リー群のトポロジーから見るシューベルトカリキュラス

鍛冶 静雄
福岡大学 理学部

1　問題の起源

「3 次元ユークリッド空間内に与えられた, 一般の位置にある 4 本の直線全てに交わる直線は何本引けるか？」19 世紀後半, Schubert はこの種の問題を数多く考察し, Pieri や Giambelli らによって数え上げ幾何 (enumerative geometry) と呼ばれる分野に発展させられた．先にあげた問題に対する Schubert の解法は次の通りである．「まず 4 本の直線を二つずつ組にして, 各々の組が交点を持つ様に平行移動する．この状態においては, 4 本全てに交わる直線は, その交点同士を結ぶ直線と, 各組が張る平面の共通部分としての直線の 2 本である．平行移動によって解の数は変わらないから, 答えはいつでも 2 本である．」この様に, 当時の議論は直感的かつ鮮やかであるが, 厳密性には欠ける．それを正当化する基礎付けを与えよというのが, Hilbert の第 15 問題として提出されたが, 今日では旗多様体 (flag variety) と呼ばれる射影多様体の, コホモロジー環の構造の問題として定式化されており[*1], 主にその計算アルゴリズムを与える事を目的としているのがシューベルトカリキュラス (Schubert calculus) である．(歴史的な経緯については, 例えば [19] を参照．)

旗多様体という, 豊富な構造を持ちかつある程度 “手で扱える” 空間を対象としているため, トポロジーのみならず, 代数幾何学, 表現論, 組み合わせ論の各方面から盛んに研究されており, 例えば [14], [26], [20] などに目を通すことで, シューベルトカリキュラスという対象が様々な分野の交差点に位置している様子を俯瞰することができる．この講演では, 代数トポロジーで古くから扱われてきた, リー群とその等質空間に関する計算結果を, 特に例外型というクラスについて, シューベルトカリキュラスの言葉で見直すことを試みる．例外型の旗多様体はその構造が複雑になりすぎる為に, トポロジー以外の分野からは敬遠されている様に思えるが, その分, 型によらない性質の発見, 実験場所としては優れている．これまでに蓄積されている具体的な計算結果を見やすい形で提示することで, 色々な方面から例外型のシューベルトカリキュラスを研究する一助になれば嬉しい.

2　旗多様体

研究の対象となる空間・旗多様体は, リー群の等質空間として現れる．G を簡約可能連結複素リー群, B をその極大可解部分群 (Borel subgroup), P を B を含む部分群 (parabolic subgroup) とする時, 等質空間 G/P は射影多様体の構造を持ち, 旗多様体と呼ばれる.

旗多様体はリー群の型に対応する分類ができ, 個別に考察することができる．$\hat{G}$ を G の普遍被覆群とすると, 対応する部分群 $\hat{P}$ が存在して $G/P \cong \hat{G}/\hat{P}$ という同型が成り立ち, また, $G = G' \times G''$ とすると, $G/P \cong G'/G' \cap P \times G''/G'' \cap P$ と分解するので, リー群の分類定理より, もともと G は $GL_n(\mathbb{C}), SO_n(\mathbb{C}), Sp_{2n}(\mathbb{C})$ の

[*1] ただし, 未だ Schubert の議論全てをカバーしている訳ではないらしい.

古典群あるいは, G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 の５種類の単連結例外群のいずれかであるとして良い．一方で, P は単純ルートの部分集合でパラメトライズされる事が知られている．よって旗多様体は, ディンキン図形とその頂点の部分集合とのペアで (重複はあるが) 分類される.

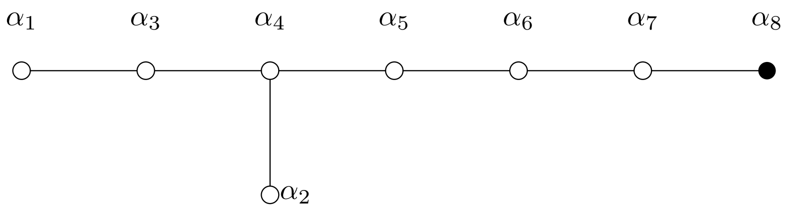

図１　(E_8, P_8)

胞体分割

旗多様体 G/P には, その胞体分割に基づいてシューベルト類と呼ばれるコホモロジー類が定まり, $H^*(G/P;\mathbb{Z})$ は加群としてはその上の自由 $\mathbb{Z}$ 可群になる．T を G の極大トーラスとして, W をワイル群 $N_G(T)/T$, W_P を P のワイル群 $N_P(T)/T$ とする．G はワイル群によってパラメトライズされた両側剰余分解 ([6])

$$G = \coprod_{w \in W} BwB$$

を持ち, それはワイル群の左剰余類集合 $W^P = W/W_P$ でパラメトライズされた, Bruhat 分解と呼ばれる次の G/P の胞体分割を誘導する.

$$G/P = \coprod_{w \in W^P} BwP/P$$

この時, w に対応する胞体 BwP/P の閉包 $X_w = \overline{BwP/P}$ はシューベルト多様体と呼ばれる (特異) 部分多様体となる.

この分解を通して, ワイル群の組み合わせ論的な性質が, 旗多様体のトポロジーを良く反映しているのを見ることができる．$l := \dim T$ を G の階数とすると, ワイル群は単純ルート $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ に対応する単純鏡映 $s_1, \ldots, s_l$ で生成される有限群となるから, 任意の元は $w = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ と表示される．これを $w = [i_1, \ldots, i_k]$ と書く事にする．この表示が最短である時, その長さ k を $l(w)$ と書く．最短表示の方法は一通りではないが, $[i_1, \ldots, i_k]$ という組に対して辞書式順序を考える事で, 最小の最短表示が一意的に定まる．左剰余類集合 W^P は, $\{w \in W \mid \forall v \in wW_P, l(v) > l(w)\}$ という最短表示を持つ.

例 2.1 $G = GL_n(\mathbb{C})$ とすると, B は上三角行列となる．この場合, 対応するディンキン図形の部分集合は空集合である．$GL_n(\mathbb{C})$ の元を行列表示し, その列ベクトルで張られる線型空間からなる旗 (flag) $V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = \mathbb{C}^n$ に対応させると, $GL_n(\mathbb{C})/B$ はその名の通り, 旗全体からなる多様体となる．BwB は本質的には行列の LU(LPU) 分解であり, シューベルト多様体 $X_w = \overline{BwB/B}$ $(w \in W = S_n)$ は, 古典的なシューベルト条件

$$\{(V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n) \mid \dim(V_k \cap \mathbb{C}^m) \geq \#\{i \leq k \mid w(i) \leq m\}\}$$

によって定義される.

$G = GL_{n+m}(\mathbb{C})$ として, P_n を

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix} \middle| \ A \in GL_n(\mathbb{C}), B \in GL_m(\mathbb{C}) \right\}$$

とする．対応するディンキン図形の部分集合は, n 番目の単純ルートの補集合である．この時, G/P_n は $\mathbb{C}^{n+m}$ の n 次線型部分空間のなすグラスマン多様体 $Gr_{n,n+m}(\mathbb{C})$ となる．G のワイル群 W は対称群 S_{n+m} であり, P_n のワイル群 W_{P_n} は対称群の直積 $S_n \times S_m$ であるから, 剰余類集合 W^{P_n} はグラスマン置換

$$\{w \in S_{n+m} | w(1) < w(2) < \cdots < w(n), w(n+1) < \cdots < w(n+m)\}$$

となる．$w \in W^{P_n}$ に非増加整数列 $(w(n) - n, w(n-1) - (n-1), \ldots, w(1) - 1)$ を対応させることで, W^{P_n} は $n \times m$ のヤング図形と同一視され, シューベルト多様体 X_w は, シューベルト条件

$$\{V \mid \dim(V \cap \mathbb{C}^{w(j)}) \geq j\}$$

で定義される．

W の最長元を w_0, W^P の最長元を w_P とすると, $l(w_0 w w_0 w_P) = l(w_P) - l(w) = \dim_{\mathbb{C}} G/P - l(w)$ となるので, $X_{w_0 w w_0 w_P}$ の基本類のポアンカレ双対は $H^{2l(w)}(G/P; \mathbb{Z})$ の元 σ_w を定める．これを w に対応するシューベルト類と呼ぶ．今, 偶数次元の胞体しか存在しないので, $\{\sigma_w\}_{w \in W^P}$ は $H^*(G/P; \mathbb{Z})$ の $\mathbb{Z}$ 可群としての基底をなす*2.

シューベルトカリキュラスにおける一つの中心問題は, シューベルト類のカップ積についての構造定数 (structure constant) を決定する事である.

問題 2.2 $u, v \in W^P$ に対して,

$$\sigma_u \cdot \sigma_v = \sum_{w \in W^P} c_{u,v}^w \sigma_w$$

なる (非負) 整数 $c_{u,v}^w$ を求めよ.

補足 2.3 射影 $G/B \to G/P$ はコホモロジー環の間の単射準同型

$$\begin{aligned} H^*(G/P; \mathbb{Z}) &\to H^*(G/B; \mathbb{Z}) \\ \sigma_w &\mapsto \sigma_w \end{aligned}$$

を引き起こすので, G/B が親玉と考えられる.

例 2.4 グラスマン多様体 $Gr_{n,n+m}(\mathbb{C})$ に対しては, シューベルト類がヤング図形でパラメトライズされることを見たが, その構造定数は, 同じヤング図形に対応するシューア多項式という対称式の積のそれに一致することが知られている．これは, Littlewood-Richardson の公式 ([24]) というアルゴリズムで計算可能である．例えば $Gr_{2,4}(\mathbb{C})$ においては,

$$\begin{aligned} \sigma_{[2]}^2 &= \sigma_{[3,2]} + \sigma_{[1,2]} \\ \sigma_{[2]}^4 &= (\sigma_{[3,2]} + \sigma_{[1,2]})^2 = 2\sigma_{[2,1,3,2]} \end{aligned}$$

となる．この計算を最初にあげた Schubert の問題に翻訳するには, 各シューベルト類を, 下の表に従って空間内の直線に関する条件と読み替えれば良い．そうすると, $\sigma_{[2]}^4 = 2\sigma_{[2,1,3,2]}$ は, 問題の答えが 2 である事に対応している.

*2 $H^*(G/P; \mathbb{Z})$ は, 環として G/P の Chow 環 $A^*(G/P)$ と同型であるから, 以下の議論では H^* を A^* と読み替えても良い.

$\sigma_{[2]}$ 与えられた直線と交わる
$\sigma_{[3,2]}$ 与えられた平面の上にある
$\sigma_{[1,2]}$ 与えられた点を通る
$\sigma_{[2,1,3,2]}$ 与えられた直線の上にある

より一般に全ての A 型旗多様体について, 最近 Coskun [9] はその構造定数を計算するアルゴリズムを発見した.

3 コホモロジー環の多項式表示

コホモロジーの加群としての基底は, シューベルト類で与えられることを見たが, 目的であるところの環構造を知る為には, コホモロジーを多項式環の剰余環として表すことができれば便利である. シューベルトカリキュラスにおいては Borel 表示と呼ばれるその計算は, 長期にわたってシューベルトカリキュラスとは独立に, 個々の旗多様体に対して具体的に与えられてきた ([4], [5], [33], [28]) . 以下では [4], [32] に従って, 旗多様体のコホモロジー環の Borel 表示を紹介する.

K を G の極大コンパクト部分群, T を K の極大トーラス, また $U = P \cap K$ とする. $K \hookrightarrow G$ は微分同相 $K/U \cong G/P$ を誘導する事が知られているから, 特に $H^*(G/P;\mathbb{Z}) \cong H^*(K/U;\mathbb{Z})$ であり, 必要に応じて G/P と K/U のどちらを考えても良い. 例えば, 次の様な対応がある.

type	G	P	K	U
A_l	$SL_{l+1}(\mathbb{C})$	P_m	$SU(l+1)$	$SU(m)\times SU(l+1-m)$
B_l	$SO_{2l+1}(\mathbb{C})$	B	$SO(2l+1)$	T
C_l	$Sp_{2l}(\mathbb{C})$	P_l	$Sp(l)$	$U(l)$
D_l	$SO_{2l}(\mathbb{C})$	P_l	$SO(2l)$	$U(l)$

基本ウェイト $\{\omega_i\}_{1\le i\le l}$ を $H^2(BT;\mathbb{Z})$ の元とみなすと, $H^*(BT;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\omega_1,\dots,\omega_l]$ である. 主 T 束 $T \hookrightarrow K \to K/T$ の分類写像 $K/T \xrightarrow{\iota} BT$ がコホモロジーに誘導する準同型 $\iota^* : H^*(BT;\mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(K/T;\mathbb{Z})$ は特性写像と呼ばれ, この写像を通して $H^*(K/T;\mathbb{Z})$ を多項式環と関連づけて調べられる. より詳しく, K/U のコホモロジー環の Borel 表示は, ファイバー束 $K/U \hookrightarrow BU \to BK$ 及び $U/T \hookrightarrow K/T \to K/U$ の Serre スペクトル系列を考察することで得られ, その最も基本的な形は, 次の様に述べることができる. 係数環 R を $\mathbb{Z}$ または素数位数の有限体 $\mathbb{F}_p$ として, $H^*(\iota;R)$ が全射[*3]であれば,

定理 3.1 ([4])
$$H^*(G/P;R) \cong H^*(K/U;R) \cong \frac{H^*(BT;R)^{W_P}}{(H^+(BT;R)^W)}$$

ここで, $(H^+(BT;R)^W)$ は正次数の W 不変多項式で生成されるイデアルである.

例 3.2 $H^*(SU(n)/T;\mathbb{Z}) = \dfrac{\mathbb{Z}[t_1,\dots,t_n]}{(c_1,\dots,c_n)}$ となり, 右辺は n 次対称群の余不変式環である. この余不変式環におけるシューベルト類 σ_w の代表元としては, Lascoux-Schützenberger [23] による非常に奇麗な多項式 (A 型シューベルト多項式) が知られている.

[*3] $H_*(G;\mathbb{Z})$ が p-tosion を持たないことと同値である

[4] の方法を推し進めることで, Toda [32] は $H^*(K/U;\mathbb{Z})$ を多項式環の剰余環として与える方法を開発した. それは例外型に対しても有効であり, 実際に具体的な計算がなされているが, シューベルト類との対応は顧みられず, シューベルトカリキュラスの観点からは, ほとんど注目されることは無かった. (最近ではシューベルトカリキュラスの立場からも [11], [31] などで例外型のケースが扱われている.)

シューベルト類の代表元

例 2.4 において, グラスマン多様体のシューベルトカリキュラスがシューア多項式の議論に還元された様に, 各シューベルト類を代表する多項式族が見つかると, 構造定数の問題は多項式のそれに帰着する. この様な多項式族は, イデアルを法として多様な取り方ができるが, そのうち組み合わせ論的に性質の良いものをシューベルト多項式 (Schubert polynomial) と呼ぶ. 古典型に対しては, (A 型を除いては一長一短はあっても) かなり良い性質を持つシューベルト多項式が知られている ([23], [2], [12], [25]) が, 例外型に関してはほとんど手をつけられていない.

コホモロジー類の多項式表示とシューベルト類との対応を与えるものとして, 次に紹介する差分商作用素 (divided difference operator) がある.

定義 3.3 ([10], [3]) 正ルート α に対しては, 差分商作用素 $\Delta_\alpha : H^*(BT;\mathbb{Z}) \to H^{*-2}(BT;\mathbb{Z})$ は次式で定義される.

$$\Delta_\alpha(f) = \frac{f - s_\alpha(f)}{\alpha},\ f \in H^*(BT;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\omega_1,\ldots,\omega_l]$$

ただしここでは, ルートを $H^2(BT;\mathbb{Z})$ の元とみなしている. 任意のワイル群の元に対しては, その単純鏡映の積による最短表示 $w = s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_k}$ を一つ選ぶと, 対応する差分商作用素 $\Delta_w : H^*(BT;\mathbb{Z}) \to H^{*-2l(w)}(BT;\mathbb{Z})$ は次式で定義される.

$$\Delta_w = \Delta_{\alpha_{i_1}} \circ \Delta_{\alpha_{i_2}} \circ \cdots \circ \Delta_{\alpha_{i_k}}$$

一般にワイル群の元に対してその最短表示は一意的ではないが, 上の定義が well-defined であることは保証されている.

定理 3.4 ([10], [3]) $\mathfrak{S}_w \in H^*(BT;\mathbb{Q})$ を σ_w の多項式表示, 即ち, $\iota^*(\mathfrak{S}_w) = \sigma_w$ なる多項式とする.

(1) $\{\Delta_{\alpha_i}\}_{1\le i\le l}$ はワイル群で成り立つべき関係式 (Coxeter relation) を満たす.

(2) $l(ws_i) = l(w) + 1$ ならば, $\Delta_{\alpha_i}\mathfrak{S}_{ws_i} = \mathfrak{S}_w$

(3) $\Delta_{\alpha_i}(fg) = \Delta_{\alpha_i}(f)g + s_{\alpha_i}(f)\Delta_{\alpha_i}(g)$

(1) より well-definedness が, (2) より多項式 $f \in H^{2k}(BT;\mathbb{Z})$ がシューベルト類の線形和 $\sum_{l(w)=k}\Delta_w(f)\sigma_w$ の代表元となっていることが分かる. また, (3) はこの作用素が再帰的に計算可能であることを示している.

補足 3.5 幾何学的には, 差分商作用素 Δ_α は符号を除いて次の様に定義される. α に対応する極小放物部分群 $P_{\hat\alpha}$ に対して, $K_\alpha = K \cap P_{\hat\alpha}$ と定め, 下の S^2 束を考える.

$$S^2 = K_\alpha/T \hookrightarrow BT \xrightarrow{p} BK_\alpha$$

ここで, $p^* : H^*(BK_\alpha;\mathbb{Z}) \to H^*(BT;\mathbb{Z})$ を p の誘導写像, $p_* : H^*(BT;\mathbb{Z}) \to H^{*-2}(BK_\alpha;\mathbb{Z})$ をファイーバー積分 (push-forward) とすると,

$$\Delta_\alpha = \pm p^* \circ p_* : H^*(BT;\mathbb{Z}) \to H^{*-2}(BT;\mathbb{Z})$$

が成り立つ.

例 **3.6** A 型の場合, 古典的な Newton の差分商作用素

$$\Delta_{(i,j)}f = \frac{f(t_1,\ldots,t_i,\ldots,t_j,\ldots,t_l) - f(t_1,\ldots,t_j,\ldots,t_i,\ldots,t_l)}{t_j - t_i}$$

と一致している.

ここからは, 差分商作用素と Borel 表示を主な道具立てとし, 計算機を援用して得られた, 高松高専の中川征樹氏との共同研究の結果について紹介したい. 特に, 例外型の中の例外型である E 型旗多様体について述べる.

補題 **3.7** G が E 型例外群 E_l $(l = 6, 7, 8)$ の時,

$$W_{II} := \{w \in W \mid w \text{ の全ての最短表示は } [\ldots, 2] \text{ という形をしている } \}$$

と置くと, $H^*(E_l/B;\mathbb{Z})$ は, $\mathbb{Z}[\omega_1, \omega_3, \omega_4, \ldots, \omega_l]$ $(\cong H^*(SU(l)/T;\mathbb{Z}))$ 上の加群として, $\{\sigma_w\}_{w\in W_{II}}$ で生成される.

この事実から, 最短表示が $[\ldots, 2]$ である様な長さ 2 以上の元 $w_1, \ldots, w_k$ が存在して, 次の様な形に表示できる事が分かる.

$$H^*(E_l/B;\mathbb{Z}) = \frac{\mathbb{Z}[\sigma_{[1]}, \sigma_{[3]}, \sigma_{[4]}, \ldots, \sigma_{[l]},\ \sigma_{[2]}, \sigma_{w_1}, \ldots, \sigma_{w_k}]}{(\rho_1, \ldots, \rho_j)}$$

一方で, $W_{II} = W^{P_2}$ となることから, $H^*(E_l/B;\mathbb{Z})$ の部分加群 $\bigoplus_{w\in W_{II}} \mathbb{Z}\sigma_w$ は, $H^*(E_l/P_2;\mathbb{Z})$ と同型な部分代数となっている. $\bigoplus_{w\in W_{II}} \mathbb{Z}\sigma_w$ については, その構造定数を計算するアルゴリズムが存在し, また $\sigma_{[i]} = \omega_i$ との積に関しては次の Chevalley の公式 ([8])

$$\sigma_w \cdot \omega_i = \sum_{\alpha:\text{正ルート s.t. } l(ws_\alpha)=l(w)+1} \Delta_\alpha(\omega_i)\sigma_{ws_\alpha}$$

が適用できることを考え合わせると, $H^*(E_l/B;\mathbb{Z})$ のシューベルト類による環構造は, 非常に限定された意味ではあるが決定されていると言える.

ここでうまくいったのは, 巨大な環 $H^*(E_l/B;\mathbb{Z})$ を, 2 次の元で生成される多項式環 $\mathbb{Z}[\sigma_{[1]}, \sigma_{[3]}, \sigma_{[4]}, \ldots, \sigma_{[l]}]$ と $\bigoplus_{w\in W_{II}} \mathbb{Z}\sigma_w$ という二つの比較的小さな部分に分割できたことが本質的である.

例 **3.8** $H^*(E_8/B;\mathbb{Z})$ において,

$$\begin{aligned}\sigma_{[5,4,2]}\sigma_{[1,3,6,5,4,2]} &= \sigma_{[3,1,5,4,3,6,5,4,2]} + \sigma_{[2,3,1,4,3,6,5,4,2]} + 2\sigma_{[1,2,4,3,7,6,5,4,2]} \\ &\quad + \sigma_{[1,2,5,4,3,6,5,4,2]} + \sigma_{[3,1,4,3,7,6,5,4,2]} + 2\sigma_{[1,4,3,8,7,6,5,4,2]} + 2\sigma_{[1,5,4,3,7,6,5,4,2]}\end{aligned}$$

(一般に, 幾何学的な意味付けから, 右辺の係数は全て正になることが知られている.)

同様の手法で, P が B またはいくつかの極大部分群の場合に, 次のリストを得た. (E_l/B は長くなるため省略している.) 生成元や関係式 ρ_i の多項式表示も具体的に与えることができる.

旗多様体	生成元	関係式 ρ_i の次数
G_2/B	$\sigma_{[1]}, \sigma_{[2]}, \sigma_{[1,2,1]}$	$(4,6,12)$
G_2/P_1	$\sigma_{[1]}, \sigma_{[1,2,1]}$	(6)
G_2/P_2	$\sigma_{[2]}, \sigma_{[1,2]}, \sigma_{[2,1,2]}$	$(4,6)$
F_4/B	$\sigma_{[1]}, \sigma_{[2]}, \sigma_{[3]}, \sigma_{[4]}, \sigma_{[1,2,3]}, \sigma_{[1,2,3,4]}$	$(4,6,8,12,16,24)$
F_4/P_1	$\sigma_{[1]}, \sigma_{[3,2,1]}, \sigma_{[4,3,2,1]}, \sigma_{[3,2,4,3,2,1]}$	$(6,12,16,24)$
F_4/P_4	$\sigma_{[4]}, \sigma_{[3,2,3,4]}$	$(16,24)$
E_6/P_1	$\sigma_{[1]}, \sigma_{[2,4,3,1]}$	$(18,24)$
E_6/P_2	$\sigma_{[2]}, \sigma_{[5,4,2]}, \sigma_{[1,3,4,2]}, \sigma_{[1,3,6,5,4,2]}$	$(12,16,18,24)$
E_7/P_1	$\sigma_{[1]}, \sigma_{[2,4,3,1]}, \sigma_{[2,6,5,4,3,1]}, \sigma_{[3,4,2,7,6,5,4,3,1]}$	$(18,24,28,36)$
E_7/P_7	$\sigma_{[7]}, \sigma_{[2,4,5,6,7]}, \sigma_{[6,5,4,2,3,4,5,6,7]}$	$(20,28,36)$
E_8/P_8	$\sigma_{[8]}, \sigma_{[2,4,5,6,7,8]}, \sigma_{[3,1,4,2,3,4,5,6,7,8]}, \sigma_{[5,4,3,1,7,6,5,4,2,3,4,5,6,7,8]}$	$(30,40,48,60)$

ここでは, ルートの番号付けは [7] に従っている.

4 応用

4.1 不変式環

旗多様体のコホモロジー環は, 不変式環 (余不変式環) と関わりが深い事を見たが, その関連をより詳しく述べる.

ワイル群の不変式環 $\mathbb{I}_p := \mathbb{F}_p[t_1, \ldots, t_l]^W$ は, p が torsion prime であるとき, 非常に複雑になる. その近似として, [30] では次の p-stable invariants J_p^l が導入された.

$$(0) = J_p^0 \subset (\mathbb{F}_p^+[t_1, \ldots, t_l]^W) = J_p^1 \subset J_p^2 \subset \cdots \subset J_p^l = J_p^{l+1} = \cdots,$$
$$J_p^m := \left(\{f \in \mathbb{F}_p^+[t_1, \ldots, t_l] \mid \forall w \in W, w(f) - f \in J_p^{m-1}\}\right)$$

このイデアルは旗多様体のコホモロジーと密接に関係があり, 実際次の定理が証明されている.

定理 4.1 ([30]) $\iota_p^* : H^*(BT; \mathbb{F}_p) \longrightarrow H^*(K/T; \mathbb{F}_p)$ を $\mathbb{F}_p$ 係数の特性写像とする時,

$$\ker \iota_p^* \cong J_p^l$$

また, J_p^l は正規列で生成されるイデアルである.

これより, 次の結果を得る.

(G,p)	J_p^l の生成元の次数	(G,p)	J_p^l の生成元の次数
$(Spin(2n+1),2)$	$(2,3,4,\ldots,n,2^{[\log_2 n]+1})$	$(E_6,3)$	$(2,4,5,6,8,9)$
$(Spin(2n+2),2)$	$(2,3,4,\ldots,n,2^{[\log_2(2n-1)]})$	$(E_7,2)$	$(2,3,5,8,9,12,14)$
$(G_2,2)$	$(2,3)$	$(E_7,3)$	$(2,4,6,8,10,14,18)$
$(F_4,2)$	$(2,3,8,12)$	$(E_8,2)$	$(2,3,5,8,9,12,14,15)$
$(F_4,3)$	$(2,4,6,8)$	$(E_8,3)$	$(2,4,8,10,14,18,20,24)$
$(E_6,2)$	$(2,3,5,8,9,12)$	$(E_8,5)$	$(2,6,8,12,14,18,20,24)$

この表は既に Kac [17] によって得られているが, ここではさらに, その生成元の具体的な表示を与える事ができる.

例 **4.2** G_2 のワイル群は二面体群 D_6 である. $p=2$ に対して, 次が成り立つ.

$$J_2^2 = (t_2^2 + t_1^2 + t_1 t_2, t_1^2 t_2 + t_1 t_2^2) \subset \mathbb{F}_2[t_1, t_2]$$

4.2 G の Chow 環

旗多様体のコホモロジー $H^*(G/B;\mathbb{Z})$ は Chow 環 $A^*(G/B)$ と同型であり ([13, Example 19.1.11]), さらに, G の Chow 環 $A^*(G)$ との次の様な関係も知られている.

定理 **4.3 ([16])** 射影 $p: G \to G/B$ による引き戻し $p^*: A^*(G/B) \to A^*(G)$ は同型

$$\frac{A^*(G/B)}{(A^1(G/B))} \cong A^*(G)$$

を誘導する.

これらを用いて, [29] と [18](改訂中) において, 全ての単連結群 G に対して $A^*(G)$ が決定された.

5 今後の課題

5.1 シューベルト類の分解可能性

次数付き環 A の元 a に対して, a が a の次数未満の元たち $A^{<|a|}$ で生成される部分環に属している時, 分解可能 (decomposable) であるという. シューベルト類の分解可能性は, 特性写像の像や不変式と関連しており, これをワイル群の組み合わせ論から判定できれば面白い.

例 **5.1** $H^*(E_8/B;\mathbb{Z})$ において,

$$\begin{aligned}
&\sigma_{[1,3,4,2,7,6,5,4,3,8,7,6,5,4,2]} && \text{は分解可能でない.} \\
&\sigma_{[1,5,4,2,7,6,5,4,3,8,7,6,5,4,2]} &=& -\sigma_{[5,4,2]}\sigma^2_{[8,7,6,5,4,2]} + \sigma_{[6,5,4,2]}\sigma_{[7,6,5,4,2]}\sigma_{[8,7,6,5,4,2]} \\
& && -\sigma_{[7,6,5,4,2]}\sigma_{[1,5,4,3,8,7,6,5,4,2]} - \sigma_{[8,7,6,5,4,2]}\sigma_{[6,5,4,3,7,6,5,4,2]} \\
& && \text{は分解可能.}
\end{aligned}$$

シューベルト多項式を整数係数の多項式として定義する為には, まずそのすみかとなるべき多項式環を見つけてやる必要がある. 分解可能性の判定は, その一歩目にある問題と言える.

5.2 同変コホモロジー

極大トーラスに関する同変コホモロジー環 $H_T^*(G/P)$ の研究は, 不動点への局所化が非常に綺麗な構造を持つ事 (GKM 理論 [15]) から, 盛んに行われている ([21],[1],[22]). しかし上で見た様な計算, すなわち, 多項式環の剰余環としての表示はまだ無く, 今回紹介した方法を適用することはできない. そこでまず, Toda 流の計算法を確立し, 具体的に実行することが求められる. 常コホモロジーの場合には, $K/T \hookrightarrow BT \to BK$ というファイバー列に対する Serre スペクトル系列を用いたが, 同変コホモロジーの場合には, 次の様なファイバー列の引き戻し図式に

対する Eilenberg-Moore スペクトル系列 ([27]) が有用である様に思われる.

$$\begin{tikzcd} K/T \arrow[r, equal] \arrow[d] & K/T \arrow[d] \\ ET \times_T K/T \arrow[r] \arrow[d] & BT \arrow[d] \\ BT \arrow[r] & BK \end{tikzcd}$$

参考文献

[1] S. Billey, *Kostant polynomials and the cohomology ring for G/B*, Duke Math. J. **96** (1999), no. 1, 205–224.

[2] S. Billey and M. Haiman, *Schubert polynomials for the classical groups*, J. Amer. Math. Soc. **8** (1995), no. 2, 443–482.

[3] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand and S. I. Gelfand, *Schubert cells and the cohomology of the spaces G/P*, L.M.S. Lecture Notes vol.69 Cambridge Univ. Press, 1982, 115-140.

[4] A. Borel, *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts*, Ann. of Math. **57** (1953), 115-207.

[5] R. Bott and H. Samelson, *Application of the theory of Morse to the symmetric spaces*, Amer. J. Math. **80** (1958), 964-1029.

[6] A. Borel, *A. Borel, Linear Algebraic Groups, second ed.*, Grad. Texts in Math., vol. **126**, Springer-Verlag, New York, 1991.

[7] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbre de Lie* IV – VI, Masson, Paris, 1968.

[8] C. Chevalley, *Sur les décomposition cellulaires des espaces G/B*, Algebraic Groups and their Generalizations: Classical Methods (W. Haboush, ed.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 56, Part 1, Amer. Math. Soc., 1994, 1-23.

[9] I, Coskun, *A Littlewood-Richardson rule for partial flag varieties*, preprint available at: `http://www.math.uic.edu/~coskun/`

[10] M. Demazure, *Invariants symmétriques des groupes de Weyl et torsion*, Invent. Math. **21** (1973), 287-301.

[11] H. Duan and X. Zhao, *The Chow rings of generalized Grassmannians*, preprint, arXiv:math.AG/0511332v8

[12] S. Fomin and A.N. Kirillov, *Combinatorial B_n-analogues of Schubert polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc. **348**(1996), no. 9, 3591–3620.

[13] W. Fulton, *Intersection theory*, volume 2 of Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]. Springer-Verlag, Berlin, second edition, **1998**.

[14] W. Fulton, *Young Tableaux. With Applications to Representation Theory and Geometry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[15] M. Goresky, R. Kottwitz, and R. MacPherson, *Equivariant cohomology, Koszul duality, and the localization theorem*, Invent. Math. **131** (1998), no. 1, 25–83.

[16] A. Grothendieck, *Torsion homologique et sections rationnelles*, Exposé 5 in Anneaux de Chow et applications, Séminaire C. Chevalley, 1958, Multigraphié, Secrétariat Mathematique, Paris.

[17] V. Kac, *Torsion in cohomology of compact Lie groups and Chow rings of reductive algebraic groups*, Invent. Math. **80** (1985), 69-79.

[18] S. Kaji and M. Nakagawa, *The Chow rings of the algebraic groups E_6 and E_7*, preprint, arXiv:math.AT/07093702

[19] S. Kleiman, Intersection theory and enumerative geometry: A decede in review, Algebraic Geometry, Bowdoin 1985 (Spencer Bloch, ed.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. **46**, Part 2, Amer. Math. Soc., 1987, 321 − 370.

[20] S. Kleiman and D. Laksov, *Schubert calculus*, American Mathematical Monthly, **79** (1972), 1061–1082.

[21] A. Knutson and T. Tao, *Puzzles and (equivariant) cohomology of Grassmannians*, Duke Math. J. **119** (2003), no. 2, 221?260.

[22] T. Ikeda, Schubert classes in the equivariant cohomology of the Lagrangian Grassmannian, Adv. Math. **215** (2007), no. 1, 1–23.

[23] A. Lascoux and M. Schützenberger, *Polynômes de Schubert*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **294** (1982), no. 13, 447–450.

[24] D. E. Littlewood and A. R. Richardson, *Group characters and algebra*, Philos. Trans. Roy. Soc. London. **233** (1934), 99–141.

[25] I. G. Macdonald, *Schubert polynomials* Surveys in combinatorics, 1991 (Guildford, 1991), 73–99, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **166**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

[26] L. Manivel, *Symmetric Functions, Schubert Polynomials and Degeneracy Loci*, SMF/AMS Texts Monogr., vol. **6**. 2001.

[27] J. McCleary, A user's guide to spectral sequences. Second edition, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **58**. Cambridge University Press, Cambridge, 2001. xvi+561 pp.

[28] M. Nakagawa, *The integral cohomology ring of E_7/T*, J. Math. Kyoto Univ. **41** (2001), 303-321.

[29] M. Nakagawa, *A description based on Schubert classes of cohomology of flag manifolds*, Fund. Math. **199** (2008), 273-293.

[30] F. Neumann, M. D. Neusel and L. Smith, *Rings of generalized and stable invariants of pseudoreflections and pseudoreflection groups*, J. Algebra **182** (1996), no. 1, 85–122.

[31] S. Nikolenko and N. Semenov, *Chow ring structure made simple*, preprint, arXiv:math.AG/0606335.

[32] H. Toda, *On the cohomology ring of some homogeneous spaces*, J. Math. Kyoto Univ. **15** (1975), 185-199.

[33] H. Toda and T. Watanabe, *The integral cohomology ring of F_4/T and E_6/T*, J. Math. Kyoto Univ. **14** (1974), 257-286.