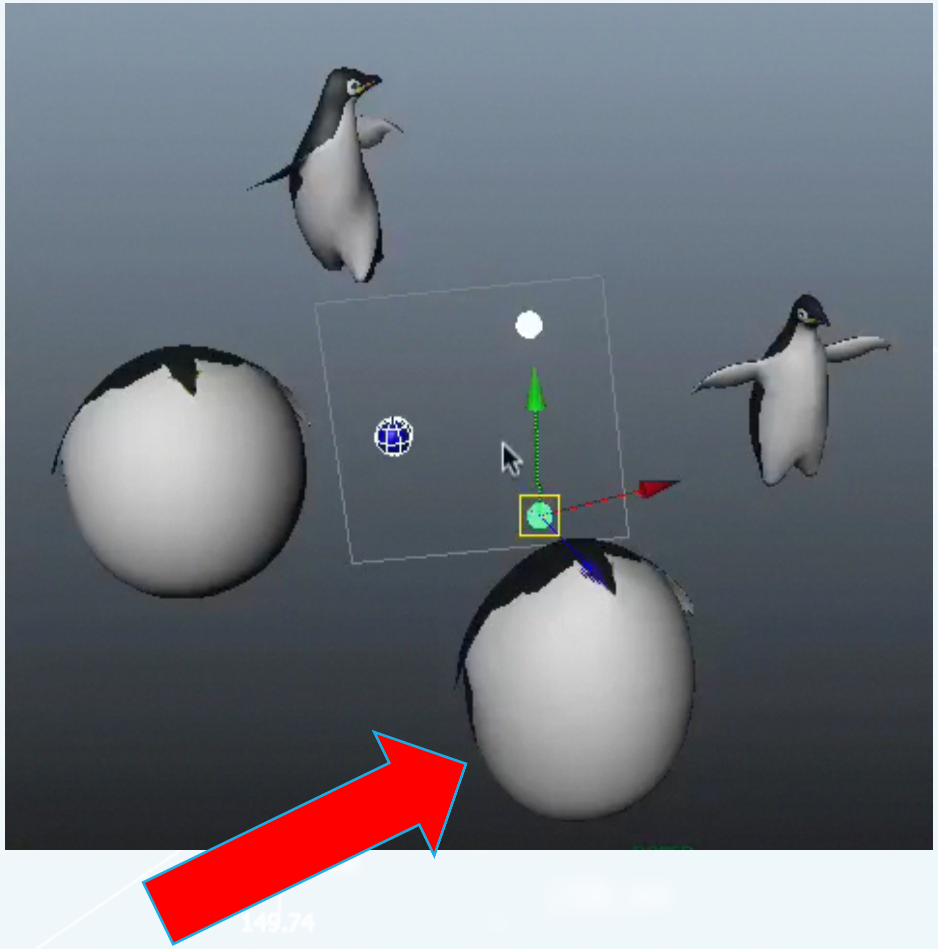
数学で形をデザインする


+

+


3

=



数学と諸分野の連携にむけた若手数学者交流会 2021　2021年3月14日

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所　鍛冶 静雄

鍛えて治すではない

自己紹介

名前 鍛冶 静雄 (かじ しずお)

所属 九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所

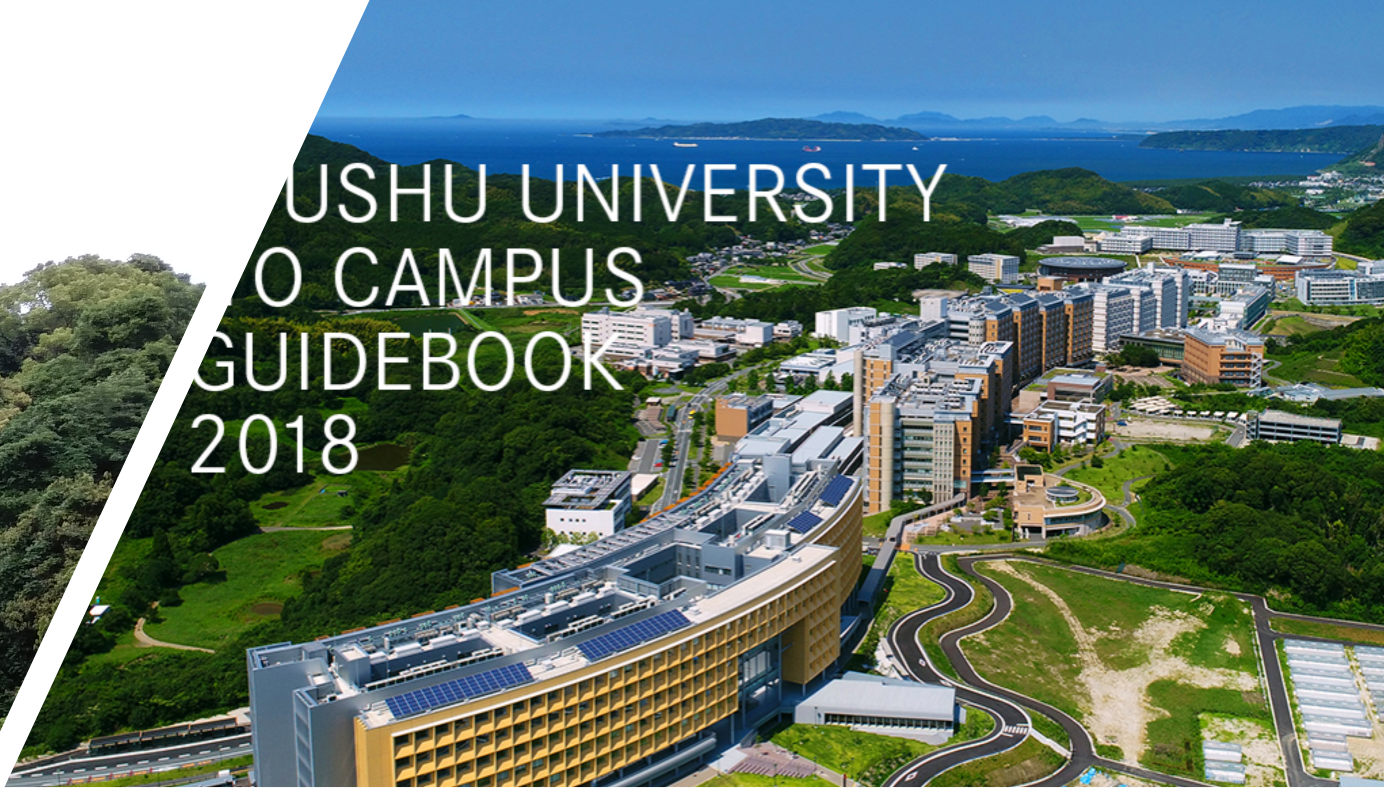
研究 トポロジーとその応用

宣伝 数学セミナーに連載を持っていました
(先のペンギン算は2021年3月号を参照)

かたちを算する

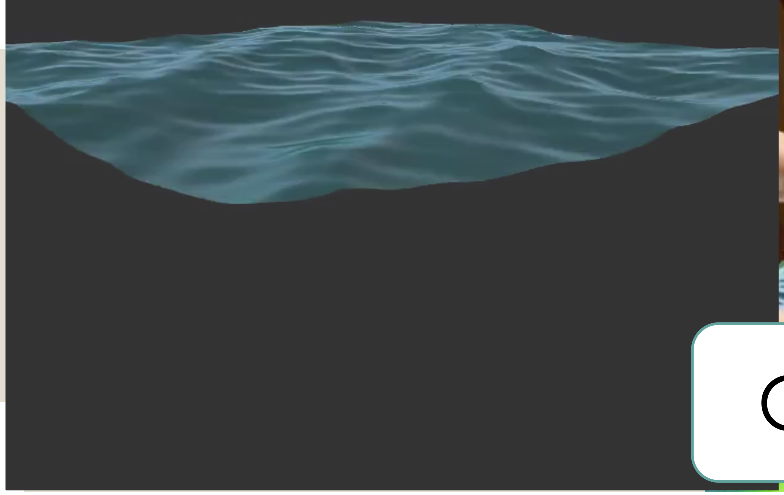
研究テーマ：定量化しにくい概念・データに構造を

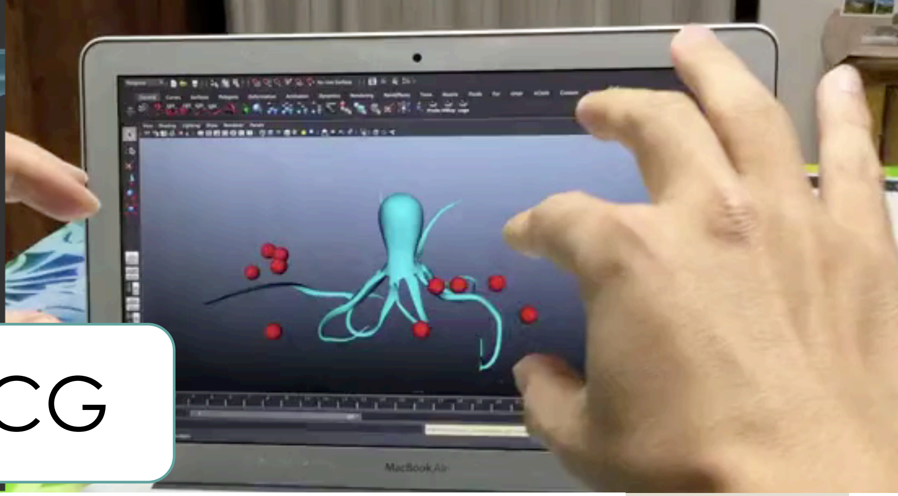
職場



形の研究

数学では
トポロジー・幾何学



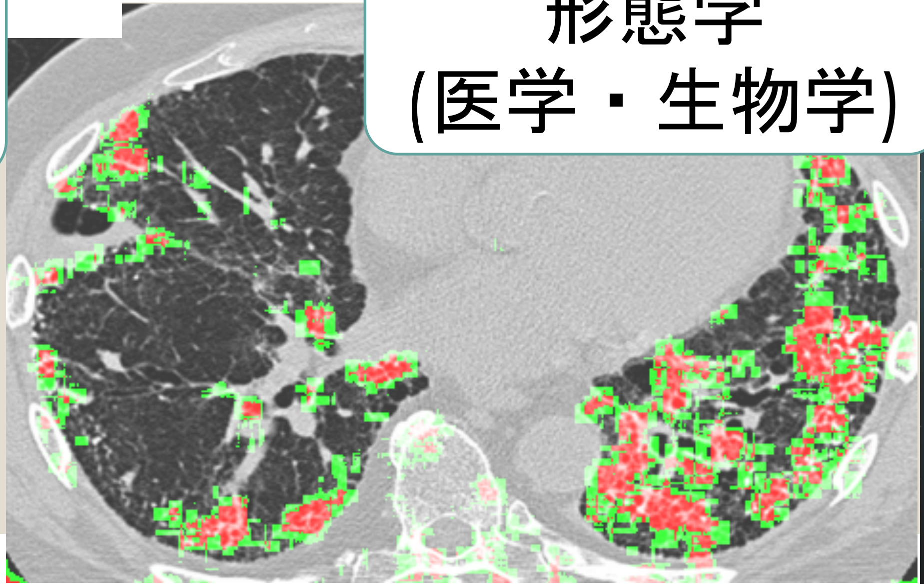


CG

ものづくり
(造船・建築)

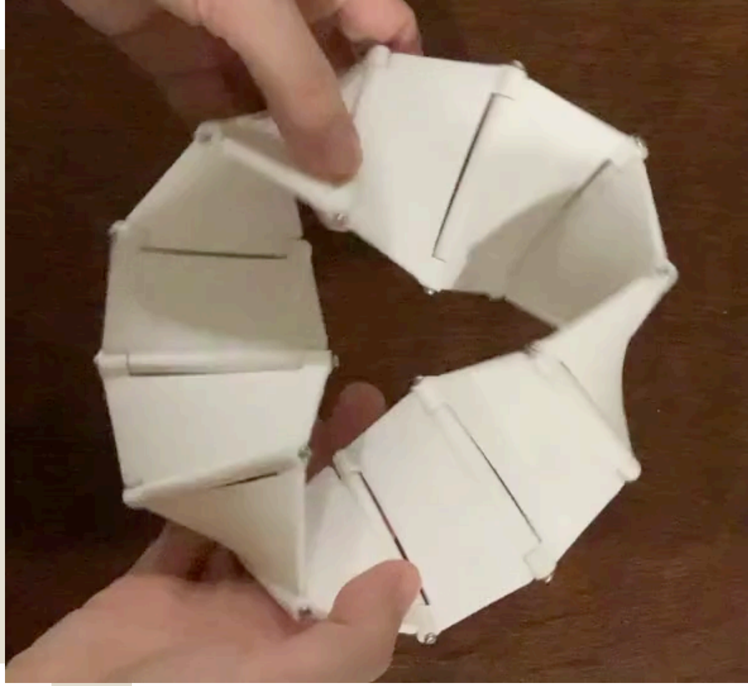
非破壊検査
(土木)

形態学
(医学・生物学)

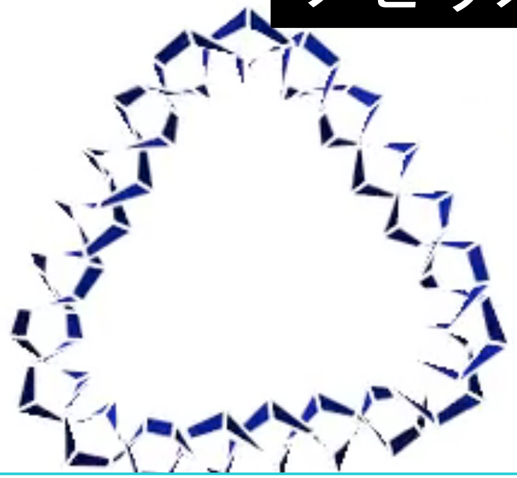


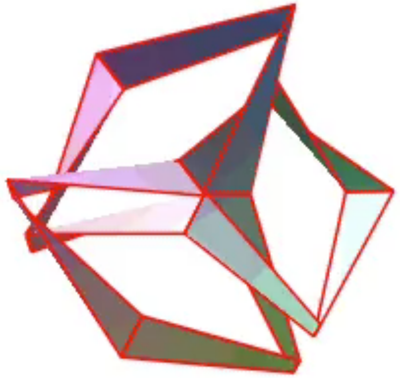
VR

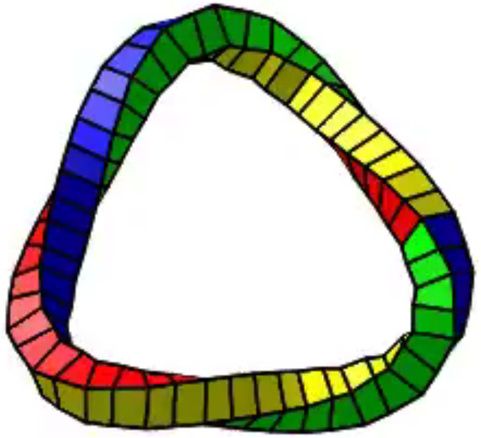
今日の話



メビウス・カライドサイクル



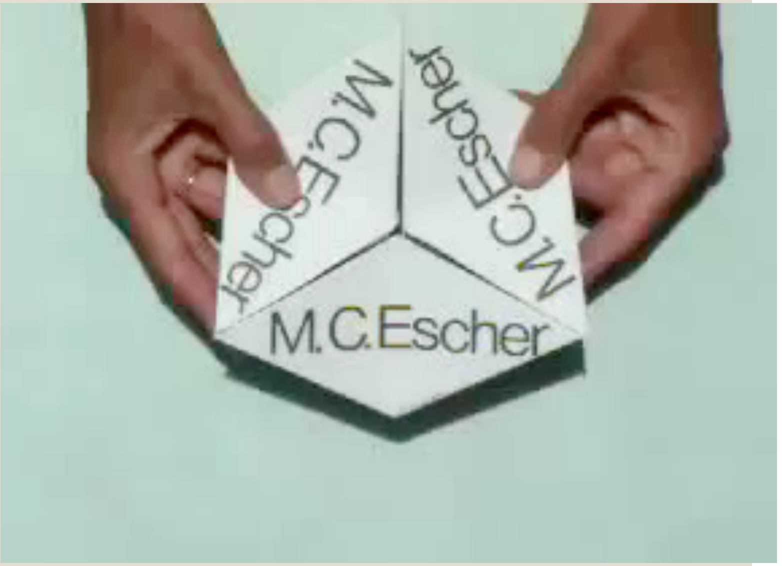


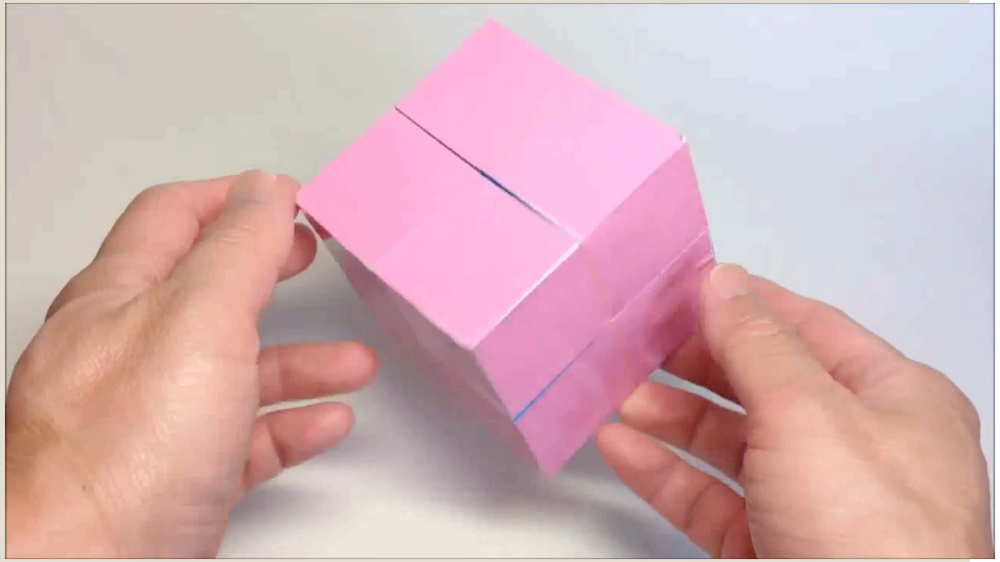


折り紙や3Dプリンタで作ることが可能な、くるくると可動するリンク機構
１自由度・高効率性・メビウス の帯のトポロジーといった、実用上・学術的に重要な性質を備える
数学：代数幾何・離散微分幾何・トポロジーなど高度な現代数学が交錯
工学：一次元自由度のリンク機構という古典的な研究対象における重要な発見。ロボット工学・合成科学などへの応用可能性
アウトリーチ：知育玩具やオブジェ、折り紙の形で現代数学の成果を広く伝える媒体

きっかけ

- ある４年生の卒業研究
  「平面・立体の六角形くるくるパズルの解析」
  当時は毎年たくさんの４年生を抱えていて，
  一人ひとりにテーマを探していた．
  ヘクサフレクサゴンとカライドサイクルという
  折り紙の解析をした．
- 「お遊び」としてその後放置
- JSTさきがけに「かたちと動きの数理基盤」
  という課題で採択．
  「お遊び」を堂々とできる！
- たまたま興味を持ってくれた人と共同研究開始





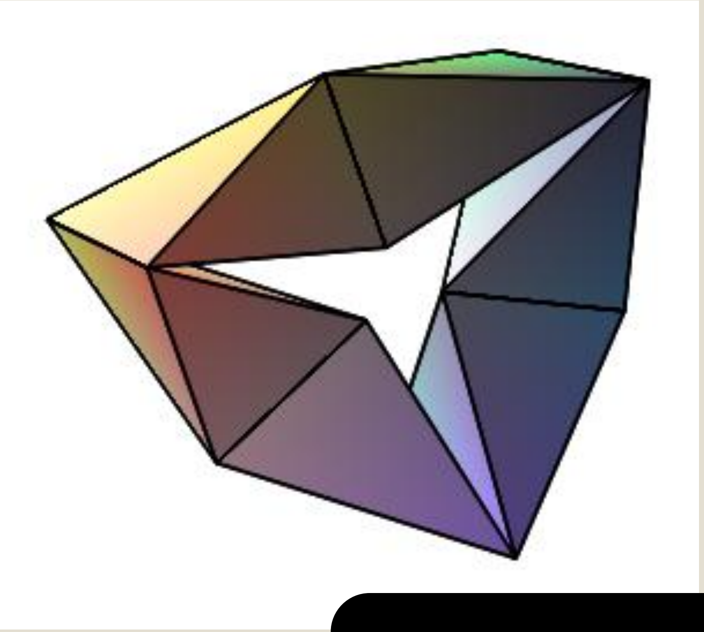
「お遊び」から思いもよらず面白い研究へ

どうやって定式化する？

詳しくは数セミ
2019年6月号
2021年1月号

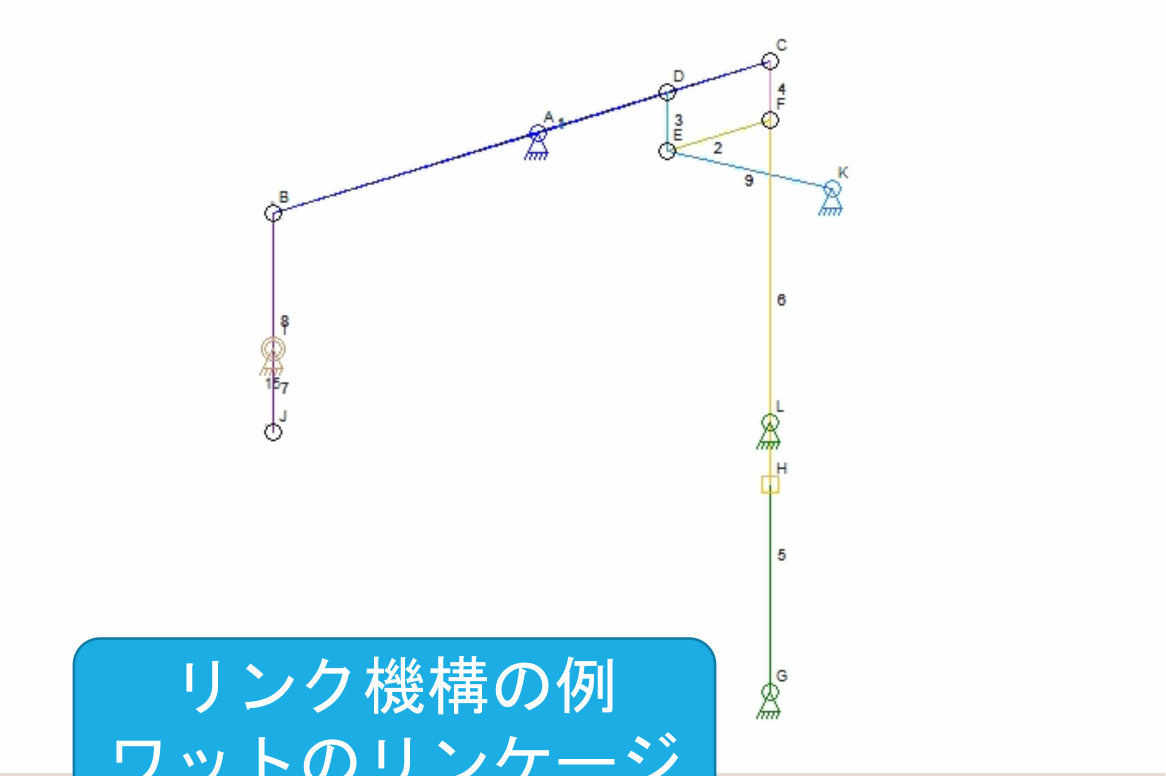
リンク機構 = 有限グラフの $\mathbb{R}^3$ への等長埋め込み

辺で繋がれた2点間の距離を保つ



2n 頂点
5n 辺

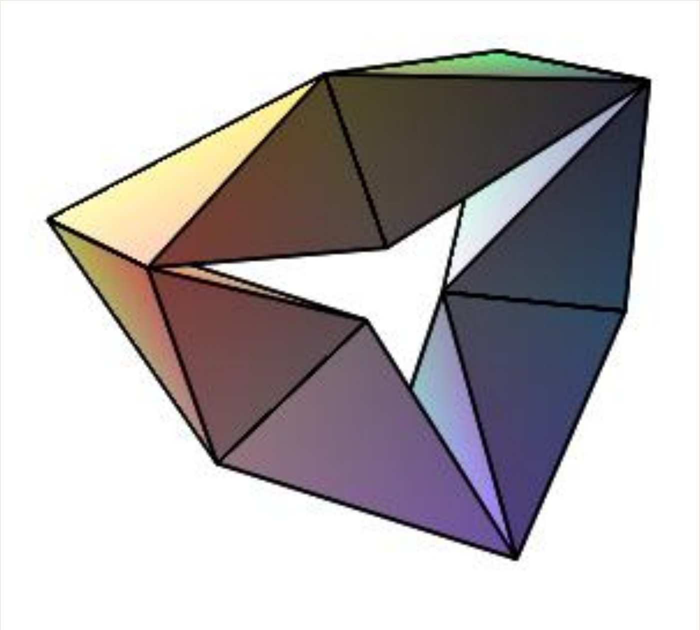
特別なリンク機構
として特徴づけよう



リンク機構の例
ワットのリンケージ

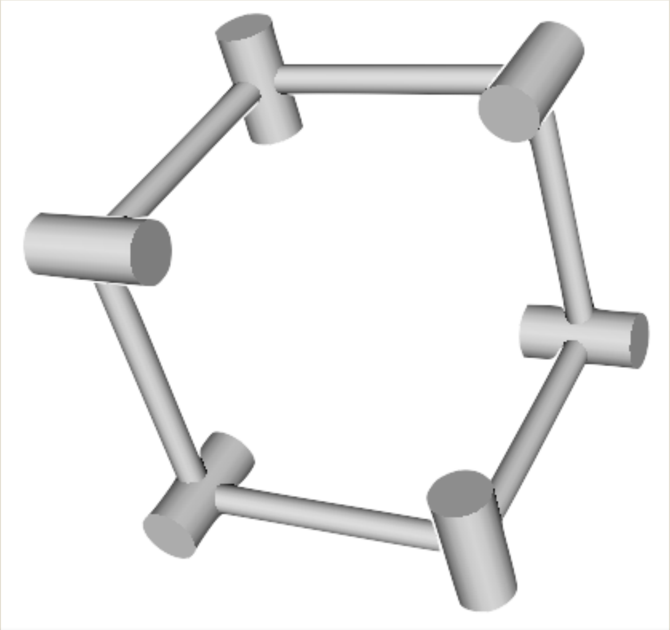
特徴づけ：generalised Kaleidocycle = ヒンジで構成された homogeneous な環状リンク機構

パーツが合同
=隣接ヒンジ関係
がどこも同じ



Kaleidocycle

2n joints
5n bars



Bricard linkage

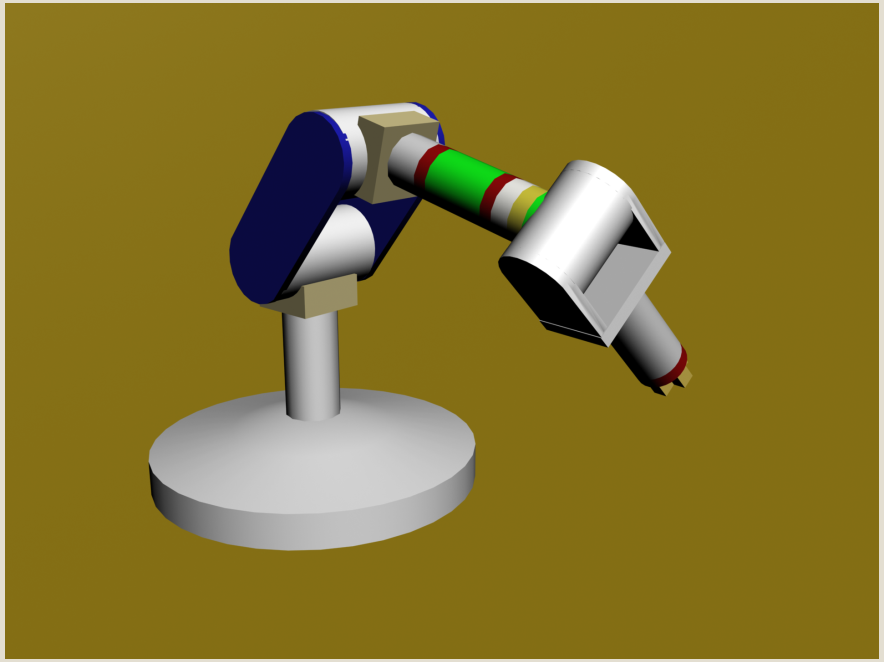
n hinges
n bars

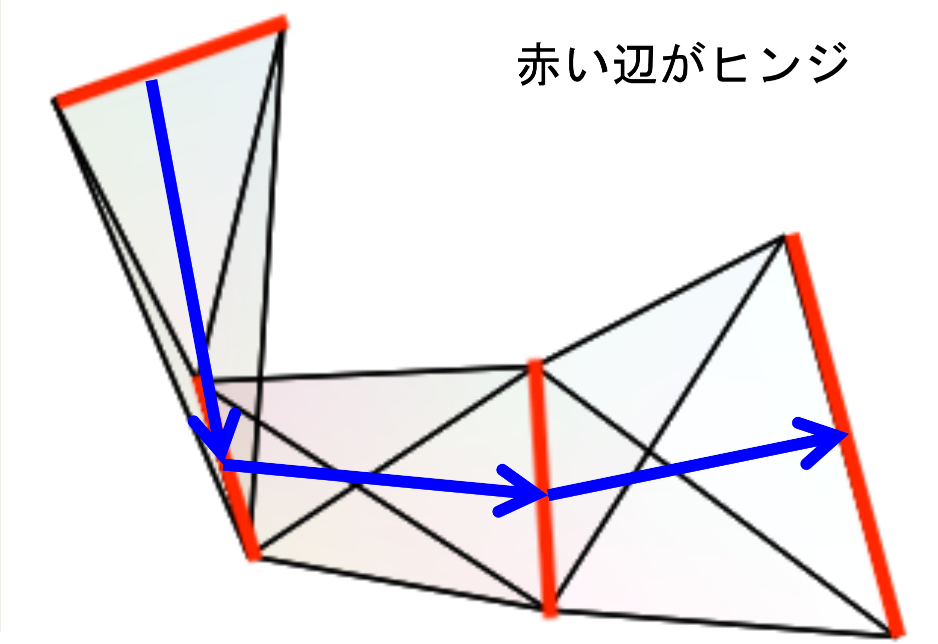
リンクから曲線への翻訳

ロボットアーム
Denavit-Hartenberg parameter

離散曲線(折線)
曲率&捩率

ヒンジ = 陪法線
Kaleidocycle = 捩率一定離散曲線！



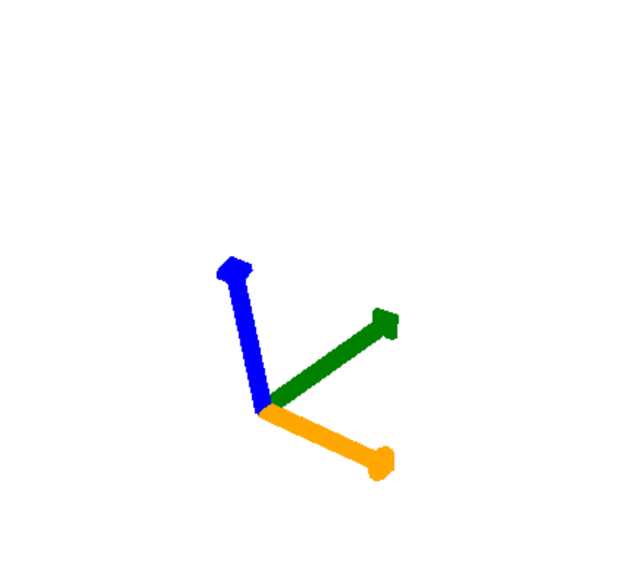


Darboux の表示：曲線を陪法線で表す

"陪法線": $\{ b_i \in S^2 \mid 0 \leq i \leq n \}$ から,

$$\gamma_i = \sum_{i=0}^{i-1} b_i \times b_{i+1} \in R^3$$

で曲線(折線)を作れる.



閉曲線: $\sum_{i=0}^{n-1} b_i \times b_{i+1} = 0$

$$b_0 = \begin{cases} b_n \ (oriented) \\ -b_n \ (non\ oriented) \end{cases}$$

捩率一定: $b_i \cdot b_{i+1} = c \ \forall i$

Kaleidocycle の全体
を定義する２次方程式系
($c \in [-1,1]$ を
パラメーターとする族)

この実解の空間を調べよう！

カライドサイクルの動きの自由度=次元

公式：解空間の次元 ≒ 変数の数 – 方程式の数

変数：$\{ b_i \in S^2 \mid 0 \leq i \leq n \}$ ただし，b_0, b_1, b_nは固定

n はヒンジの個数

2(n-2)

閉曲線条件: $\sum_{i=0}^{n-1} b_i \times b_{i+1} = 0$

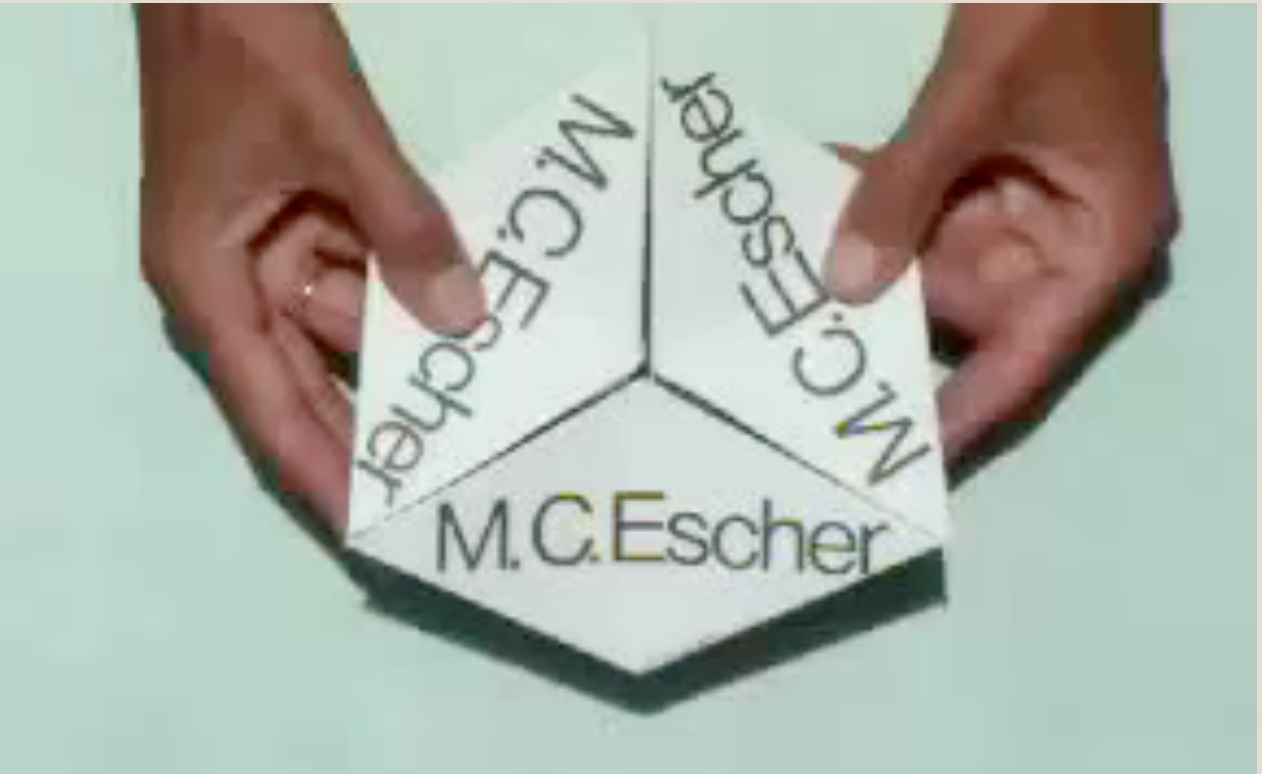
-3

振率一定条件: $b_i \cdot b_{i+1} = c \ \forall i$

-(n-1)

答え：n-6 (これは generic に成り立つ)

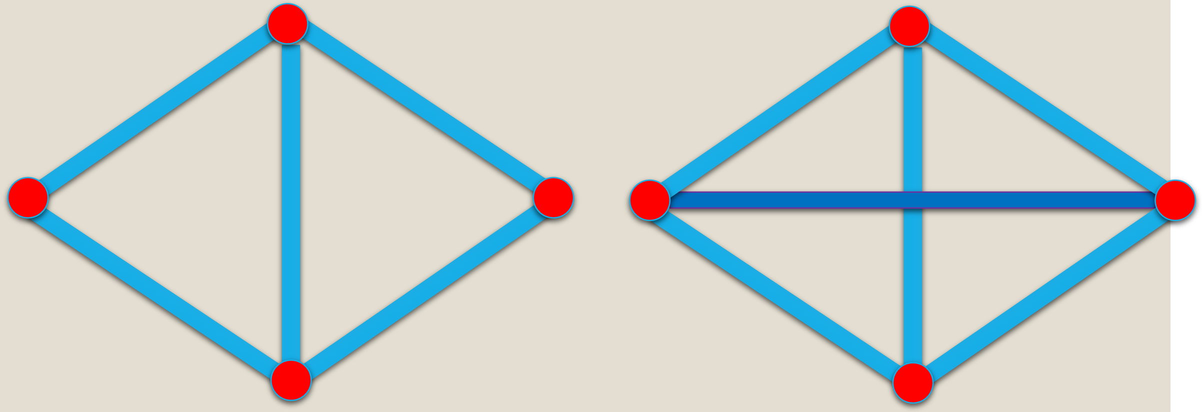
Generic でない場合: over-constrained



方程式が冗長な系
(公式で左辺が大きい)
を <u>over-constrained</u> という
これは線型代数でも起きる現象

- 古典的なカライドサイクルは n=6
- これは対称性が高く，方程式が redundant

詳しくは Fowler-Guest2005



紺の辺は redundant

Generic でない場合を求めて

先の２次方程式系で，c (角度の cosine) も変数と見なそう．
その解空間全体 M から，c を対応させる写像

$$c\colon M \to [-1,1]$$

は non-oriented に対応する連結成分に制限すると，
最大値 $a_n < 1$ を持つ．
特に a_n は特異値

$a_n = 1$ は角度 0 なので，円筒になるだけで
メビウスの帯を作れない

実際，$c = a_n$の場合は不思議なことが起こる！

Generic でない場合: under-constrained

Conjecture (K-Schoenke, patented as "Mobius Kaleidocycle", 2018)

$c = a_n$ の時，解空間の次元はちょうど 1

つまり，くるくる運動のみ．(撓んだりせず制御性が良い)

また，その時カライドサイクルは最小の捻り数を持ち，

それは 3πである．

つまり，1π 捻りの離散的かつ homogeneous なメビウスの帯は存在しない．

「次元公式」より解空間の次元が落ちるのは，実解に特有の現象．この様な系を under-constrained という．

メビウス・カライドサイクルは，under-constrained かつ非自明な解空間を持つ唯一の知られたリンク機構

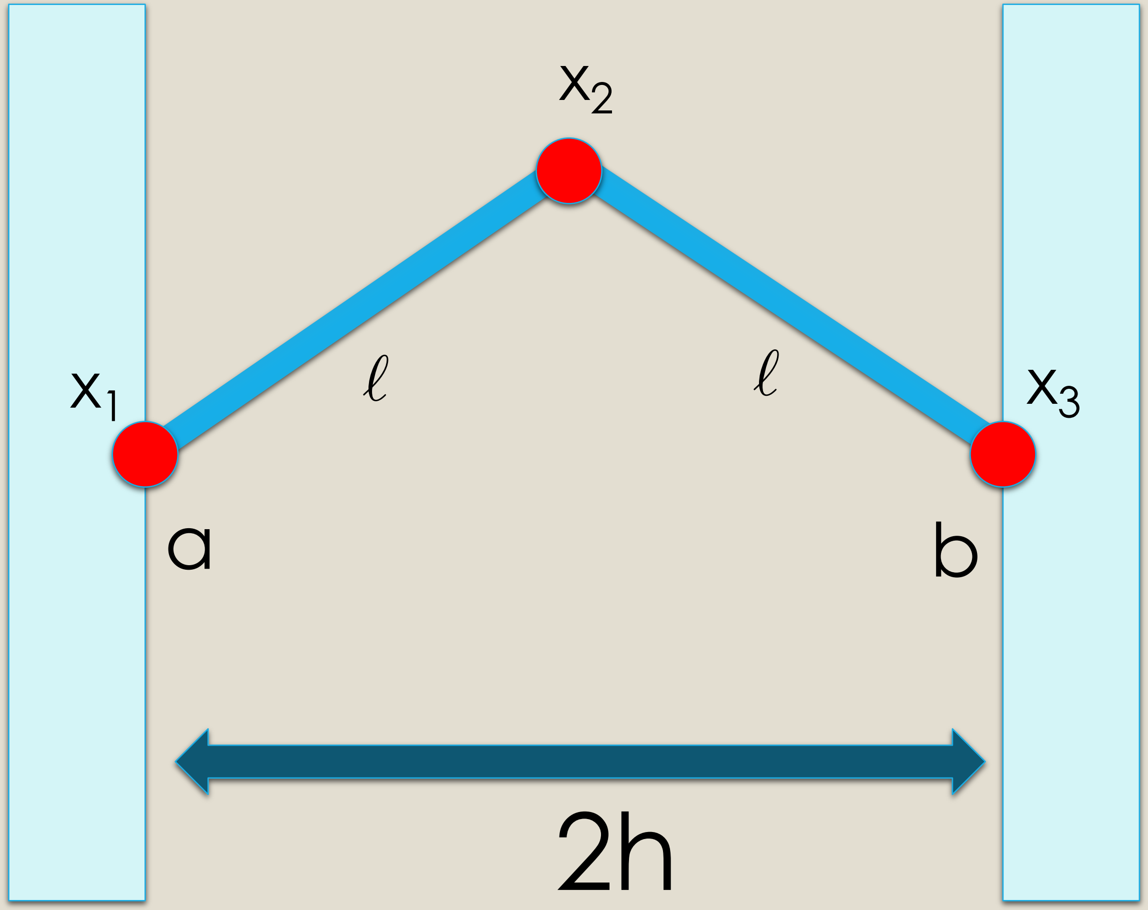
Under-constrained

$x_1, x_2, x_3 \in R^3$に関する２次方程式系

$$(x_1 - a)^2 = 0$$
$$(x_3 - b)^2 = 0$$
$$(x_2 - x_1)^2 = l^2$$
$$(x_2 - x_3)^2 = l^2$$

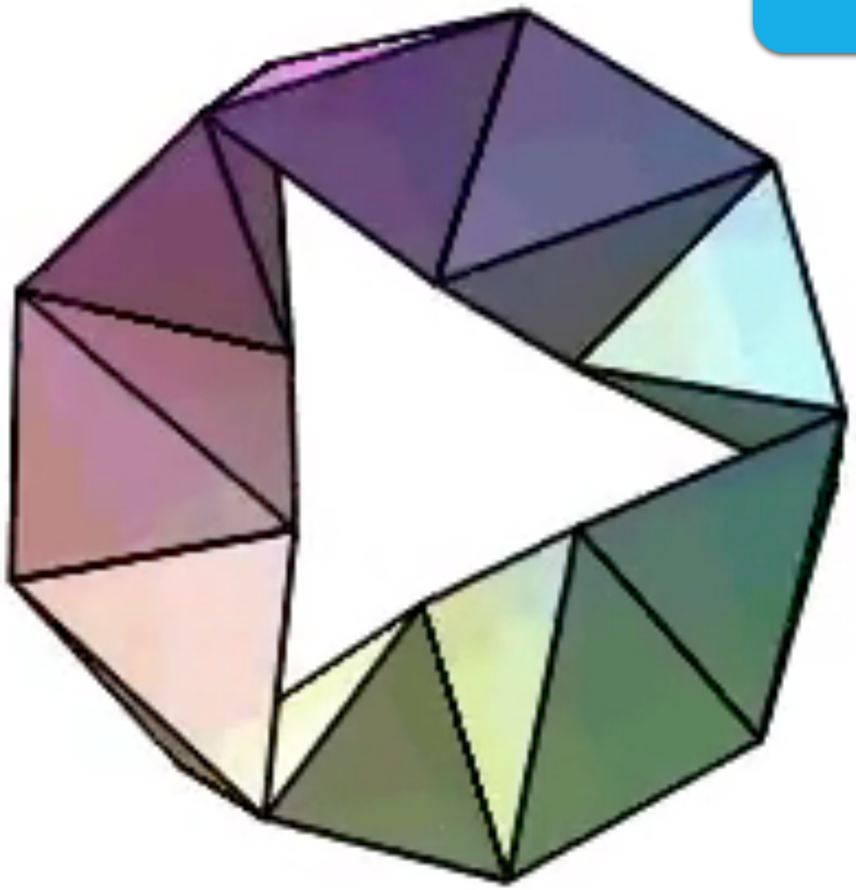
の実解の空間は

$$M_3(L) = \begin{cases} S^1 & (l > h) \\ * & (l = h) \\ \emptyset & (l < h) \end{cases}$$



(腕の長さ)パラメーター l に応じて解空間の次元が落ちる
これは実解ゆえの現象

この動きを知りたい



一般には n-6 次元あるので，その中から1次元を選ぶのは恣意性が避けられない．
メビウス・カライドサイクルの動きを観察して，特徴的な周期軌道を見つけよう

飽きるまで眺める
(数値実験する)と見えてくるのは

1. 弧長と捩率は一定 (これはいつでも)
2. 速度ベクトルは osculating plane 上
   (➔ writheが保存)
3. どの点の速度ベクトルも同じ

以上の条件で特徴付けられる動きは以下を満たす

Theorem (K-Kajiwara-Park)

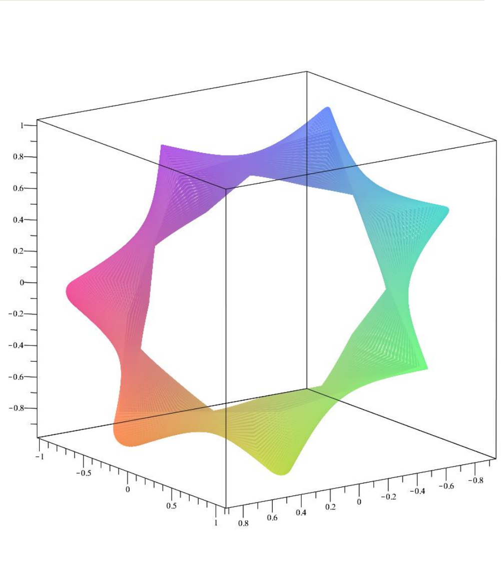
曲率 $\kappa_i = \cos(\angle t_i t_{i-1})$ は次を満たす

$$\kappa_i = \frac{1}{2}(\theta_{i+1} - \theta_{i-1}) \qquad \frac{d}{dt}(\theta_{i+1} \mp \theta_i) = C \sin\left(\frac{\theta_{i+1} \pm \theta_i}{2}\right)$$

これらは適当な極限で以下の方程式に一致

potential mKdV $\theta_T + \frac{1}{2}(\theta_X)^3 + \theta_{XXX} = 0.$

sine-Gordon $\theta_{XT} - \sin(\theta) = 0.$



実代数的集合の上に，半離散可積分方程式が１次元軌道を定める！

保存量

Corollary

1. sine-Gordon 方程式に従う軌道上で以下は保存

$$\sum_i \cos\frac{\theta_{i+1}-\theta_i}{2} \qquad \sum_i \kappa_i$$

2. (proved a few days ago by S. Shigetomi)
   mKdV または sine-Gordon 方程式に従う軌道上で以下は保存

$$\sum_i \log\left(1+\tan^2\left(\frac{\kappa_i}{2}\right)\right)$$

Elastic energy の
離散化(の一つ)

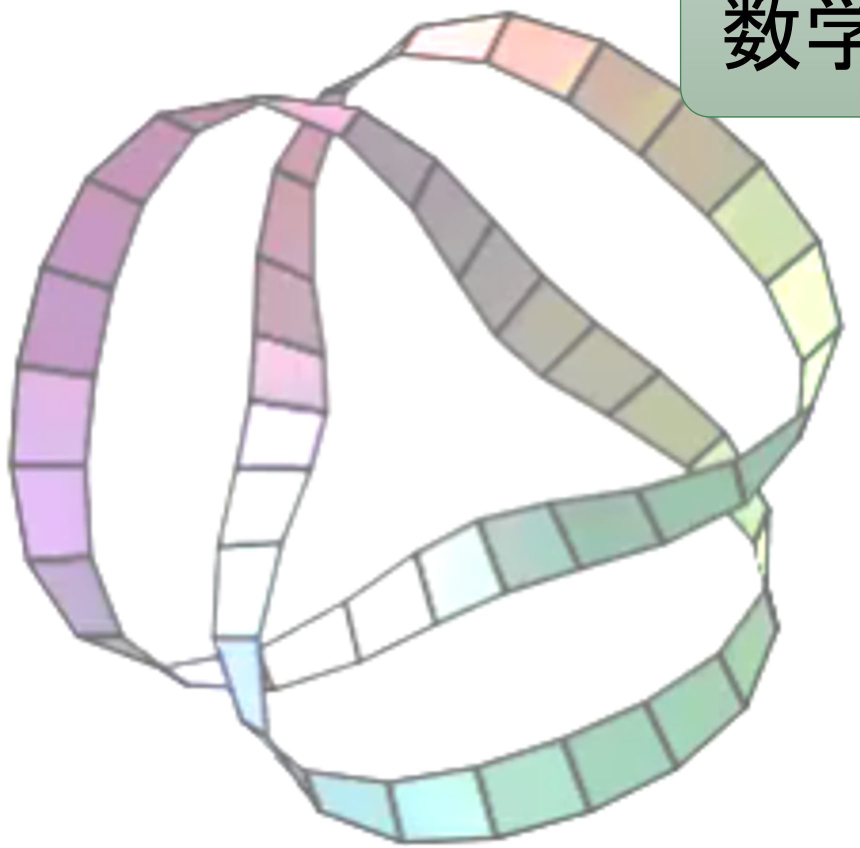
他にも物理的に意味を持ついくつかの
エネルギーが保存することが
数値実験で確認されている．適切な離散化を見つけることが課題

Dictionary

Applied Applied Maths.
“純粋” vs “応用”から“純粋” + “応用”へ

工学

- リンク機構の配位空間の解析
- １自由度のリンク機構の発見
- 工学的に重要な１自由度を、トポロジカルな制約で達成
- 一方向に繰り返す不思議な運動
- 物理的・エネルギー的に特異な性質



数学

- 二次方程式系で定まる実代数多様体のトポロジー
- 特異なファイバーでの次元が１に落ちること
- その特殊性は、対応する帯のひねり数に由来する制約
- 離散可積分系で記述される軌道
- 可積分系の保存量

応用先の実対象と、純粋数学が本質的に呼応し、まさに表裏一体に循環する
相互の要請がフィードバックサイクルを生む理想的な研究になった

連続 vs 離散

Image from TU Wien website

コンピューターは離散的な対象しか扱えない

図形を扱いたければ離散的に表現する必要がある

連続の世界

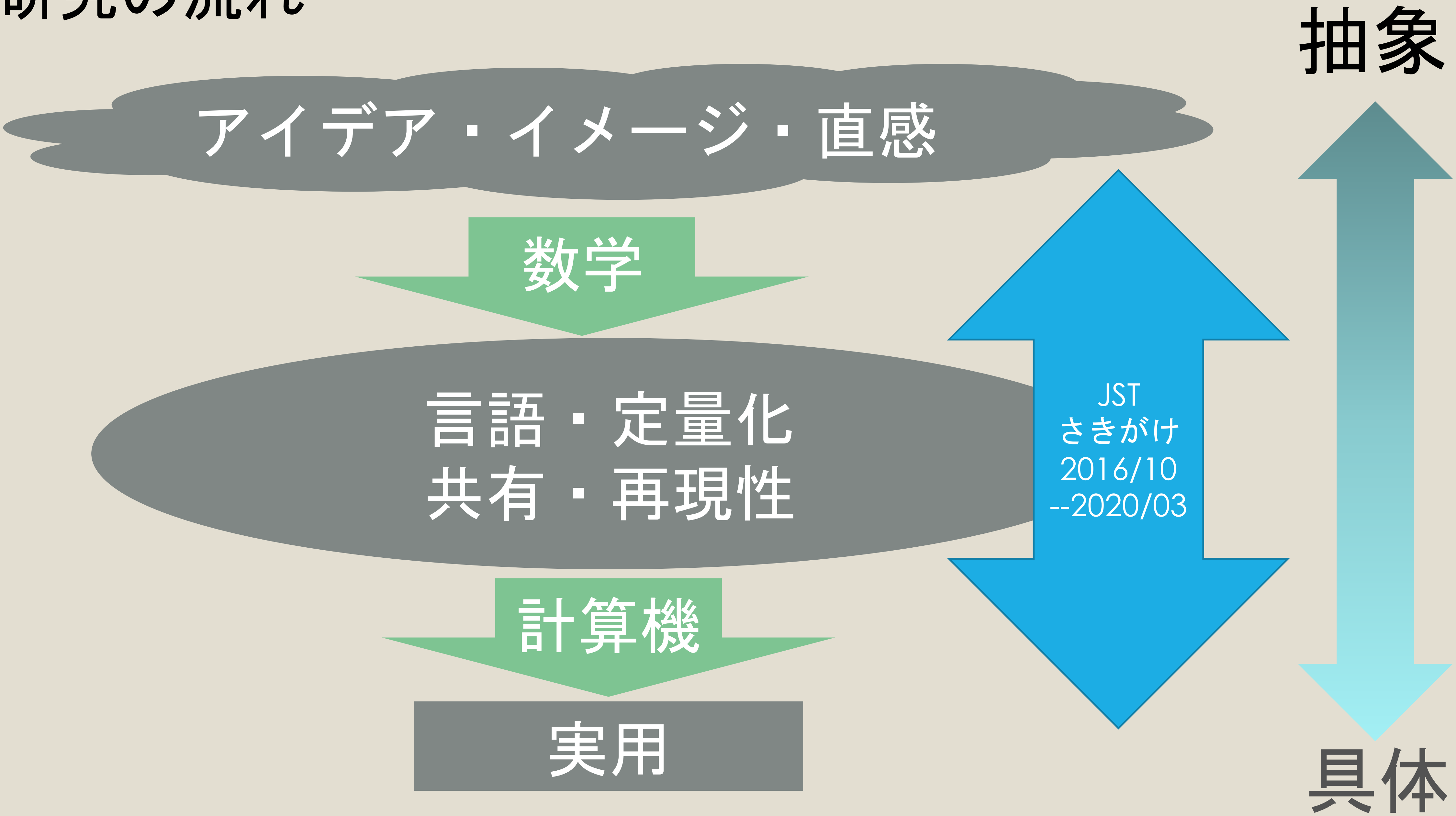
離散化 →

← 補間

有限離散の世界

古典的には数学は連続な対象を扱う。
離散を扱うために、新しい幾何「離散微分幾何」が生まれた。

研究の流れ



抽象
アイデア・イメージ・直感
数学
言語・定量化
共有・再現性
計算機
実用
JST
さきがけ
2016/10
--2020/03
具体

研究の流れ：具体事例を通して

	建築曲面デザイン	ペンギン算
問題の発見	建築の曲面デザインでは曲率・境界・パネル形状をコントロールしたい.	既存のデザインを混ぜて, 新しいバリエーションを作りたい. モーフィングしたい
定式化	パネル形状 = パネルの相似類: 共形幾何! 単体的曲面上の変分問題の解として最終形状を	多面体の間の"良い"ホモトピーの構成
理論・手法	リッチ曲率流で曲率とパネル形状はコントロールできる. ここに境界条件を入れる	単体的コチェインの補間：指数写像 & "微分"方程式
実装	最適化問題	疎線型代数
検証	実際的な曲面の生成に使えることを実例で示す (その際に凸性を強制するテクニックなど追加)	リアルタイムにペンギンを踊らせる

数学と(自然)科学：感覚の違い

自然科学
目的が明確
自然が Ground Truth
いかにうまく説明するか

数学
正解が無く何をやっても自由
基準は"美しさ"

表現したい現象
アイデア

定式化

実験・観測との整合 — 科学

証明・具体例 — 数学

どうやって異分野連携を始めるか，何に気をつけるべきか，について
下の様な講演資料を公開していますので興味ありましたら
「異分野連携ヒッチハイクガイド」で検索を

異分野連携
ヒッチハイクガイド

日本数学会2019年度秋季総合分科会 数学連携ワークショップ
2019年9月19日 金沢大学

ありがとうございました