# カンドルの分類空間の
# 二次ホモトピー群について

野坂　武史

九州大学 数理学研究院 助教

## 今日のモチベーション

$\boldsymbol{X}$: カンドル $\fallingdotseq$ $\left(\begin{array}{c}\text{結び目論に相性がよく分配則を満たす代数系} \\ \text{等質空間に入る良い二項演算, } \textbf{crossed } \boldsymbol{G}\textbf{-set}\end{array}\right)$

※ 結び目論や **Braid** 群への活用は幾らか或る.

ホモトピー論的, コホモロジー論的なアプローチ.

## 今日のモチベーション

$\boldsymbol{X}$: カンドル $\quad \fallingdotseq \quad \left( \begin{array}{c} \text{結び目論に相性がよく分配則を満たす代数系} \\ \text{等質空間に入る良い二項演算, } \textbf{crossed } \boldsymbol{G}\textbf{-set} \end{array} \right)$

※ 結び目論や **Braid** 群への活用は幾らか或る.

ホモトピー論的, コホモロジー論的なアプローチ.

[**Fenn-Rourke-Sanderson, 95**] の結果 (ただし 定性的)

- 分類空間 $\boldsymbol{BX}$ を構成した. (□-**set** の幾何実現)
- $\boldsymbol{\pi_2(BX)} \cong$ "($\boldsymbol{X}$-色付き絡み目のボルディズム群)"

## 今日のモチベーション

$\boldsymbol{X}$: カンドル $\quad \fallingdotseq \quad \left( \begin{array}{c} \text{結び目論に相性がよく分配則を満たす代数系} \\ \text{等質空間に入る良い二項演算, crossed } G\text{-set} \end{array} \right)$

※ 結び目論や Braid 群への活用は幾らか或る.

ホモトピー論的, コホモロジー論的なアプローチ.

[Fenn-Rourke-Sanderson, 95] の結果 (ただし 定性的)

- 分類空間 $BX$ を構成した. ($\square$-set の幾何実現)
- $\pi_2(BX) \cong$ "($X$-色付き絡み目のボルディズム群)"

問題
- $\pi_2(BX)$ の 定量的 な計算手法を作れ.
- $\pi_2(BX)$ の計算の障害は何か.

主定理(N.)

$(X, \triangleleft)$: “連結”な有限カンドル

$$t_X := \min\{n \mid (\cdots(x \overbrace{\triangleleft y)\cdots) \triangleleft y}^{n\text{-回作用}} = x, \ \ {}^{\forall}x, y \in X\ \}.$$ タイプ

$\Longrightarrow$

主定理(N.)

$(X, \triangleleft)$: “連結”な有限カンドル

$$t_X := \min\{n \mid (\cdots(x \overbrace{\triangleleft y)\cdots) \triangleleft y}^{n\text{-回作用}} = x, \ \ {}^{\forall}x, y \in X\ \}.$$ タイプ

$\Longrightarrow$

$^{\exists}$ 準同型 $\Phi_X$ s.t.

$$\Phi_X \qquad : \pi_2(BX)_{(\ell)} \longrightarrow H_3^{\mathrm{gr}}(\pi_1)_{(\ell)}$$

主定理(N.)

$(X, \triangleleft)$: “連結”な有限カンドル

$$t_X := \min\{n \mid \overbrace{(\cdots(x \triangleleft y)\cdots) \triangleleft y}^{n\text{-回作用}} = x, \ \ {}^{\forall}x, y \in X\ \}.$$ タイプ

$\Longrightarrow$

${}^{\exists}$ 準同型 $\Phi_X$ s.t.

$$\Phi_X \oplus \mathcal{H} : \pi_2(BX)_{(\ell)} \longrightarrow H_3^{\mathrm{gr}}(\pi_1)_{(\ell)} \oplus H_2(BX)_{(\ell)}$$

は同型である．ただし，$\ell$ は素数で，$(\ell, t_X) = 1$ とする．

主定理(N.)

$(X, \triangleleft)$: “連結”な有限カンドル

$$t_X := \min\{n \mid \overbrace{(\cdots(x \triangleleft y)\cdots) \triangleleft y}^{n\text{-回作用}} = x, \ \ {}^{\forall}x, y \in X\ \}.$$ タイプ

$\Longrightarrow$

$^{\exists}$ 準同型 $\Phi_X$ s.t.

$$\Phi_X \oplus \mathcal{H} : \pi_2(BX)_{(\ell)} \longrightarrow H_3^{\mathrm{gr}}(\pi_1)_{(\ell)} \oplus H_2(BX)_{(\ell)}$$

は同型である．ただし，$\ell$ は素数で，$(\ell, t_X) = 1$ とする．

系(N.)

(I) $BX$ の第１ポストニコフ不変量が解った ($t_X$-捩れ抜きで).

(II) ‘$H_3(BX; \mathbb{Z})$ が $H_3(\pi_1)$ から計算できる (“良い”捩れ部分で)’

## 課題

- $\mathbf{AT}$ の視点から, タイプ $t_X$ が何故重要かわからない.

- $\pi_2(BX)$ 上の同型が $\mathbf{AT}$ の手法だけで証明できていない.

- 基本群 $\pi_1(BX)$ は群の普遍中心拡大と相性がよい.

  $K$ 群的な応用はあるか？

# 目次


§1　カンドルの定義と例

§2　基本群 $\pi_1$ とホモトピー群 $\pi_2$ の計算方法.

§3　$BX$ の定義と、その基本的性質.

§4　カラリングと、ホモトピー群 $\pi_2(BX)$.

§5　写像 $\Phi_X$ の構成

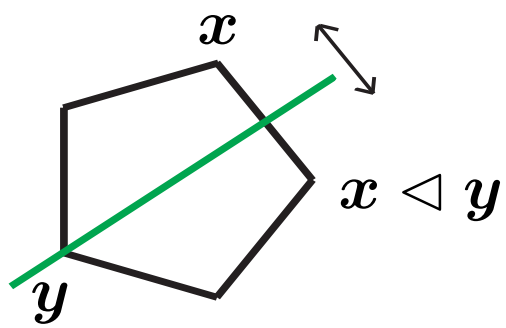
カンドル $(X,*)$ とは $\begin{cases} X & : \text{集合} \\ \triangleleft : X \times X \longrightarrow X \end{cases}$ で次をみたすもの

- $^\forall x \in X,$ $\quad x \triangleleft x = x$
- $^\forall y \in X,$ $\quad (\bullet \triangleleft y) : X \longrightarrow X$ は全単射.
- $^\forall x, y, z \in X,$ $\quad (x \triangleleft y) \triangleleft z = (x \triangleleft z) \triangleleft (y \triangleleft z)$

例. 二面体カンドル とは

$$X = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \qquad x \triangleleft y \overset{\text{def}}{=} 2y - x$$

$$t_X = 2$$

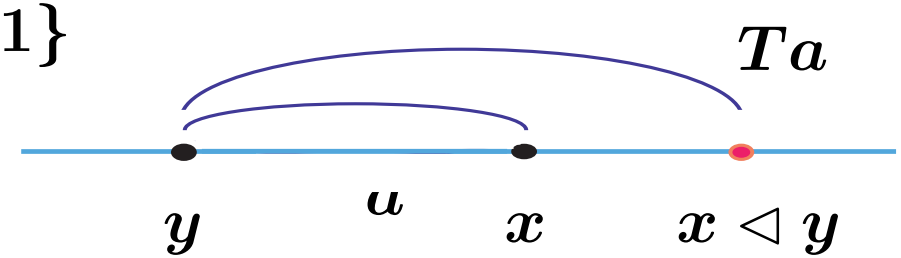



例. アレクサンダーカンドル/ $\mathbb{F}_q$

$X = \mathbb{F}_q$ : 有限体, $\omega \in \mathbb{F}_q \setminus \{0,1\}$

$x \triangleleft y := y + \omega(x - y)$

$(\bullet \triangleleft y)$= '$y$ による $\omega$ 等分点'



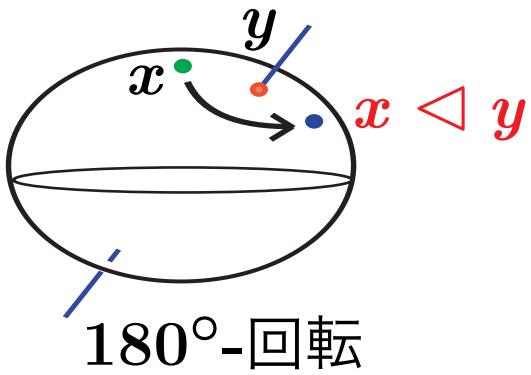
例. 球面カンドル / $K$

$$S_K^n := \{ \vec{x} \in (K)^{n+1} \mid \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 1 \}$$

$$x \lhd y := \underline{2\langle x, y \rangle} y - x$$

↑ 標準２次形式

$$\mathrm{Type}(X) = 2$$



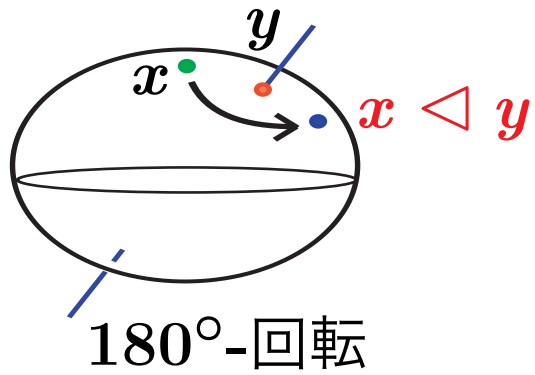
例. 球面カンドル / $K$

$$S_K^n := \{ \vec{x} \in (K)^{n+1} \mid \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 1 \}$$

$$x \lhd y := \underline{2\langle x, y\rangle} y - x$$

↑ 標準２次形式

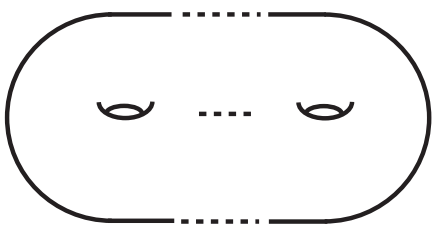
$$\mathrm{Type}(X) = 2$$




例. シンプレクティックカンドル / $K$

$\Sigma_g$: 種数 $g$ の向付き閉曲面

$$X := H_1(\Sigma_g; K) \setminus \{0\} = K^{2g} \setminus \{0\}$$



$$x \lhd y := \langle x, y\rangle y + x$$

ここで $\langle\ ,\ \rangle : H_1(\Sigma_g; K) \otimes H_1(\Sigma_g; K) \to K$ : 斜交２次形式.

$$\mathrm{Type}(X) =$$

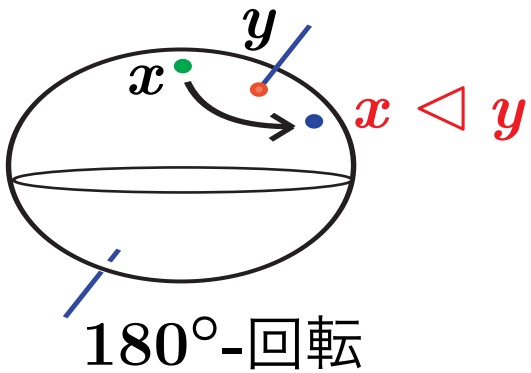
例. 球面カンドル / $K$

$$S_K^n := \{ \vec{x} \in (K)^{n+1} \mid \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 1 \}$$

$$x \lhd y := \underline{2\langle x, y\rangle} y - x$$

↑ 標準２次形式

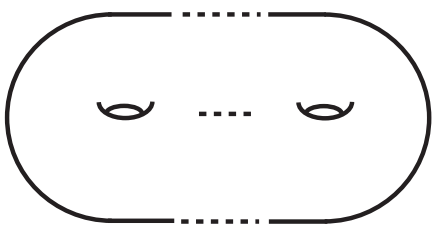
$$\mathrm{Type}(X) = 2$$




例. シンプレクティックカンドル / $K$

$\Sigma_g$: 種数 $g$ の向付き閉曲面

$$X := H_1(\Sigma_g; K) \setminus \{0\} = K^{2g} \setminus \{0\}$$



$$x \lhd^N y := N\langle x, y\rangle y + x$$

ここで $\langle\ ,\ \rangle : H_1(\Sigma_g; K) \otimes H_1(\Sigma_g; K) \to K$ : 斜交２次形式.

$$\mathrm{Type}(X) = \mathrm{Char}(K)$$

随伴群 $\mathbf{As}(X) := \langle y \in X \mid y \cdot z = z \cdot (y \triangleleft z) \rangle \qquad (\cong \pi_1(BX))$

$\Longrightarrow$

作用 $X \curvearrowleft \mathbf{As}(X)$ を $x \cdot y := x \triangleleft y$ と定める.

群 $\mathbf{Inn}(X) := \langle\ (\bullet \triangleleft x)\ \rangle_{x \in X} \quad \subset \mathfrak{S}_{|X|}$ を置く.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker} & \longrightarrow & \mathbf{As}(X) & \longrightarrow & \mathbf{Inn}(X) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ & & & & y & \longmapsto & (\bullet \triangleleft y) & & \end{array} \qquad (\text{中心拡大！})$$

随伴群 $\mathrm{As}(X) := \langle y \in X \mid y \cdot z = z \cdot (y \triangleleft z) \rangle \qquad (\cong \pi_1(BX))$

$\Longrightarrow$

作用 $X \curvearrowleft \mathrm{As}(X)$ を $x \cdot y := x \triangleleft y$ と定める.

群 $\mathrm{Inn}(X) := \langle\ (\bullet \triangleleft x)\ \rangle_{x \in X} \quad \subset \mathfrak{S}_{|X|}$ を置く.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker} & \longrightarrow & \mathrm{As}(X) & \longrightarrow & \mathrm{Inn}(X) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ & & & & y & \longmapsto & (\bullet \triangleleft y) & & \end{array} \qquad (\text{中心拡大！})$$

定理 (N.) $X$ は連結とする. (i.e., 作用 $X \curvearrowleft \mathrm{As}(X)$ が推移的).

(I) $\mathrm{As}(X) \to \mathbb{Z}$ は, アーベル化 $H_1(\mathrm{As}(X)) \cong \mathbb{Z}$ を与える.

(II) $H_2(\mathrm{As}(X))$ は, $t_X$ 倍で消える.

結論 $\pi_1(BX)$ は, 群 $\mathrm{Inn}(X)$ とその $H_2$ から解る! $\mathrm{mod}\ t_X$

定理 [**Eisermann**] $\boldsymbol{X}$ は連結とせよ　$(=\boldsymbol{X} \curvearrowleft \mathbf{As}(\boldsymbol{X})$ の推移性$)$.

$\Longrightarrow$

$\boldsymbol{H_2(BX) \cong H_1(\mathrm{Stab}(x_0))}$.

<u>定理の結論</u> $\boldsymbol{\pi_2(BX)}$ は, 群 $\mathbf{Inn}(\boldsymbol{X})$ から計算可能 $(\mathbf{mod}\ \boldsymbol{t_X})$

定理 [Eisermann] $X$ は連結とせよ　$(=X \curvearrowleft \mathrm{As}(X)$ の推移性$)$.

$\Longrightarrow$

$H_2(BX) \cong H_1(\mathrm{Stab}(x_0))$.

<u>定理の結論</u> $\pi_2(BX)$ は, 群 $\mathrm{Inn}(X)$ から計算可能 $(\mathrm{mod}\ t_X)$

例 $(g > 1)$　$X = H_1(\Sigma_g; \mathbb{F}_q) \setminus \{0\}$.　(Symplectic q'dl / $\mathbb{F}_q$)

$$\Downarrow \quad \text{transvection}$$

$$\mathrm{Inn}(X) \cong Sp(2g; \mathbb{F}_q) \subset GL(2g; \mathbb{F}_q)$$

$$\Downarrow \quad H_2(Sp(2g; \mathbb{F}_q)) = 0$$

$$\pi_1(BX) \cong \mathbb{Z} \times Sp(2g; \mathbb{F}_q)$$

定理 [Eisermann] $X$ は連結とせよ　$(=X \curvearrowleft \mathrm{As}(X)$ の推移性$)$.

$\Longrightarrow$

$H_2(BX) \cong H_1(\mathrm{Stab}(x_0))$.

<u>定理の結論</u> $\pi_2(BX)$ は, 群 $\mathrm{Inn}(X)$ から計算可能 $(\mathrm{mod}\ t_X)$

例 $(g > 1)$　$X = H_1(\Sigma_g; \mathbb{F}_q) \setminus \{0\}$.　(Symplectic q'dl / $\mathbb{F}_q$)

$\Downarrow$　transvection

$$\mathrm{Inn}(X) \cong Sp(2g; \mathbb{F}_q) \subset GL(2g; \mathbb{F}_q)$$

$\Downarrow$　$H_2(Sp(2g; \mathbb{F}_q)) = 0$

$$\pi_1(BX) \cong \mathbb{Z} \times Sp(2g; \mathbb{F}_q)$$

$\Downarrow$　主定理 & [Quillen-Friedlander]

$$\pi_2(BX) \cong H_2(BX) \oplus H_3(\pi_1)$$

定理 [Eisermann] $X$ は連結とせよ　$(=X \curvearrowleft \mathrm{As}(X)$ の推移性$)$.

$\Longrightarrow$

$H_2(BX) \cong H_1(\mathrm{Stab}(x_0))$.

<u>定理の結論</u> $\pi_2(BX)$ は, 群 $\mathrm{Inn}(X)$ から計算可能 $(\mathrm{mod}\ t_X)$

例 $(g > 1)$　$X = H_1(\Sigma_g; \mathbb{F}_q) \setminus \{0\}$.　(Symplectic q'dl / $\mathbb{F}_q$)

$\Downarrow$　transvection

$$\mathrm{Inn}(X) \cong Sp(2g; \mathbb{F}_q) \subset GL(2g; \mathbb{F}_q)$$

$\Downarrow$　$H_2(Sp(2g; \mathbb{F}_q)) = 0$

$$\pi_1(BX) \cong \mathbb{Z} \times Sp(2g; \mathbb{F}_q)$$

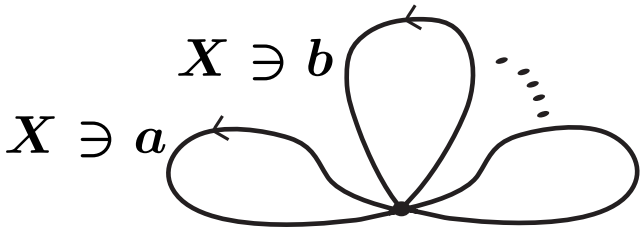
$\Downarrow$　主定理 & [Quillen-Friedlander]

$$\pi_2(BX) \cong H_1(\mathrm{Stab}(x_0)) \oplus K_3(\mathbb{F}_q)$$

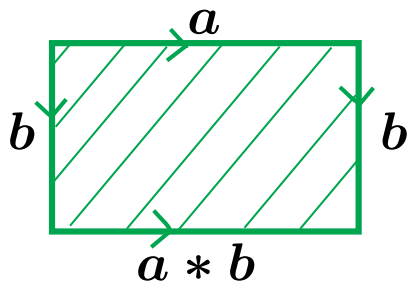
$$\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/(q^2 - 1).$$

## §2 ラック空間 (Fenn-Rourke-Sanderson) $BX \overset{\text{def}}{=} \bigcup (d\text{-skeleton})$

**1-skeleton**

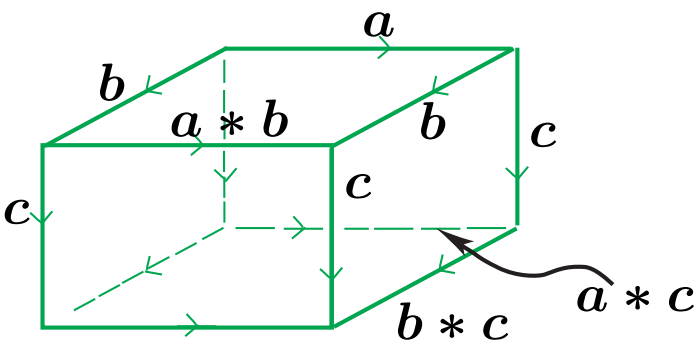



**2-skeleton** $= ((a, b)\text{-cells}) \cup$ **1-skeleton**




**3-skeleton** $= ((a, b, c)\text{-cells})$

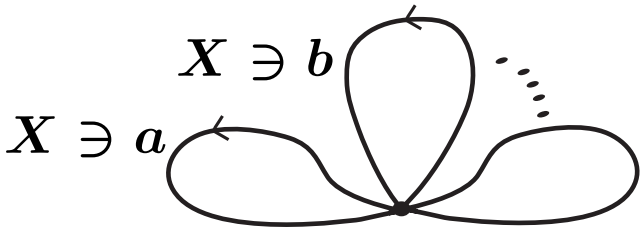
$\cup$ **2-skeleton**



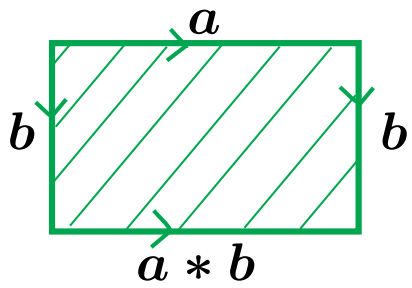

$(a * b) * c$
$= (a * c) * (b * c)$

## §2 ラック空間 (Fenn-Rourke-Sanderson) $BX \overset{\text{def}}{=} \bigcup(d\text{-skeleton})$

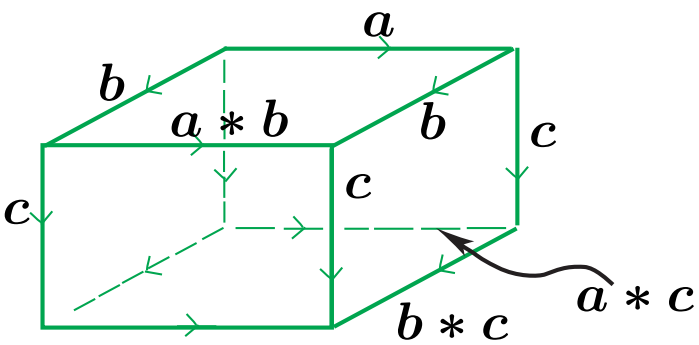
**1-skeleton**




**2-skeleton** $= ((a, b)\text{-cells}) \cup$ **1-skeleton**

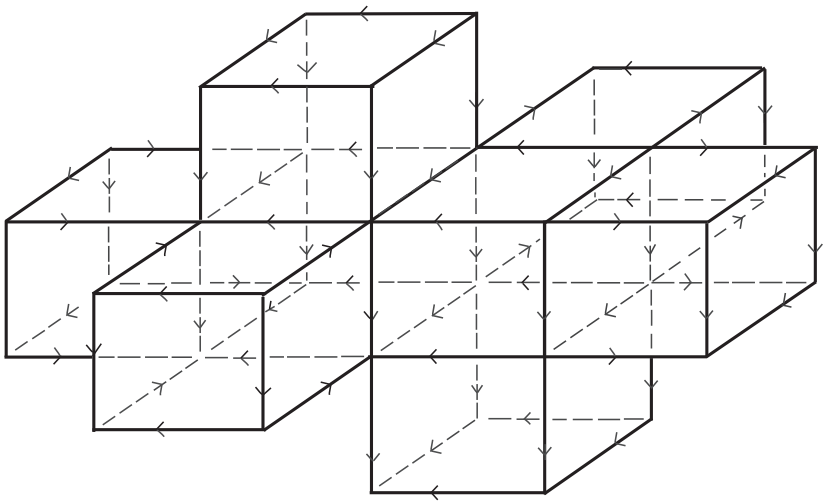



**3-skeleton** $= ((a, b, c)\text{-cells}) \cup$ **2-skeleton**




$(a * b) * c$
$= (a * c) * (b * c)$

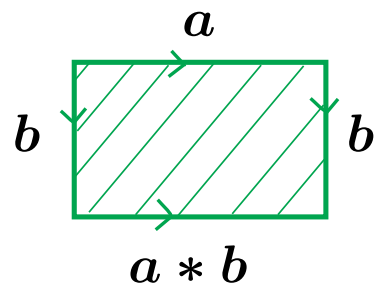
**4-skeleton** $= ((a, b, c, d)\text{-cells}) \cup$ **3-skeleton**



## $BX$ の基本的性質　(特に, $\pi_1(BX) \curvearrowright \pi_*(BX)$ の自明性)

$\pi_1(BX) \cong \langle a \in X \mid (a * b) = b^{-1} \cdot a \cdot b \rangle$　(非可換無限群!)

$Y$ : $\pi_1(BX)$ の作用付の集合




$$BX_Y = \bigcup_{n \geq 0} \left( Y \times ([0,1] \times X)^n \right) / \sim$$

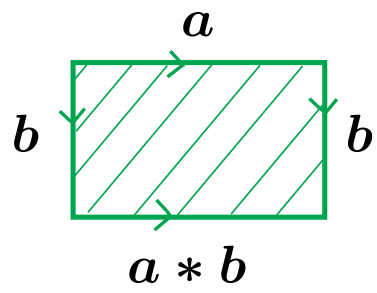
$$(y; t_1, x_1, \ldots, x_{j-1}, 1, x_j, t_{j+1}, \ldots, t_n, x_n) \sim (y \cdot x_j; t_1, x_1 * x_j, \ldots, t_{j-1}, x_{j-1} * x_j, t_{j+1}, x_{j+1}, \ldots, t_n, x_n),$$

$$(y; t_1, x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, x_j, t_{j+1}, \ldots, t_n, x_n) \sim (y; t_1, x_1, \ldots, t_{j-1}, x_{j-1}, t_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, t_n, x_n).$$

## $BX$ の基本的性質　(特に, $\pi_1(BX) \curvearrowright \pi_*(BX)$ の自明性)

$\pi_1(BX) \cong \langle a \in X \mid (a * b) = b^{-1} \cdot a \cdot b \rangle$　(非可換無限群!)

$Y$ : $\pi_1(BX)$ の作用付の集合




$$BX_Y = \bigcup_{n \geq 0} \left( Y \times ([0,1] \times X)^n \right) / \sim$$

$$(y; t_1, x_1, \ldots, x_{j-1}, 1, x_j, t_{j+1}, \ldots, t_n, x_n) \sim (y \cdot x_j; t_1, x_1 * x_j, \ldots, t_{j-1}, x_{j-1} * x_j, t_{j+1}, x_{j+1}, \ldots, t_n, x_n),$$

$$(y; t_1, x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, x_j, t_{j+1}, \ldots, t_n, x_n) \sim (y; t_1, x_1, \ldots, t_{j-1}, x_{j-1}, t_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, t_n, x_n).$$

注意
- $Y$ が一点の時, $BX_Y = BX$
- 射影 $BX_Y \longrightarrow BX$ は被覆空間である. Fibre $= Y$.
- $Y = \mathrm{As}(X) \curvearrowleft \pi_1(BX)$ の時, $BX_Y$ は普遍被覆である.

$\Big($• $Y = X$ の時, 同型 $H_n(BX_X) \cong H_{n+1}(BX)$ がある.$\Big)$

## $BX$ の普遍被覆空間上のモノイド構造 (Clauwens)

$Y := \mathrm{As}(X)$ とする.

$$BX_Y = \bigcup \left( \mathrm{As}(X) \times ([0,1] \times X)^n \right) / \sim$$

$$\mu : (Y \times [0,1]^n \times X^n) \times (Y \times [0,1]^m \times X^m) \to Y \times [0,1]^{n+m} \times X^{n+m},$$

$$\mu([g; t_1, \ldots, t_n, x_1, \ldots, x_n], [h; t'_1, \ldots, t'_m, x'_1, \ldots, x'_m]) :=$$

$$[gh; t_1, \ldots, t_n, t'_1, \ldots, t'_m, x_1 \cdot h, \ldots, x_n \cdot h, x'_1, \ldots, x'_m],$$

## $BX$ の普遍被覆空間上のモノイド構造 (Clauwens)

$Y := \mathrm{As}(X)$ とする.

$$BX_Y = \bigcup \left( \mathrm{As}(X) \times ([0,1] \times X)^n \right) / \sim$$

$$\mu : (Y \times [0,1]^n \times X^n) \times (Y \times [0,1]^m \times X^m) \to Y \times [0,1]^{n+m} \times X^{n+m},$$

$$\mu([g; t_1, \ldots, t_n, x_1, \ldots, x_n], [h; t'_1, \ldots, t'_m, x'_1, \ldots, x'_m]) :=$$

$$[gh; t_1, \ldots, t_n, t'_1, \ldots, t'_m, x_1 \cdot h, \ldots, x_n \cdot h, x'_1, \ldots, x'_m],$$

### この幾つかの帰結

- 作用 $\pi_1(BX) \curvearrowright \pi_n(BX)$ は自明である. (cf. $H$-空間)
- $|X| < \infty \implies \pi_*(BX)$ は有限生成である.
- さらに $X$ が連結 $\implies$ 有理化は $BX_{(0)} \cong \Omega S^2_{(0)}$ である.

  ($X \curvearrowleft \mathrm{As}(X)$ が推移的)

  ($\because$ $Y$ が一点の時, $BY \simeq \Omega S^2$ である [FRS])

## ラックホモロジー $H_*(BX)$ についての既知の結果

- **[03, T. Mochizuki]** $X = \mathbb{F}_q, \omega \in \mathbb{F}_q,\ x \triangleleft y = \omega x + (1-\omega) y$

**2,3** 次 $H^2 \oplus H^3(BX; \mathbb{F}_q)$ が基底込で決定された．(が陳述が複雑!)

- **[09, N.]** $q = p$ とせよ．

“カンドルホモロジー” $H_*^Q(X; \mathbb{Z}) \left( \overset{\text{直和因子}}{\subset} H_*(BX; \mathbb{Z}) \right)$ を決定．

## ラックホモロジー $H_*(BX)$ についての既知の結果

- [03, T. Mochizuki] $X = \mathbb{F}_q, \omega \in \mathbb{F}_q,\ x \triangleleft y = \omega x + (1-\omega) y$

2,3 次 $H^2 \oplus H^3(BX; \mathbb{F}_q)$ が基底込で決定された．(が陳述が複雑!)

- [09, N.] $q = p$ とせよ．

“カンドルホモロジー” $H_*^Q(X;\mathbb{Z}) \left( \overset{\text{直和因子}}{\subset} H_*(BX;\mathbb{Z}) \right)$ を決定．

定理 (2 次 [07, Eisermann])

$X$: 連結カンドル, $X \curvearrowleft \mathrm{As}(X) \supset \overset{\text{固定部分群}}{\mathrm{Stab}(x_0)}$ をおく時,

$$H_2(BX;\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Stab}(x_0)_{\mathrm{ab}}.$$

## ラックホモロジー $H_*(BX)$ についての既知の結果

- [03, T. Mochizuki] $X = \mathbb{F}_q, \omega \in \mathbb{F}_q,\ x \triangleleft y = \omega x + (1-\omega) y$

2,3 次 $H^2 \oplus H^3(BX; \mathbb{F}_q)$ が基底込で決定された. (が陳述が複雑!)

- [09, N.] $q = p$ とせよ.

"カンドルホモロジー" $H_*^Q(X;\mathbb{Z}) \left( \overset{\text{直和因子}}{\subset} H_*(BX;\mathbb{Z}) \right)$ を決定.

定理 (2 次 [07, Eisermann])

$X$: 連結カンドル, $X \curvearrowleft \mathrm{As}(X) \supset \overset{\text{固定部分群}}{\mathrm{Stab}(x_0)}$ をおく時,

$$H_2(BX;\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Stab}(x_0)_{\mathrm{ab}}.$$

定理 (3 次 [12, N.]. $BX_X$ の応用例)

$X$: 有限位数の連結カンドル.

$$H_3(BX;\mathbb{Z})_{(\ell)} \cong H_3(\mathrm{As}(X);\mathbb{Z})_{(\ell)} \oplus H_2(\mathrm{Stab}(x_0);\mathbb{Z})_{(\ell)}$$

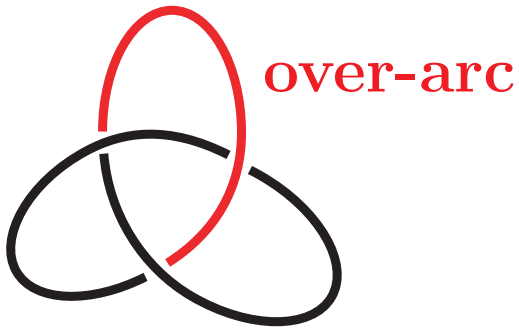
ここで $\ell$ は "妥当" な素数 ($\ell \neq 2$).

$\boldsymbol{X}$: カンドル

$\boldsymbol{D}$: 向付き絡み目図式 $\subset \boldsymbol{S^2}$

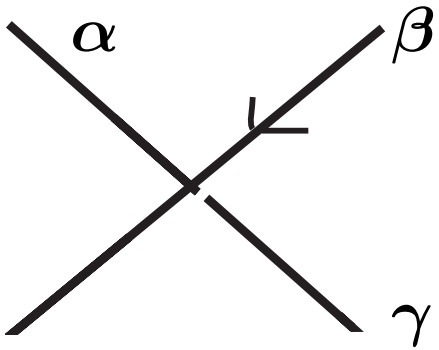
$X$: カンドル

$D$: 向付き絡み目図式 $\subset S^2$




$D$ の **$X$-coloring** とは

写像 $C : \{D \text{ の over-arcs } \} \to X$ で各交点で次をみたすもの




$$C(\alpha) \triangleleft C(\beta) = C(\gamma)$$

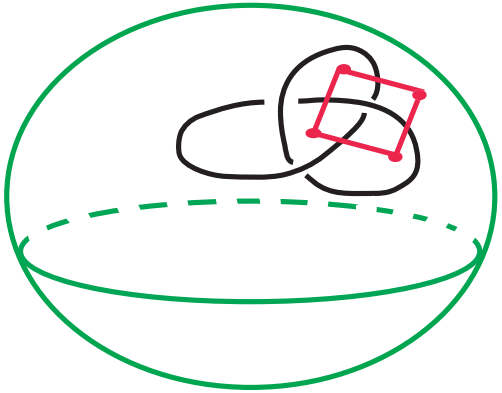
<u>基本事項</u>

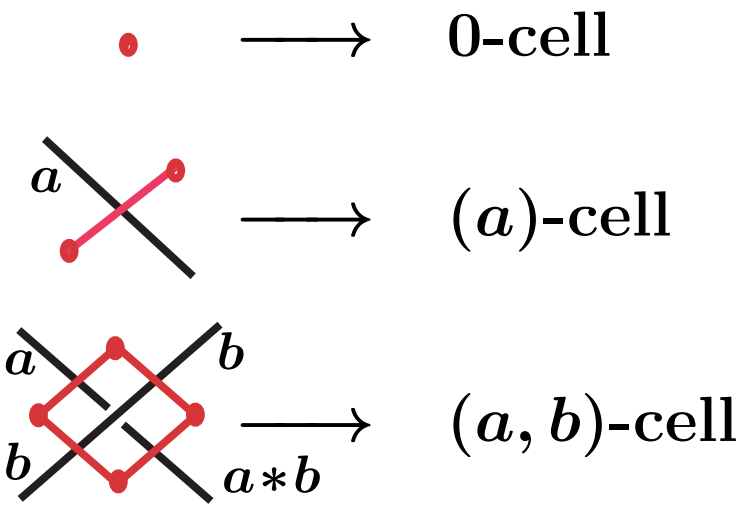
もし $D_1 \longleftrightarrow D_2$ がライデマイスター移動で移れば

$$\Longrightarrow \qquad \mathrm{Col}_X(D_1) \overset{\exists 1:1}{\longleftrightarrow} \mathrm{Col}_X(D_2).$$

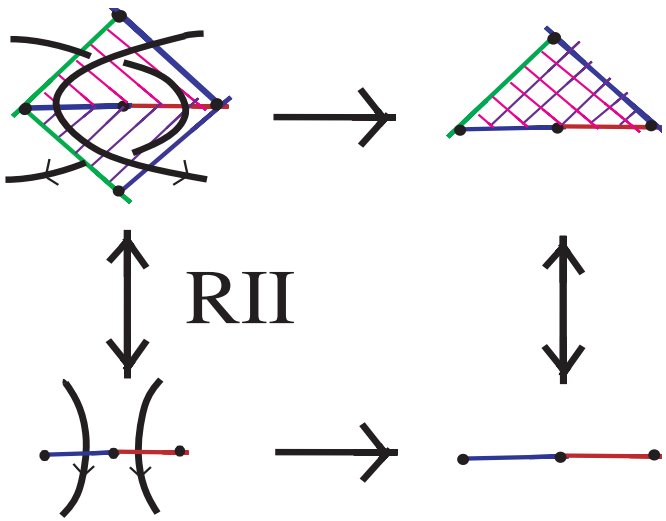
図式 $D$ の $X$-coloring $C$ に対して,

$\xi_{D,C}$ : $S^2 \longrightarrow BX$ を次のように定める

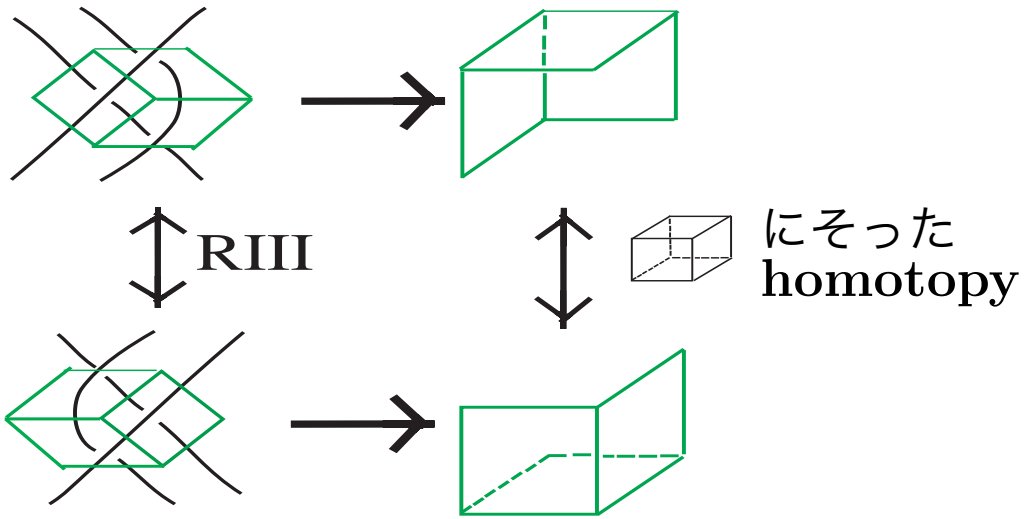





- RII 移動の不変性

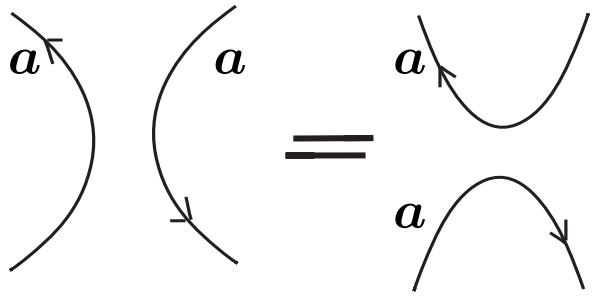



- RIII 移動の不変性



今やった事：$\{(C,D):\ X\text{-coloring } C \text{ of } D\}_{C,D} \longrightarrow \pi_2(BX)$

$\Pi_2(X) \overset{\text{def}}{=} \{\ (C,D)\ \}_{C,D}/$ R-II, III 移動, concordance 関係




**FACT** (Fenn-Rourke-Sanderson) (cf. Thom の基本定理)

Quandle $X$ に対し，同型 $\Pi_2(X) \cong \pi_2(BX)$ が誘導される．

注 $\Pi_n(X) \longrightarrow \pi_n(BX)$ は存在する．同型は怪しい $(n > 2)$．

まとめ[FRS]　$BX$：カンドル $X$ の分類空間

- $\pi_2(BX) \cong \Pi(X)$
- $\pi_1(BX) \cong \mathrm{As}(X) = \langle\, x \in X \mid y \cdot x = (x \lhd y) \cdot y \,\rangle.$
- 作用 $\pi_1(BX) \curvearrowright \pi_2(BX)$ は自明.

## ポストニコフ塔の一階 ($\pi_2$ の計算)　(Cartan, Serre)

$$\widetilde{BX} \longrightarrow BX \xrightarrow{\text{分類写像}} K(\pi_1, 1) \qquad \text{homotopy fiber.}$$

まとめ[FRS]　$BX$：カンドル $X$ の分類空間

- $\pi_2(BX) \cong \Pi(X)$
- $\pi_1(BX) \cong \mathrm{As}(X) = \langle\, x \in X \mid y \cdot x = (x \lhd y) \cdot y \,\rangle.$
- 作用 $\pi_1(BX) \curvearrowright \pi_2(BX)$ は自明.

## ポストニコフ塔の一階 ($\pi_2$ の計算)　(Cartan, Serre)

$$\widetilde{BX} \longrightarrow BX \xrightarrow{\text{分類写像}} K(\pi_1, 1) \qquad \text{homotopy fiber.}$$

$$\overset{\text{SSs 系列}}{\Longrightarrow}$$

$$H_3(BX) \xrightarrow{c_*} H_3(\pi_1) \to \pi_2(BX) \xrightarrow{\mathcal{H}} H_2(BX) \xrightarrow{c_*} H_2(\pi_1) \to 0$$

(exact)

命題 (N.) $X$ が連結 $\Longrightarrow$ 両翼 $c_*$ は $\mathrm{Type}(X)$ 倍で消える.

まとめ[FRS]　$BX$：カンドル $X$ の分類空間

- $\pi_2(BX) \cong \Pi(X)$
- $\pi_1(BX) \cong \mathrm{As}(X) = \langle\, x \in X \mid y \cdot x = (x \triangleleft y) \cdot y \,\rangle.$
- 作用 $\pi_1(BX) \curvearrowright \pi_2(BX)$ は自明.

## ポストニコフ塔の一階 ($\pi_2$ の計算)　(Cartan, Serre)

$$\widetilde{BX} \longrightarrow BX \xrightarrow{\text{分類写像}} K(\pi_1, 1) \qquad \text{homotopy fiber.}$$

$$\overset{\text{SSs 系列}}{\Longrightarrow}$$

$$H_3(BX) \xrightarrow{c_*} H_3(\pi_1) \to \pi_2(BX) \xrightarrow{\mathcal{H}} H_2(BX) \xrightarrow{c_*} H_2(\pi_1) \to 0$$

$\exists$　(exact)

低次元 top. より構成する.

命題 (N.) $X$ が連結 $\Longrightarrow$ 両翼 $c_*$ は $\mathrm{Type}(X)$ 倍で消える.

## §5 スプリットの構成

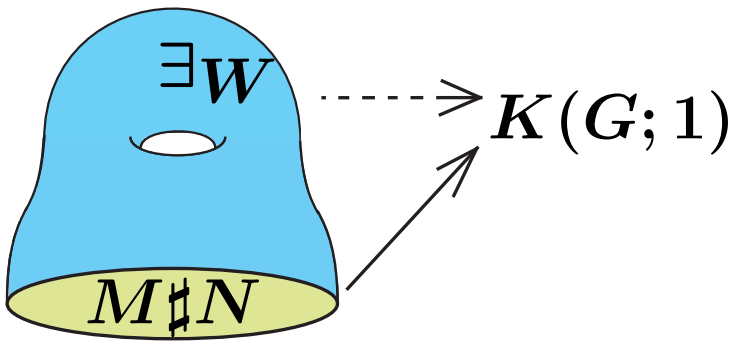
**Def.** (向付ボルディズム群) $G$: 群.

$$\Omega_n(G) := \left\{ (N, \pi_1(N) \xrightarrow{f} G) \mid N : \text{ori. cl.}n\text{-mfd} \right\} / G\text{-bordant}.$$

ここで $(N, f_1)$ と $(M, f_2)$ が $G$-bordant とは

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists W : (\mathrm{n}+1)\text{-mfd} \quad \text{s.t. } \partial W = (-M) \sharp N$$

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(W) \arrow[r, dashed, "\exists \bar{F}"] & G \\
\pi_1(M \sharp N) \arrow[u, "i_*"] \arrow[ur, "-f_1 * f_2"'] &
\end{tikzcd}$$



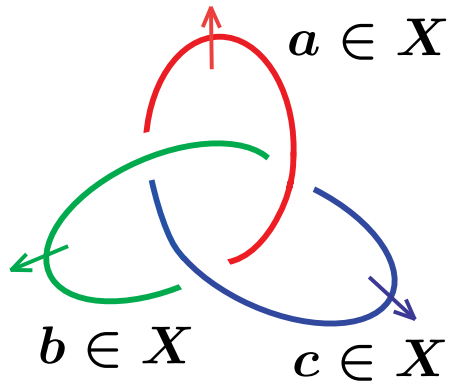

注. $(n = 3)$ $\quad \Omega_3(G) \cong H_3(G; \mathbb{Z}) \cong H_3(K(G, 1); \mathbb{Z})$.

## $\Phi_X$ の構成

$X$：連結な quandle で，type を $t$ とする.

全射 $\mathrm{As}(X) = \langle\, x \in X | y \cdot x = (x \triangleleft y) \cdot y \,\rangle \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \quad (x \mapsto 1)$

Given an $X$-coloring $C$ of $L \subset S^3$



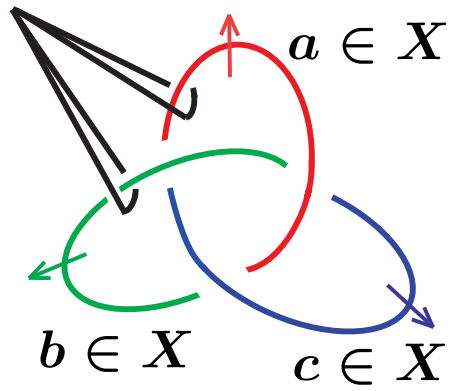
## $\Phi_X$ の構成

$X$：連結な quandle で，type を $t$ とする．

全射 $\mathrm{As}(X) = \langle\, x \in X | y \cdot x = (x \triangleleft y) \cdot y \,\rangle \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \quad (x \mapsto 1)$

Given an $X$-coloring $C$ of $L \subset S^3$

$\Downarrow$ Wirtinger 表示




$\pi_1(S^3 \setminus L) \longrightarrow \mathrm{As}(X)$ 群準同型

## $\Phi_X$ の構成

$X$：連結な quandle で，type を $t$ とする．

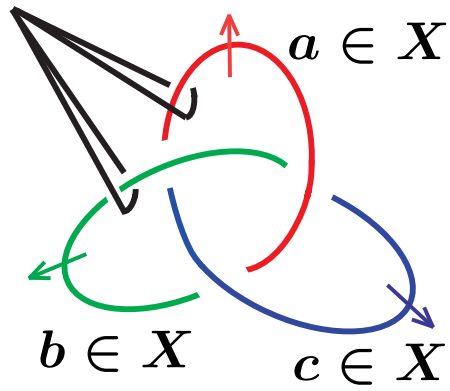
全射 $\mathrm{As}(X) = \langle\, x \in X | y \cdot x = (x \triangleleft y) \cdot y \,\rangle \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \quad (x \mapsto 1)$

Given an $X$-coloring $C$ of $L \subset S^3$

$\Downarrow$ Wirtinger 表示

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, equal] & \mathbb{Z} \\
\pi_1(S^3 \setminus L) \arrow[u, two heads] \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cup"] & \mathrm{As}(X) \arrow[u, two heads] \arrow[d, phantom, "\cup"] \\
\pi_1(\widetilde{S^3 \setminus L}) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{Ker}(\epsilon) \\
\pi_1(\widehat{C}^t_L) &
\end{tikzcd}$$

群準同型




$\widetilde{S^3 \setminus L}$: 巡回被覆 $\to S^3 \setminus L$

$\widehat{C}^t_L$: $L$ に沿った $t$-巡回分岐被覆

## $\Phi_X$ の構成

$X$：連結な quandle で，type を $t$ とする．

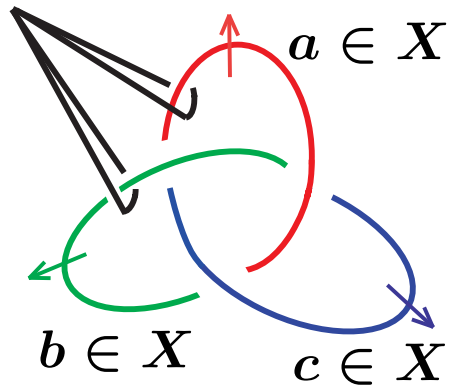
全射 $\mathrm{As}(X) = \langle\, x \in X | y \cdot x = (x \triangleleft y) \cdot y \,\rangle \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \quad (x \mapsto 1)$

Given an $X$-coloring $C$ of $L \subset S^3$

$\Downarrow$ Wirtinger 表示

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, equal] & \mathbb{Z} \\
\pi_1(S^3 \setminus L) \arrow[u, two heads] \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cup"] & \mathrm{As}(X) \arrow[u, two heads] \arrow[d, phantom, "\cup"] \\
\pi_1(\widetilde{S^3 \setminus L}) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{Ker}(\epsilon) \\
\pi_1(\widehat{C}^t_L) &
\end{tikzcd}$$

群準同型




$\widetilde{S^3 \setminus L}$: 巡回被覆 $\to S^3 \setminus L$

$\widehat{C}^t_L$: $L$ に沿った $t$-巡回分岐被覆

## $\Phi_X$ の構成

$X$：連結な quandle で，type を $t$ とする．

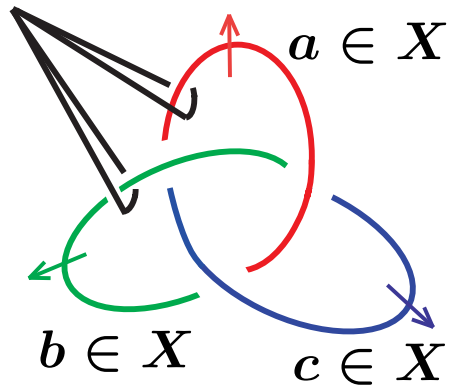
全射 $\mathrm{As}(X) = \langle\, x \in X | y \cdot x = (x \triangleleft y) \cdot y \,\rangle \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \quad (x \mapsto 1)$

Given an $X$-coloring $C$ of $L \subset S^3$

$\Downarrow$ Wirtinger 表示

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, equal] & \mathbb{Z} \\
\pi_1(S^3 \setminus L) \arrow[u, two heads] \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cup"] & \mathrm{As}(X) \arrow[u, two heads] \arrow[d, phantom, "\cup"] \\
\pi_1(\widetilde{S^3 \setminus L}) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{Ker}(\epsilon) \\
& \pi_1(\widehat{C}^t_L) \arrow[ur, dashed]
\end{tikzcd}
$$

群準同型




$\widetilde{S^3 \setminus L}$: 巡回被覆 $\to S^3 \setminus L$

$\widehat{C}^t_L$: $L$ に沿った $t$-巡回分岐被覆

まとめると, 次の写像を得た.

$$\left\{\mathbf{C}\text{: } \boldsymbol{X}\text{-coloring of } \boldsymbol{D}\ \right\} \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathbf{gr}}(\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{1}}(\widehat{C}^{\ell}_{\boldsymbol{L}}),\ \mathbf{As}(\boldsymbol{X}))$$

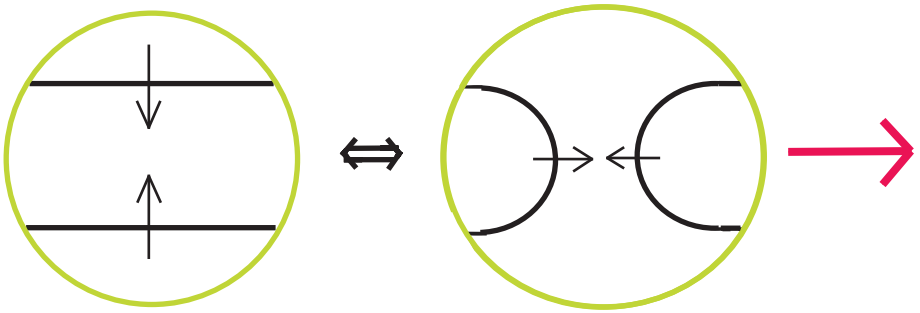
まとめると, 全ての絡み目図式で考えると, 次を得る

$$\left\{ C : X\text{-coloring of } D \right\}_D \longrightarrow \left\{ \mathrm{Hom}(\pi_1(\widehat{C}^t_L),\ \mathrm{As}(X)\ ) \right\}_L$$

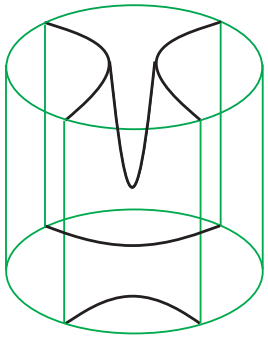
まとめると, 全ての絡み目図式で考えると, 次を得る

$$\left\{ C : X\text{-coloring of } D \right\}_D \longrightarrow \left\{ \mathrm{Hom}(\pi_1(\widehat{C}^t_L),\ \mathrm{As}(X)\ ) \right\}_L$$

$$\cup \qquad\qquad\qquad\qquad \cup$$



$t$-fold branched covering of



命題 (N.)

これは準同型 $\Pi(X) \xrightarrow{\Phi} H_3(\pi_1(BX))$ を誘導する.

さらに, これは転入写像の分裂を与える $(\mathrm{mod}\ t_X)$.

$\Longrightarrow$ 特に, 主定理を得る.

命題の証明方針　　(相対ボルディズム群を使う)

切断 $\mathfrak{s} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{As}(X) = \pi_1(BX)$ に対し, ボルディズムを取る：

$$
\begin{array}{ccccccc}
\xrightarrow{0} & \Omega_3(\pi_1) & \longrightarrow & \Omega_3(\pi_1, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \Omega_2(\mathbb{Z}) = 0 & \\
 & \| & & & & \uparrow & \\
\xrightarrow{0} & H_3(\pi_1) & \longrightarrow & \pi_2(BX) & \longrightarrow & H_2(BX) \to 0 & \qquad \text{(Postnikov)}
\end{array}
$$

命題の証明方針　　(相対ボルディズム群を使う)

切断 $\mathfrak{s} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{As}(X) = \pi_1(BX)$ に対し, ボルディズムを取る：

$$
\begin{tikzcd}
\xrightarrow{0} & \Omega_3(\pi_1) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Omega_3(\pi_1, \mathbb{Z}) \arrow[r] & \Omega_2(\mathbb{Z}) = 0 \\
\xrightarrow{0} & H_3(\pi_1) \arrow[r] & \pi_2(BX) \arrow[r] \arrow[u, "\text{作りたい}"'] & H_2(BX) \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}
\qquad \text{(Postnikov)}
$$

命題の証明方針　　(相対ボルディズム群を使う)

切断 $\mathfrak{s} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{As}(X) = \pi_1(BX)$ に対し, ボルディズムを取る：

$$\begin{tikzcd}
\xrightarrow{0} & \Omega_3(\pi_1) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Omega_3(\pi_1, \mathbb{Z}) \arrow[r] & \Omega_2(\mathbb{Z}) = 0 \\
\xrightarrow{0} & H_3(\pi_1) \arrow[r] & \pi_2(BX) \arrow[r] \arrow[u, "\text{作りたい}"'] & H_2(BX) \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

(Postnikov)

問題点 緯線 $\mathfrak{l}_i \in \pi_1(S^3 \setminus L)$ に対し $C_*(\mathfrak{l}_i) \in \mathrm{Stab}(x_0)$ 非可換!

解決に至る手法

カンドル $\widetilde{X}$ と, カンドルエピ $p : \widetilde{X} \to X$ を作る s.t.

命題の証明方針　　(相対ボルディズム群を使う)

切断 $\mathfrak{s} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{As}(X) = \pi_1(BX)$ に対し, ボルディズムを取る：

$$\begin{array}{ccccccc}
\xrightarrow{0} & \Omega_3(\pi_1) & \longrightarrow & \Omega_3(\pi_1, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \Omega_2(\mathbb{Z}) = 0 & \\
 & \| & & \uparrow \text{作りたい} & & \uparrow & \\
\xrightarrow{0} & H_3(\pi_1) & \longrightarrow & \pi_2(BX) & \longrightarrow & H_2(BX) \to 0 & \qquad \text{(Postnikov)}
\end{array}$$

問題点 緯線 $\mathfrak{l}_i \in \pi_1(S^3 \setminus L)$ に対し $C_*(\mathfrak{l}_i) \in \mathrm{Stab}(x_0)$　非可換!

解決に至る手法

カンドル $\widetilde{X}$ と, カンドルエピ $p : \widetilde{X} \to X$ を作る s.t.

- $\mathrm{As}(\widetilde{\mathrm{X}}) \supset \mathrm{Stab}(\tilde{x}_0) = \mathbb{Z} \oplus (t_X\text{-捩れ部分群})$
- $p_* : H_3(\pi_1(B\widetilde{X})) \to H_3(\pi_1(BX))$ は同型 mod $(t_X)$

$\widetilde{X}$ に対し ↑ が作れて証明終. 一般の $X$ に対しては関手性より解る

## 問題

- $\boldsymbol{\pi_2(BX)}$ 上の同型が **AT** の手法だけで証明せよ.

- 基本群 $\boldsymbol{\pi_1(BX)}$ は群の普遍中心拡大と相性がよい.

  何か応用をつくれ. **(e.g., 代数K群, cubical-set)**

- 高次のホモトピー群に関し，タイプは重要か？

  (※ $\boldsymbol{H_2^Q(X) = 0}$ の時, $\boldsymbol{\pi_3(BX)}$ は幾つか計算した. [**N.**])

## 他の話題

- (N.)

$\pi_2(BX)$ を使った “カンドルコサイクル不変量” の位相的解釈.

- (井上-蒲谷)

$X = H\backslash G$, $H^*_{\mathrm{gr}}(G, H; A) \longrightarrow H^{*+1}(BX; A)$

特に, $G = SL(2; \mathbb{C})$, $H = SO(2)$ のとき

相対 Chern-Simons 類のカンドルホモロジーとしての再構成.

- (Clauwens)

$X = \mathbb{Z}_p, \quad x \lhd y := 2y - x.$

$H_{*-1}(BX)$ 上の, Hopf 構造の決定. コホモロジー作用素の考察.

## 他の話題

- (N.)

$\pi_2(BX)$ を使った “カンドルコサイクル不変量” の位相的解釈.

- (井上-蒲谷)

$X = H\backslash G$, $H^*_{\mathrm{gr}}(G, H; A) \longrightarrow H^{*+1}(BX; A)$

特に, $G = SL(2; \mathbb{C})$, $H = SO(2)$ のとき

相対 Chern-Simons 類のカンドルホモロジーとしての再構成.

- (Clauwens)

$X = \mathbb{Z}_p, \quad x \lhd y := 2y - x.$

$H_{*-1}(BX)$ 上の, Hopf 構造の決定. コホモロジー作用素の考察.

有難う御座いました