# 同変ループ積について

鍛治 静雄　(九州大学)*

**概　要**

ある種の条件のもと，自由ループ空間や分類空間のホモロジーには，それぞれループ積，Tate のカップ積といった積構造がはいる。それらは一見異なった構成によって導入されるが，同変ホモロジーの外部積を通して，統一的な定義を与えることができる。ここでは同変外部積の構成と，そのループ積を中心とした応用を紹介する。

## 1. 導入

位相空間のコホモロジーには自然に積構造が入るが，状況によってはホモロジーにも積が定義されることがある。Lie 群や $H$ 空間など空間自体が積構造を持つときは，もちろんそれがホモロジーに誘導する Pontryagin 積が入り，向きづけられた閉多様体に対しては交叉積を考えることができる。Chas と Sulliavan が [6] で発見したのは，向きづけられた閉多様体上のループのなす空間のホモロジーに，ループ積とよばれる積構造を始めとする豊かな代数構造が入るということである。この代数構造は後に様々に拡張されている [7, 9, 10, 14, 26] が，ここではもっとも基本的なループ積に的を絞って議論する。

位相空間 $X$ に対して，円周 $S^1$ からの写像のなす空間 $\mathrm{Map}(S^1, X)$ にコンパクト開位相を与えたものを，$X$ 上の自由ループ空間といい $LX$ と書く [1]。同様に，基点付き空間 $X$ に対して，基点を保つループのなす空間 $\mathrm{Map}^*(S^1, X)$ は $\Omega X$ と書く。基点付きループ空間は，共有する基点でループをつなぎ合わせるという操作により $H$ 空間の構造をもつから，そのホモロジーにも積が誘導される。一方，自由ループ空間は空間レベルでは積構造を持たない。Chas-Sullivan の結果を受けて，様々な空間上の自由ループ空間のホモロジーに積を定める研究がなされてきた。下に代表的なものを 3 つだけ取り上げる:

(i) $X = M$ が有向閉多様体の場合
$H_k(LM) \otimes H_l(LM) \to H_{k+l-\dim(M)}(LM)$ [6, 10, 22]

(ii) $X = BG$ が有限群もしくは有限次元連結位相群 $G$ の分類空間の場合
$H_k(LBG) \otimes H_l(LBG) \to H_{k+l+\dim(G)}(LBG)$ [8, 17, 20]

(iii) $X$ が 単連結 Gorenstein 空間の場合
$H_k(LX) \otimes H_l(LX) \to H_{k+l-\dim(X)}(LX)$ [13, 21, 24]

本研究は科研費 (課題番号:18K03304) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 55N91, 55R40, 55N45
キーワード：同変ホモロジー, String topology, 群ホモロジー, 交叉積, ループ積, Tate のカップ積
* 〒819-0395 福岡市西区元岡 744 九州大学　マス・フォア・インダストリ研究所
e-mail: skaji@imi.kyushu-u.ac.jp
web: http://skaji.org
[1] 状況によってある種の可微分性などが課されることもあるが，ホモトピー型は変わらないので，ホモロジーを議論する限りはあまり神経質にならなくて良い。

ただし，(ii) と (iii) については体係数の場合にのみ定義されている。Gorenstein 空間というのは代数的に定義される概念であるが，具体的には Poincaré 双対を満たす空間やコンパクト連結Lie群の分類空間などが含まれる。有向閉多様体$M$の Gorenstein 空間としての次元は$\dim(M)$に等しく，$BG$のそれは$-\dim(G)$であるので，(iii) は (i),(ii) の次数のシフトと両立している。実際，共に定義される時は，符号を除いて一致する。

本講演の目的は，(i) と (ii) を包含する形でループ積を定義する方法を紹介することにある。ここでは代数的な (iii) とは異なり，ホモトピー論のアプローチを取る。それによって，ある演算の自明性が明瞭になったり，同じ枠組みで異なる構造を定義することが可能となるという利点がある。特に，(ii) がほとんど自明であること，また$LBG$のループ積と$BG$の Tateのカップ積という異なった出自のものが関連することを見る。ここで扱う内容は H. Tene との共同研究 [18] に基づく。本文中では [18] の該当箇所への参照を付記してあるので，詳しくはそちらを参照されたい。

## 2. ループ積

### 2.1. Umkehr 写像

個別の定義に入る前に，各種ループ積の本質的な構成要素となるumkehr写像について簡単に触れる。umkehr 写像とは，通常と逆向きに誘導される写像の総称であり，状況に応じてwrong-way map, Gysin map, transfer, shriek map, push-forward など様々な名前で呼ばれることもある [2]。空間の間の写像$f: X \to Y$に対して，ある条件のもと(コ)ホモロジー上に，次数のシフトを伴う写像$f^!: H_*(Y) \to H_{*+d}(X)$や$f_!: H^*(X) \to H^{*-d}(Y)$が誘導される。大雑把に言って，umkehr map が定義される状況には次の二つのタイプがある:

(a) 多様体の間の有限余次元の埋め込みの場合

(b) 有限次元ファイバーを持つファイバー束の場合

(a) のタイプとしてもっとも簡単なものは，有向閉多様体の間の埋め込み$f: N \to M$に対してPoincaré 双対を用いて次の合成で定義される:

$$f^!: H_*(M) \simeq H^{\dim(M)-*}(M) \xrightarrow{f^*} H^{\dim(M)-*}(N) \simeq H_{*-(\dim(M)-\dim(N))}(N).$$

特に有向閉多様体の対角写像$\Delta: M \to M \times M$に対応する umkehr 写像にクロス積を合成したものは交叉積

$$H_k(M) \otimes H_l(M) \xrightarrow{\times} H_{k+l}(M \times M) \xrightarrow{\Delta^!} H_{k+l-\dim(M)}(M) \tag{1}$$

を定める。しかし，ループ空間などを扱うにはこの umkehr 写像では不十分である。[18, §2.2] ではコファイブレーション$f: N \to M$とコホモロジー類$\alpha \in H^d(M, M \setminus N)$の組に対して umkehr 写像を構成している。閉多様体の埋め込みに対しては$\alpha$を法束の向き付けに取れば，先のPoincaré 双対を用いた定義と一致する。この形に拡張しておいた umkehr 写像はpullback に対して自然に振る舞い，ループ積の構成にうまく適合する。

(b) のタイプとしては Grothendieck bundle transfer が非常に強力であるが，[5] 以外に記述をあまり見かけないので，ここで定義にも触れておく。コンパクト Lie 群$G$を

構造群に持つ主束 $G \hookrightarrow E' \to B$ に対して，閉 $G$ 多様体 $F$ をファイバーとする同伴束 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{f} B$ を考える。この同伴束は十分に大きな階数をもつ $B$ 上のベクトルバンドル $u : U \to B$ にファイバーを保ちつつ埋め込むことができ，その法束を $\nu$ とすると，Pontryagin-Thom 構成により Thom 空間の間の写像 $B^u \to E^\nu$ が得られる。ここで，$TF$ を $F$ の接束として，ベクトル束 $t(f) : E' \times_G TF \to E' \times_G F (= E)$ を考える。$t(f)$ は $f$ のファイバーに沿った接束と呼ばれるもので，$f^*(u) \simeq \nu \oplus t(f)$ という分解を与える。この分解から Thom スペクトラムの間の写像 $B^0 \to E^{-t(f)}$ が定まるから，$-t(f)$ の向き付けが与えられれば Thom 同型により対応する umkehr 写像 $f^! : H_*(B) \to H_{*+\dim(F)}(E)$ が定義される。

umkehr 写像が定義されるための条件はこの他にも色々とあり，古い文献ではあるが [5] に良くまとめられている。

### 2.2. 多様体のループ積

Chas と Sullivan [6] は，Goldman [15] と Turaev [31] らの導入した，閉曲面上のループに定まる Lie 双代数構造に着想を得て string topology を創始した。まず Chas-Sullivan のループ積 (§1 (i)) の定義を紹介する。

$M$ を有向閉多様体とする。$S^1$ を $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ と同一視して，評価写像 $ev_0 : LM \to M$ を $ev_0(\gamma) = \gamma(0)$ と定めると，次の pullback 図式 が考えられる:

$$\begin{tikzcd} LM \times_M LM \arrow[r] \arrow[d] & LM \arrow[d, "ev_0"] \\ LM \arrow[r, "ev_0"] & M \end{tikzcd} \tag{2}$$

評価写像の像が等しい二つのループはつまり 8 の字 $S^1 \vee S^1$ の形をしたループであるから，ファイバー積 $LM \times_M LM$ は $\mathrm{Map}(S^1 \vee S^1, M)$ と同一視される。さらに上の図式は次の同値な pullback 図式 に書き換えられる:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Map}(S^1 \vee S^1, M) \arrow[r, "\tilde{\Delta}"] \arrow[d] & LM \times LM \arrow[d, "ev_0 \times ev_0"] \\ M \arrow[r, "\Delta"] & M \times M. \end{tikzcd} \tag{3}$$

ここで $\Delta$ は対角写像，$\tilde{\Delta}$ はその引き戻しであり，これらには §2.1 (a) のタイプの umkehr 写像が定義される。この時，ループ積は次の合成で与えられる:

$$\begin{aligned} H_k(LM) \otimes H_l(LM) \xrightarrow{\times} H_{k+l}(LM \times LM) &\xrightarrow{\tilde{\Delta}^!} H_{k+l-\dim(M)}(\mathrm{Map}(S^1 \vee S^1, M)) \\ &\xrightarrow{c_*} H_{k+l-\dim(M)}(LM). \end{aligned}$$

ここで $c : LM \times_M LM \to LM$ はループの連結である。この定義は，交叉積 (14) とループの連結による fibrewise な積を融合しているように見えるが，実際 [11] では $\Omega M \hookrightarrow LM \to M$ に付随する Serre スペクトル系列が multiplicative であることが示されている。

また，$ev_{1/2} : \gamma \mapsto \gamma(1/2)$ をループの中点位置を与える写像とすると，pullback 図式

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Map}(S^1 \vee S^1, M) \arrow[r, "\hat{\Delta}"] \arrow[d] & LM \arrow[d, "(ev_0, ev_{1/2})"] \\ M \arrow[r, "\Delta"] & M \times M, \end{tikzcd} \tag{4}$$

が得られるが，これからループ余積が次の合成で定まる:

$$H_*(LM) \xrightarrow{\hat{\Delta}^!} H_{*-\dim(M)}(\mathrm{Map}(S^1 \vee S^1, M)) \xrightarrow{\hat{\Delta}_*} H_{*-\dim(M)}(LM \times LM).$$

ここで $\tilde{\Delta}$ は (3) に現れるものと同じで，射影 $S^1 \sqcup S^1 \to S^1 \vee S^1$ が誘導する写像，すなわち 8 の字ループを二つのループに分けるという写像である。

結局のところ，$M$ が有向多様体であるという条件は，ループ (余) 積の定義において，umkehr 写像の存在を保証するためにのみ使われている。逆に言えば，umkehr 写像さえ構成できれば，別のクラスの空間にも同じ議論でループ積を構成できることになる。

### 2.3. 分類空間のループ積

$G$ を有限群もしくは連結位相群とする。分類空間 $BG$ は有限次元でないので，対角写像 $\Delta : BG \to BG \times BG$ に対応する umkehr 写像が定義できず，§2.2 の $M$ を $BG$ にそのまま置き換えても $H_*(LBG)$ にループ積を定義することはできない。対角写像 $\Delta$ をそれとホモトピー同値なファイバー束

$$(G \hookrightarrow)E(G \times G)/\Delta(G) \xrightarrow{p} B(G \times G) \tag{5}$$

とみなすことで，§2.1 (b) のタイプの umkehr 写像が定義される，というのが Chataur と Menichi [8] のアイデアである。Chataur-Menichi のループ積 (§1 (ii)) は，次の合成で与えられる:

$$\begin{aligned} H_k(LBG) \otimes H_l(LBG) \xrightarrow{\times} H_{k+l}(LBG \times LBG) &\xrightarrow{\tilde{p}^!} H_{k+l+\dim(G)}(\mathrm{Map}(S^1 \vee S^1, BG)) \\ &\xrightarrow{c_*} H_{k+l+\dim(G)}(LBG). \end{aligned}$$

ここで $\tilde{p}$ は $p$ の引き戻しであり，やはり $G$ をファイバーに持つファイバー束であるから umkehr 写像が定義できる。また (4) よりループ余積も同様に定まる:

$$H_*(LBG) \to H_{*+\dim(G)}(LBG \times LBG).$$

## 3. ファイバー積に対する同変外部積

Chas-Sullivan と Chataur-Menichi のループ積は非常に似た構成をもつ。これらを統一的に扱おうというのは自然な発想で，実際 [1, 3, 13, 23] はそれぞれ異なった設定で両者を包含する拡張を試みている。本章では主題である同変外部積の構成を与え，次章でそれを用いて二つのループ積が統一的に扱われることを見る。

以降では常に，$G$ はコンパクト Lie 群とし，それ自身の Lie 環への共役作用が向きを保つ [2] ことを仮定する。

$G$ が向きを保って有向閉多様体 $M$ へ作用している状況を考える。普遍 $G$ 束を $EG \to BG$ として，$M$ の $G$ 作用に関する Borel 構成 (ホモトピー商) は，

$$M_G := EG \times_G M = \{(e, m) \in EG \times M\} / ((eg, m) \sim (e, gm) \forall g \in G)$$

と定義されるのであった。射影 $M_G \to BG$ は $M$ をファイバーに持つファイブレーションである。$M$ の (Borel の意味の)$G$ 同変ホモロジー $H_*^G(M)$ とは，単に Borel 構成のホモロジー $H_*(M_G)$ の別表記である。

[2] これは用いる umkehr 写像が定義されるのに必要な条件であるが，$G$ が有限か連結であれば自動的に満たされる。

二つのファイブレーション $f : X \to M_G$，$g : Y \to M_G$ が与えられた時，その pullback 図式

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & M_G \end{tikzcd} \tag{6}$$

を考える[3]。ここで $P = X \times_{M_G} Y$ は $f$ と $g$ のファイバー積である。この pullback 図式に対して，同変外部積

$$\mu : H_k(X) \otimes H_l(Y) \to H_{k+l+\dim(G)-\dim(M)}(P)$$

を定義する[4]。まず，図式 (2) が (3) に書き換えられたのと同様に，(6) は次の pullback 図式に書き換えられる:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\tilde{\Delta}"] \arrow[d] & X \times Y \arrow[d, "f\times g"] \\ M_G \arrow[r, "\Delta"] & M_G \times M_G. \end{tikzcd} \tag{7}$$

$\Delta$ は一般に有限余次元でも有限次元ファイバーを持つわけでもないので，umkehr 写像が定義できない。そこで $\Delta$ の次の分解を考える:

$$M_G \xrightarrow{\Delta_G} (M \times M)_G \xrightarrow{p_G} M_G \times M_G.$$

ただし，

- $\Delta_G$ は同変対角写像であり，$(TM)_G \to M_G$ と自然に同型な法バンドルを持つ余次元 $\dim(M)$ の埋め込み
- $p_G$ は (5) の射影 $M_G \times M_G \to BG \times BG$ に沿った pullback で，ファイバー $G \simeq (G \times G)/\Delta(G)$，構造群 $G \times G$ を持つファイバー束

となっており，それぞれ umkehr 写像が定義できる。以上より，同変外部積を次の合成で定義する:

$$\mu : H_k(X) \otimes H_l(Y) \xrightarrow{\times} H_{k+l}(X \times Y) \xrightarrow{\tilde{\Delta}^!_G \circ \tilde{p}^!_G} H_{k+l+\dim(G)-\dim(M)}(P).$$

この外部積はある次元以上では自明であることが分かる。

**定理 8** ([18, Theorem 3.2])**.** 合成 $X \to M_G \to BG$ のファイバーのホモロジーが $n+1$ 次以上では消えているとすると，$\mu$ は $k > n - \dim(G)$ のとき自明である。

さらに合成 $Y \to M_G \to BG$ のファイバーのホモロジーも $m+1$ 次以上で消えている時，

**定理 9** ([18, Theorem 4.6])**.** $k > n - \dim(G), l > m - \dim(G)$ に対して，(一般には非自明な) 積

$$\overline{\mu} : H_k(X) \otimes H_l(Y) \to H_{k+l+dim(G)-dim(M)+1}(P)$$

が定義される。

[3] 以下の議論は $f, g$ がファイブレーションでない時も，通常の pullback を homotopy pullback に置き換えれば通用する。

[4] 適当な向き付け可能性のもと，$\mu$ は multiplicative な一般ホモロジー上にも同様に定義される。

次数のシフトが$\mu$と$\overline{\mu}$で1違う点に注意されたい。この$\overline{\mu}$は，$\mu$が消える時に定義されるので，二次同変外部積と呼ぶことにする。定義はホモトピー論で古典的なhomotopy join (c.f. [12]) という構成を用いてなされる。homotopy join は懸垂の一般化であり，そこから余分な次数1のシフトが出てくる。詳しい定義は多少技術的であるので述べないが，その代わりに簡単な場合の具体的な計算を後の例17でとりあげる。

## 4. 応用

### 4.1. ループ積

前章で定義された同変外部積$\mu$を umkehr 写像の代用として，(3) で$M$を$M_G$に置き換えた図式に用いるとただちに，ループ積

$$H_k(L(M_G)) \otimes H_l(L(M_G)) \to H_{k+l+\dim(G)-\dim(M)}(L(M_G))$$

が，また (4) からはループ余積

$$H_*(L(M_G)) \to H_{*+\dim(G)-\dim(M)}(L(M_G) \times L(M_G))$$

が得られる。次数のシフトを考慮して$\mathbb{H}_*(L(M_G)) := H_{*+\dim(M)-\dim(G)}(L(M_G))$とおくと，ループ積により$\mathbb{H}_*(L(M_G))$は次数付き環になる。その定義から明らかなように，$G$が自明な時は Chas-Sullivan の積に一致し，$M$が一点の時はChataur-Menichi の積に一致する[5]。

同変外部積を用いることのひとつの利点は，そこから派生する構成の性質がほぼ自明に従うことである。例えば，定理8より直ちに次が従う。

**系 10** ([18, Example 3.4], c.f. [28]). Chataur-Menichi のループ積は0次以外では自明である。より一般に，$\mathbb{K}$を体として，$\sqcup_{i=1}^{p} S^1$から$\sqcup_{i=1}^{q} S^1$への有向コボルディズムに対応する Chataur-Menichi の stringy operation

$$H_*(LBG; \mathbb{K})^{\otimes p} \to H_*(LBG; \mathbb{K})^{\otimes q}$$

は，0次以外では種数0かつ$p = 1$の時以外は自明である。

ただし，一般ホモロジーにおいては$LBG$のループ積が自明でない例も存在する。

**命題 11** ([18, Example 3.6]). 枠付きボルディズム$\Omega^{fr}(LBS^1)$のループ積は非自明である。

さらに，評価写像$ev_0 : LBG \to BG$のファイバーが$G$とホモトピー同値であることに注意して，ループ積の定義で$\mu$の代わりに$\overline{\mu}$を用いると，$k, l > 0$に対して "二次ループ積"

$$H_k(LBG) \otimes H_l(LBG) \to H_{k+l+\dim(G)+1}(LBG) \tag{12}$$

が定義される。この二次ループ積は，$G$が有限群の場合に Tate のカップ積と関連することを後に見る。

[5] $M_G$は Gorenstein 空間であり，その次元は$\dim(M) - \dim(G)$である。体係数ではこのループ積は Félix-Thomas [13] のものにスカラー倍を除いて一致する。

### 4.2. 同変ホモロジーの外部積

少し脇道にそれるが，$\mu$ と $\overline{\mu}$ のループ積以外の応用も紹介したい。$G$ 作用を持つ空間 $K$ と $L$ の Borel 構成と射影 $K_G \to BG, L_G \to BG$ のなす pullback 図式

$$\begin{tikzcd}
(K \times L)_G \arrow[r] \arrow[d] & K_G \arrow[d] \\
L_G \arrow[r] & BG
\end{tikzcd}$$

を考えると，$\mu$ は Borel 同変ホモロジー上に外部積

$$H_k^G(K) \otimes H_l^G(L) \to H_{k+l+\dim(G)}^G(K \times L)$$

を定める。通常のクロス積は $H_k^G(K) \otimes H_l^G(L) \to H_{k+l}^{G\times G}(K \times L)$ の形をしていることに注意されたい。また，$\overline{\mu}$ は，$k > \dim(K) - \dim(G), l > \dim(L) - \dim(G)$ の時に

$$H_k^G(K) \otimes H_l^G(L) \to H_{k+l+\dim(G)+1}^G(K \times L)$$

を定める。

### 4.3. 交叉積と Tate のカップ積

(6) において $X = Y = M_G$ として，すべて恒等写像で構成された pullback 図式を考えると，$\mu$ は同変交叉積

$$H_k^G(M) \otimes H_l^G(M) \to H_{k+l+\dim(G)-\dim(M)}^G(M) \tag{13}$$

を定める。また $\overline{\mu}$ は $k, l > \dim(M) - \dim(G)$ のとき二次同変交叉積

$$H_k^G(M) \otimes H_l^G(M) \to H_{k+l+\dim(G)-\dim(M)+1}^G(M) \tag{14}$$

を定める。後者は M. Kreck によって stratifold の理論 [19] を使って幾何的に定義された積に一致することが示せる。さらに $G$ が有限群で $M$ が一点の時は，Tene の結果 [30] と合わせることで，$G$ の Tate コホモロジー $\hat{H}^*(G)$ との関連が示される。有限群 $G$ の Tate コホモロジー [29] は，群ホモロジーとコホモロジーをひとまとめにした対象であり，加群としては次の同型がある:

$$\hat{H}^i(G) \simeq \begin{cases} H^i(BG) & (i \geq 1) \\ \mathbb{Z}/|G|\mathbb{Z} & (i = 0) \\ 0 & (i = -1) \\ H_{-i-1}(BG) & (i \leq -2). \end{cases}$$

$\hat{H}^i(G)$ はカップ積の構造を持ち，特にホモロジー上に積

$$H_k(BG) \otimes H_l(BG) \to H_{k+l+1}(BG) \qquad (k, l > 0)$$

を定める。これは $\dim(G) = \dim(M) = 0$ の時に (14) が定める積と同じ形をしている。

**定理 15** ([18, Corollary 7.2])**.** $G$ が有限群で $M$ が一点の時，(14) は同型 $\hat{H}^i(G) \simeq H_{-i-1}(BG)$ を通して Tate のカップ積と一致する。

この意味で，二次同変交叉積 (14) は，Tate のカップ積を一般化している。また，$\overline{\mu}$ の自然性から二次ループ積 (12) との関連が従う。

**命題 16** ([18, Proposition 6.6])**.** 定数写像 $i : BG \to LBG$ の誘導する写像 $i_* : H_*(BG) \to H_*(LBG)$ は，$H_*(BG)$ の二次同変交叉積を $H_*(LBG)$ の二次ループ積にうつす。

定数写像 $i$ は $ev_0 : LBG \to BG$ の断面であるから，$H_*(BG)$ は $H_*(LBG)$ に積を保って埋め込まれている。特に，$H_*(BG)$ の二次同変交叉積が非自明ならば $H_*(LBG)$ の二次ループ積も非自明である。実際に次の例で，$H_*(BG)$ の二次同変交叉積が非自明であるものを扱う。本稿では二次積の定義を述べていないが，なるべくその構成の雰囲気も含めて伝わるように計算例を取り上げる。

**Example 17** ([18, Example 6.1, Proposition 7.7])**.** $G = S^1$ とする。$BS^1 \simeq \mathbb{C}P^\infty$ であるから，そのホモロジーは偶数次に一つずつ生成元をもつ自由加群である。$2i$ 次の生成元を $\iota_i : \mathbb{C}P^i \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ が代表するサイクルにとり，これを $[\mathbb{C}P^i]$ と書くことにする。この時，$[\mathbb{C}P^k]$ と $[\mathbb{C}P^l]$ の二次同変交叉積は，図式

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathbb{C}P^l \arrow[dl] \arrow[dd, "\iota_l"] \\
& B \arrow[dr, dashed, "q"] & \\
\mathbb{C}P^k \arrow[ur] \arrow[rr, "\iota_k"] & & BS^1
\end{tikzcd}$$

を用いて，$q_*([B])$ と定義される。ただし，外側の正方形は homotopy pullback で，左上の四角形は homotopy pushout でそれぞれ定義され，$q$ は whisker 写像である。$\mathbb{C}P^i \simeq S^{2i+1}/S^1$ であることに注意すると，$P \simeq (S^{2k+1} \times S^{2l+1})/\Delta(S^1)$, $B \simeq S^{2k+2l+3}/S^1 \simeq \mathbb{C}P^{k+l+1}$ であることがわかる。以上より $\overline{\mu}([\mathbb{C}P^k], [\mathbb{C}P^l]) = [\mathbb{C}P^{k+l+1}]$ と定まる。

有限巡回群の分類空間および $BS^3 = BSU(2)$ についても同様の議論により計算できる。一方，$G$ の階数が 2 以上である時は，$H_*(BG)$ の二次同変交叉積はねじれ元に値をとることが示される (c.f. [25, 系 4.7])。

$M$ が一点でない場合の具体例もあげておく。

**Example 18.** $S^1$ の $\mathbb{C}P^1$ への標準作用を考える。$H_*^{S^1}(\mathbb{C}P^1)$ は次で代表されるサイクルにより生成される自由加群である:

$$\begin{aligned}
\alpha_{2i} &: S^{2i+1} \times_{S^1} pt \hookrightarrow ES^1 \times_{S^1} \mathbb{C}P^1 \qquad (i \geq 0) \\
\beta_{2i+2} &: S^{2i+1} \times_{S^1} \mathbb{C}P^1 \hookrightarrow ES^1 \times_{S^1} \mathbb{C}P^1 \qquad (i \geq 0).
\end{aligned}$$

この時，$\overline{\mu} : H_*^{S^1}(\mathbb{C}P^1) \otimes H_*^{S^1}(\mathbb{C}P^1) \to H_*^{S^1}(\mathbb{C}P^1)$ は

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}(\alpha_{2k}, \alpha_{2l}) &= 0 \\
\overline{\mu}(\alpha_{2k}, \beta_{2l+2}) &= \alpha_{2(k+l+1)} \\
\overline{\mu}(\beta_{2k+2}, \beta_{2l+2}) &= \beta_{2(k+l+1)+2}
\end{aligned}$$

と計算される。

## 5. 終わりに

最後にいくつか気になっている問題を列挙して本稿を終えたい。

1. $H^G_*(M)$ の二次同変交叉積と [16] により一般化された Tate コホモロジーのカップ積との関連
2. $H_*(BG)$ の二次同変交叉積は $G$ の階数が 2 以上の時は自明か (c.f. [4])
3. 空間への群作用の存在に関する二次積の応用 (c.f. [27])
4. $G$ のそれ自身への共役作用を考えると，ホモトピー同値 $LBG \simeq EG \times_G G$ により，同変交叉積 (13) は $H_k(LBG) \otimes H_l(LBG) \to H_{k+l}(LBG)$ を定めるが，これは定理 8 により正の次数では自明である。対応する二次同変交叉積 (14)

$$H_k(LBG) \otimes H_l(LBG) \to H_{k+l+1}(LBG) \qquad (k, l > 0)$$

   は自明か。
5. ループ積以外の二次 stringy operation の構成 (c.f. [25])
6. 計算方法の確立，特に Eilenberg-Moore スペクトル系列や bar 構成との関係，(コ) ホモロジーオペレーションとの関係

興味を持って取り組んでいただける方がいらっしゃれば幸いである。

## 参考文献


[1] A. Ángel, E. Backelin, and B. Uribe, Hochschild cohomology and string topology of global quotient orbifolds, Journal of Topology 5 (2012), 593–638.

[2] J. C. Becker and D. H. Gottlieb, A history of duality in algebraic topology, In History of topology, 725–745. North-Holland, Amsterdam, 1999.

[3] K. Behrend, G. Ginot, B. Noohi, and P. Xu, String topology for stacks, Astérisque 343 (2012).

[4] D. Benson and J. Carlson, Products in negative cohomology, J. Pure Appl. Algebra 82 (1992), no. 2, 107–129.

[5] M. J. Boardman, Stable homotopy theory (mimeographed), University of Warwick, 1966. (available at `http://math.ucr.edu/~res/inprogress/Boardman-V.pdf`)

[6] M. Chas and D. Sullivan, String Topology, preprint, arxiv:math.GT/9911159.

[7] M. Chas and D. Sullivan, Closed string operators in topology leading to Lie bialgebras and higher string algebra, In The legacy of Niels Henrik Abel, 771–784, Springer, Berlin, 2004.

[8] D. Chataur and L. Menichi, String topology of classifying spaces, J. Reine Angew. Math. 669 (2012), 1–45.

[9] R. L. Cohen and V. Godin, A polarized view of string topology, In Topology, geometry and quantum field theory, 127–154, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 308, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

[10] R. L. Cohen and J. D. S. Jones, A homotopy theoretic realization of string topology, Math. Ann. 324 (2002), no. 4, 773–798.

[11] R. L. Cohen, J. D. S. Jones, and J. Yan, The loop homology algebra of spheres and projective spaces, In Categorical decomposition techniques in algebraic topology (Isle of Skye, 2001), Progr. Math. 215, 77–92, Birkhäuser, Basel, 2004.

[12] J. P. Doeraene, Homotopy pull backs, homotopy push outs and joins, Bull. of the Belg. Math. Soc. Simon Stevin 5-1 (1998), 15–37.

[13] Y. Félix and J. -C. Thomas, String topology on Gorenstein spaces, Math. Ann. 345 (2009), no. 2, 417–452.

[14] V. Godin, Higher string topology operations, preprint, arXiv:math.AT/0711.4859.

[15] W. M. Goldman, Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations, Invent. Math. 85 (1986), no. 2, 263–302.

[16] J. P. C. Greenlees and J. P. May, Generalized Tate cohomology, Mem. Amer. Math. Soc. 113 (1995), no. 543.

[17] R. Hepworth and A. Lahtinen, On string topology of classifying spaces, Advances in Mathematics 281 (2015), pp. 394–507.

[18] S. Kaji and H. Tene, Products in equivariant homology, preprint, arXiv:1506.00441.

[19] M. Kreck, Differential Algebraic Topology: From Stratifolds to Exotic Spheres, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 110 (2010).

[20] K. Kuribayashi and L. Menichi, The BV algebra in String Topology of classifying spaces, to appear in Canadian Journal of Mathematics.

[21] K. Kuribayashi, L. Menichi, and T. Naito, Derived string topology and the Eilenberg-Moore spectral sequence, Israel Journal of Mathematics 209 (2015), 745–802.

[22] F. Laudenbach, A note on the Chas-Sullivan product, Enseign. Math. (2) 57 (2011), no. 1–2, 3–21.

[23] E. Lupercio, B. Uribe, and M. A. Xicotencatl, Orbifold string topology, Geom. Topol. 12(4) (2008), 2203–2247.

[24] H. G. Mbiakop, Produit de Chas-Sullivan et actions d'un groupe de Lie connexe, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 353 (2015), no. 5, 459–463.

[25] T. Naito, Sullivan's coproduct on the reduced loop homology, 日本数学会 2017 年度秋季総合分科会・トポロジー分科会・特別講演

[26] D. Sullivan, String topology background and present state, In Current developments in mathematics, 2005, 41–88, Int. Press, Somerville, MA, 2007

[27] R. G. Swan, A new method in fixed point theory, Comment. Math. Helv. 34 (1960), 1–16.

[28] H. Tamanoi, Stable string operations are trivial. Int. Math. Res. Not. 24 (2009), 4642–4685.

[29] J. Tate, The higher dimensional cohomology groups of class field theory, Ann. of Math., 56, no. 2 (1952), 294–297.

[30] H. Tene, On the product in negative Tate cohomology for finite groups, Algebr. Geom. Topol. 12 (2012), no. 1, 493–509.

[31] V. G. Turaev, Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 24 (1991), no. 6, 635–704.