E-ホモロジー Schur P, Q-関数と Lie 群上のループ空間について

中川 征樹
岡山大学教育学部

ホモトピー論シンポジウム
2012 年 11 月 4 日 (日)

1　Lie 群上の基点付きループ空間

K: コンパクト連結かつ単連結な Lie 群

$$\begin{aligned}\Omega K &= \Omega(K,e) = \Omega(K;e,e) = (K,e,e)^{(I,0,1)} \\ &= \{\omega : I = [0,1] \longrightarrow K \text{ (連続)} \mid \omega(0) = \omega(1) = e\} \\ &\simeq \{\omega : S^1 \longrightarrow K \text{ (連続)} \mid \omega(1) = e\}\end{aligned}$$

を K 上の**基点付きループ空間**とする.

事実 1.1　ΩK はホモトピー可換な H-空間となる.

2 Bott の仕事 (1954 年〜1959 年)

- Bott "*On torsion in Lie groups*", Proc. Nat. Acad. Ser. U.S.A. **40** (1954), 586–588.
- Bott "*An Application of the Morse theory to the topology of Lie-groups*", Bull. Soc. Math. France **84** (1956), 251–281.
- Bott-Samelson "*Applications of the theory of Morse to symmetric spaces*", Amer. J. Math. (1958), 964–1029.
- Bott "*The space of loops on a Lie group*", Michigan Math. J. **5** (1958), 35–61.
- Bott "*The stable homotopy of the classical groups*", Ann. of Math. **70** (1959), 313–337.

2.1 ΩK のねじれについて

定理 2.1

1. ΩK はねじれ元をもたない．したがって, 整数係数ホモロジー群 $H_i(\Omega K)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ は自由 $\mathbb{Z}$-加群である.
2. $H_*(\Omega K)$ は奇数次の元をもたない．i.e., $H_{2i+1}(\Omega K) = 0$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$.

2.2 Bott-Samelson の K-サイクル

- T: K の極大トーラス, $\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}\,(T)$: T の Lie 環
- $\mathcal{C}$ $(\subset \mathfrak{t})$: 基本 Weyl 領域
- Δ_0: 基本アルコーヴ ($\mathcal{C}$ に含まれるアルコーヴで, その閉包が原点 0 を含むもの)
- $\lambda(\Delta)$: アルコーヴ Δ と Δ_0 を隔てる "アフィン超平面" の個数

定理 2.2　各アルコーヴ $\Delta \subset \mathcal{C}$ に対して, 対応する $\underline{K\text{-サイクル}}$ を Γ_Δ とするとき, Γ_Δ は向き付け可能な $2\lambda(\Delta)$ 次元多様体である. 写像 $f_\Delta : \Gamma_\Delta \longrightarrow \Omega K$ による Γ_Δ の基本ホモロジー類 $[\Gamma_\Delta] \in H_{2\lambda(\Delta)}(\Gamma_\Delta)$ の, $f_{\Delta *}$ による像 $\sigma_\Delta := f_{\Delta *}([\Gamma_\Delta]) \in H_{2\lambda(\Delta)}(\Omega K)$ とするとき,

$$H_*(\Omega K) = \bigoplus_{\Delta \subset \mathcal{C}} \mathbb{Z}\,\sigma_\Delta .$$

2.3　$H_*(\Omega K)$ の Hopf 代数構造について

事実 2.3　$H_*(\Omega K)$ は $\mathbb{Z}$ 上の可換な Hopf 代数の構造をもつ.

- 生成サークル　$s : \mathbb{R} \longrightarrow T \subset K$ $\left(s \in \mathrm{Hom}\,(S^1, T)\right.$ と見なす$\left.\right)$
- 生成多様体　$K^s = K/K_s$ $\left(K_s := \text{サークル } \mathrm{Im}\, s \text{ の } K \text{ における中心化群}\right)$
- 生成写像　$g^s : K^s \longrightarrow \Omega K$ の構成

定理 2.4　準同型写像

$$g_*^s : H_*(K^s) \longrightarrow H_*(\Omega K)$$

の像は Pontrjagin 環 $H_*(\Omega K)$ を環として生成する.

例 2.5

- 生成写像 $g : \mathbb{C}P^k \longrightarrow \Omega SU(k+1)$
- $H^*(\mathbb{C}P^k) = \mathbb{Z}[u]/(u^{k+1}) \quad (\deg(u) = 2)$
- $u^i \in H^{2i}(\mathbb{C}P^k)\ (0 \leq i \leq k) \quad \overset{\text{双対}}{\longleftrightarrow} \quad \sigma_i' \in H_{2i}(\mathbb{C}P^k)\ (0 \leq i \leq k)$
- $g_* : H_*(\mathbb{C}P^k) \longrightarrow H_*(\Omega SU(k+1)), \quad \sigma_i := g_*(\sigma_i')\ (0 \leq i \leq k)$

$$\begin{aligned} H_*(\Omega SU(k+1)) &= \mathbb{Z}[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k], \\ \text{余積} \quad \phi(\sigma_n) &= \sum_{i+j=n} \sigma_i \otimes \sigma_j \quad (\sigma_0 = 1). \end{aligned}$$

3 Garland-Raghunathan, Quillen の仕事 (1975 年)

- Garland and Raghunathan "*A Bruhat decomposition for the loop space of a compact group: A new approach to results of Bott*", Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **72** (1975), 4716–4717.
- Mitchell "*A filtration of the loops on $SU(n)$ by Schubert varieties*", Math. Z. **193** (1986), 347–362.
- Mitchell "*The Bott filtration of a loop group*", Algebraic topology, Balcelona, 1986, Lecture Notes in Math., **1298** (1987), 215–226.
- Mitchell "*Quillen's theorem on buildings and the loops on a symmetric space*", Enseign. Math. (2) **34** (1988), 123–166.

3.1 代数的ループ群の理論

K: コンパクトな連結かつ単連結単純 Lie 群, $K_{\mathbb{C}}$: K の複素化

$$
\begin{aligned}
LK &= \mathrm{Map}\,(S^1, K) = \{S^1 \longrightarrow K \text{ (連続)}\} \quad \text{(自由ループ群)} \\
LK_{\mathbb{C}} &= \{S^1 \longrightarrow K_{\mathbb{C}} \text{ (連続)}\} \\
\mathcal{G} := L_{\mathrm{alg}}K_{\mathbb{C}} &= \{f : \mathbb{C}^* \longrightarrow K_{\mathbb{C}} \text{ (正則)}\} \quad \text{(代数的ループ群)} \\
\mathcal{P} &= \{f \in L_{\mathrm{alg}}K_{\mathbb{C}} \mid f \text{ は原点も込めて正則 }\} \\
&= \{f : \mathbb{C} \longrightarrow K_{\mathbb{C}} \text{ (正則)}\} \simeq K_{\mathbb{C}} \text{ (ホモトピー同値)} \\
\Omega_{\mathrm{alg}}K &= \Omega K \cap L_{\mathrm{alg}}K_{\mathbb{C}}
\end{aligned}
$$

定理 3.1（Garland-Raghunathan, Quillen）

$\Omega_{\mathrm{alg}}K \hookrightarrow \Omega K$ $(L_{\mathrm{alg}}K \hookrightarrow LK,\ L_{\mathrm{alg}}K_{\mathbb{C}} \hookrightarrow LK_{\mathbb{C}})$ はホモトピー同値.

3.2 アフィン Grassmann 多様体

定義 3.2 K (あるいは $K_{\mathbb{C}}$) に付随する**アフィン Grassmann 多様体**

$$\begin{aligned}\mathrm{Gr}_K &:= \mathcal{G}/\mathcal{P} = L_{\mathrm{alg}}K_{\mathbb{C}}/\mathcal{P} \\ &\cong K_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[t,t^{-1}])/K_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[t]) \cong K_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}((t)))/K_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[[t]])\end{aligned}$$

事実 3.3 次のホモトピー同値が存在する:

$$\mathrm{Gr}_K = \mathcal{G}/\mathcal{P} = L_{\mathrm{alg}}K_{\mathbb{C}}/\mathcal{P} \simeq L_{\mathrm{alg}}K_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}} \simeq LK_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}} \simeq \Omega K_{\mathbb{C}} \simeq \Omega K.$$

したがって, $H_*(\mathrm{Gr}_K) \cong H_*(\Omega K)$ が成り立つ.

- B ($\subset K_{\mathbb{C}}$): Borel 部分群, B^-: 双対 Borel 部分群
- $\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{P} \mid f(0) \in B^-\}$: 岩堀部分群
- $W = \langle s_i \mid i \in I\rangle$: K の Weyl 群

- $Q^\vee$: コルート格子
- $W_{\mathrm{aff}} = W \ltimes Q^\vee = \langle s_i \mid i \in I_{\mathrm{aff}} := I \cup \{0\} \rangle$: アフィン Weyl 群
- $w \in W_{\mathrm{aff}}/W \cong W_{\mathrm{aff}}^0 = \{$Grassmann 元 $\}$ (最短代表系) に対して,
  $X_w^\circ := (\mathrm{Gr}_K$ における $\mathcal{B}$-軌道$) = \mathcal{B}w\mathcal{P}/\mathcal{P}$: **Schubert 胞体**
  $X_w := \overline{X_w^\circ}$ (X_w° の閉包): **Schubert 多様体**
- $\ell(w)$: $w \in W_{\mathrm{aff}}$ の長さ

事実 3.4　次の胞体分割が存在する:

$$\mathrm{Gr}_K = \coprod_{w \in W_{\mathrm{aff}}^0} X_w^\circ.$$

- $\sigma_w \in H_{2\ell(w)}(\mathrm{Gr}_K)$: $w \in W_{\mathrm{aff}}^0$ に対応する **(ホモロジー)Schubert 類**

事実 3.5

$$H_*(\mathrm{Gr}_K) = \bigoplus_{w \in W_{\mathrm{aff}}^0} \mathbb{Z}\sigma_w.$$

4 Lam の仕事 (2008 年 $\sim$)

- Lam and Pylyavskyy "*Combinatorial Hopf algebras and K-homology of Grassmannians*", Int. Math. Res. Not. IMRN **2007** (2007), rnm 125, 48pages.
- Lam "*Schubert polynomials for the affine Grassmannian*", J. of Amer. Math. Soc. **21** (2008), 259–281.
- Lam, Schilling and Shimozono "*Schubert polynomials for the affine Grassmannian of the symplectic group*", Math. Z. **264** (2010), 765–811.
- Lam, Schilling and Shimozono "*K-theory Schubert calculus of the affine Grassmannian*", Compos. Math. **146** (2010), 811-852.

$K = SU(k+1)$ の場合

- $W = S_{k+1} = \langle s_1, \ldots, s_k \rangle$ ($k+1$ 次対称群)
- $W_{\mathrm{aff}} = \tilde{S}_{k+1} = \langle s_0, s_1, \ldots, s_k \rangle$, $\quad W_{\mathrm{aff}}^0 = \tilde{S}_{k+1}^0 = \{$Grassmann 元$\}$

$$
\begin{aligned}
H_*(\mathrm{Gr}_K) &= \bigoplus_{w \in \tilde{S}_{k+1}^0} \mathbb{Z}\sigma_w, \\
H_*(\Omega K) &= \mathbb{Z}[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k].
\end{aligned}
$$

問題 4.1　各 Schubert 類 σ_w ($w \in \tilde{S}_{k+1}^0$) は, $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ の多項式で表される. この多項式の形を具体的に決定せよ.

4.1 対称関数環

- Λ: 整数係数の対称関数のなす環
- $e_i = e_i(x_1, x_2, \ldots)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$: i 次基本対称関数
- $h_i = h_i(x_1, x_2, \ldots)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$: i 次完全対称関数
- 母関数

$$E(t) = \sum_{i \geq 0} e_i t^i = \prod_{i \geq 1} (1 + x_i t), \quad H(t) = \sum_{i \geq 0} h_i t^i = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - x_i t}$$

- 関係式 $\quad H(t)E(-t) = 1$
- 環構造 $\quad \Lambda = \mathbb{Z}[e_1, e_2, \ldots] = \mathbb{Z}[h_1, h_2, \ldots]$
- 余積

$$\phi(e_k) = \sum_{i+j=k} e_i \otimes e_j, \quad \phi(h_k) = \sum_{i+j=k} h_i \otimes h_j$$

- “Hall 内積” $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle : \Lambda \times \Lambda \longrightarrow \mathbb{Z}$ により, Λ とその双対 $\Lambda^* = \mathrm{Hom}\,(\Lambda, \mathbb{Z})$ は同型である.
- s_λ: $\lambda \in \mathcal{P} := \{$ 分割 $\}$ に対応する Schur 関数
- $\{s_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{P}}$ は Λ の自由 $\mathbb{Z}$-加群としての基底である: $\Lambda = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}} \mathbb{Z} s_\lambda$.

4.2 対称関数との同一視

Hopf 代数としての同一視 $(K = SU(k+1))$:

$$H_*(\Omega K) = \mathbb{Z}[\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k] \xrightarrow{\sim} \Lambda_{(k+1)} := \mathbb{Z}[h_1, h_2, \ldots, h_k]$$

事実 4.2 Lapointe-Lascoux-Morse は, Macdonald 多項式の研究と関連して, $\Lambda_{(k+1)}$ の新しい基底である "k-**Schur 関数**" $s_\lambda^{(k)}$ $(\lambda \in \mathcal{P}_{(k+1)} :=$ $\{k$-**有界分割** $\}$ を導入した.

定理 4.3（Lam） 上の同一視により, Schubert 類 σ_w $(w \in \tilde{S}^0_{k+1})$ は k-Schur 関数 $s_\lambda^{(k)}$ $(\lambda \in \mathcal{P}_{(k+1)})$ に対応している.

証明の方針:

- $\mathcal{S} := H_T^*(\mathrm{pt})$
- T-同変ホモロジー群 $H_*^T(\Omega K) = \bigoplus_{w \in W_{\mathrm{aff}}^0} \mathcal{S}\,\sigma_w^T$
- T-同変な包含写像 $\Omega K \hookrightarrow \mathcal{G}/\mathcal{B}$ から誘導される T-同変ホモロジー群の準同型写像

$$j : H_*^T(\Omega K) \longrightarrow H_*^T(\mathcal{G}/\mathcal{B})$$

- アフィン nil-Coxeter 代数:

$$\mathbb{A}_0 := \langle A_i \ (i \in I_{\mathrm{aff}}) \,|\, A_i^2 = 0,\ (A_i A_j)^{m_{ij}} = (A_j A_i)^{m_{ij}} \ (i \neq j) \rangle$$

- アフィン nil-Hecke 代数: $\mathbb{A}_{\mathrm{aff}} :=$ ($\mathcal{S}$ と $\mathbb{A}_0$ との "スマッシュ積")

事実 4.4（Peterson, Arabia）　$\mathcal{S}$ -加群としての同型 $\mathbb{A}_{\mathrm{aff}} \cong H_*^T(\mathcal{G}/\mathcal{B})$ が存在する.

- Peterson の "j-写像"

$$j : H_*^T(\Omega K) \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathrm{aff}}$$

定理 4.5（Peterson）　$\mathcal{S}$ 上の Hopf 代数としての次の同型が存在する:

$$j : H_*^T(\Omega K) \xrightarrow{\sim} Z_{\mathbb{A}_{\mathrm{aff}}}(S).$$

$\phi_0 : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{Z}$ を $f \longmapsto f(0)$ (0 における評価写像),

$$\phi_0 : \mathbb{A}_{\mathrm{aff}} \longrightarrow \mathbb{A}_0, \quad \sum_w a_w A_w \longmapsto \sum_w \phi_0(a_w) A_w$$

とするとき,

定理 4.6（Lam）　$\mathbb{Z}$ 上の Hopf 代数としての次の同型が存在する:

$$j_0 : H_*(\Omega K) \xrightarrow{\sim} \mathbb{B} := \phi_0(Z_{\mathbb{A}_{\mathrm{aff}}}(S)),\ \sigma_w \longmapsto j_0(\sigma_w) = \phi_0(j(\sigma_w^T)).$$

一方,

定理 4.7（Lam）　$\mathbb{Z}$ 上の Hopf 代数としての次の同型が存在する:

$$\psi : \Lambda_{(k+1)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}, \quad s_\lambda^{(k)} \longmapsto \psi(s_\lambda^{(k)}) =: \boldsymbol{s}_\lambda^{(k)}$$ (“非可換 k-Schur 関数”)

$\boldsymbol{s}_\lambda^{(k)}$ および $j(\sigma_w^T)$ の <u>特徴付け</u> を利用すると, 同型

$$H_*(\Omega K) \xrightarrow{j_0} \mathbb{B} \xleftarrow{\psi} \Lambda_{(k+1)}$$

により, Schubert 類 σ_w $(w \in W_{\mathrm{aff}}^0 = \tilde{S}_{k+1}^0)$ が k-Schur 関数 $s_\lambda^{(k)}$ $(\lambda \in \mathcal{P}_{(k+1)})$ に対応していることがわかる.

ここで, $k \to \infty$ の極限を考えると...

$$H_*(\Omega SU) = \mathbb{Z}[\sigma_1, \sigma_2, \ldots] \xrightarrow{\sim} \Lambda = \mathbb{Z}[h_1, h_2, \ldots].$$

命題 4.8　上の同一視の下で, Schubert 類 σ_w $(w \in \tilde{S}^0_\infty)$ は Schur 関数 s_λ $(\lambda \in \mathcal{P}_\infty = \mathcal{P})$ に対応している.

このようなことを, 他の古典群 $Sp = Sp(\infty)$ や $SO = SO(\infty)$ に対して考えたい.

注意 4.9

- Bott 周期性定理: $g_\infty : BU \xrightarrow{\sim} \Omega SU$ (ホモトピー同値)
- Hopf 代数としての同型

$$g_{\infty *} : H_*(BU) \cong \mathbb{Z}[\beta_1, \beta_2, \ldots] \xrightarrow{\sim} H_*(\Omega SU) \cong \mathbb{Z}[\sigma_1, \sigma_2, \ldots]$$

5　河野・小島の仕事 (1978 年)

- "*The space of loops on a symplectic group*", Japanese J. Math. **4** (1978), 461–486.

5.1　Hopf 代数 $H_*(\Omega Sp)$

- $q : SU(n) \hookrightarrow Sp(n)$: 四元数化,　$c : Sp(n) \hookrightarrow SU(2n)$: 複素化
- $SU = SU(\infty)$, $Sp = Sp(\infty)$
- 次の写像および準同型を考える:

$$q : SU \longrightarrow Sp, \quad c : Sp \longrightarrow SU,$$

$$\Omega q : \Omega SU \longrightarrow \Omega Sp, \quad \Omega c : \Omega Sp \longrightarrow \Omega SU,$$

$$\Omega(c \circ q)_* : H_*(\Omega SU) \xrightarrow{(\Omega q)_*} H_*(\Omega Sp) \xrightarrow{(\Omega c)_*} H_*(\Omega SU).$$

事実 5.1　$(\Omega c)_* : H_*(\Omega Sp) \hookrightarrow H_*(\Omega SU)$ は分裂単射である.

- 環準同型
$$\Omega(c\circ q)_* : H_*(\Omega SU)[[x]] \quad\longrightarrow\quad H_*(\Omega SU)[[x]]$$

- $\beta(x) := \sum_{i\geq 0}\beta_i x^i \in H_*(\Omega SU)[[x]]$

定理 5.2（河野-小島）

- $\Omega(c\circ q)_*(\beta(x)) \quad = \beta(x)/\beta(-x) \quad \leftarrow$「鍵」となる式
- $\Omega(c\circ q)_*(\beta_n) \quad = \{1+(-1)^{n+1}\}\beta_n + 2r_n \quad (\exists r_n \in \tilde{H}_*(BU)^2)$

したがって,
$$(\Omega c)_*(z_n) = \frac{1}{2}\Omega(c\circ q)_*(\beta_n)$$
を満たす元 $z_n \in H_{2n}(\Omega Sp)$ が存在する. 言い換えると, 元 z_n は次で定義される:
$$z_n := \frac{1}{2}(\Omega q)_*(\beta_n) \quad (n=1,2,\ldots).$$

定理 5.3（河野-小島）

- 環構造

$$H_*(\Omega Sp) \cong \mathbb{Z}[z_1, z_3, \ldots, z_{2n-1}, \ldots]$$

- 余積構造

$$\phi(z_n) = 2\left(\sum_{i+j=n} z_i \otimes z_j\right) \quad (\text{ただし}, z_0 := 1/2)$$

- 元 z_{2n} $(n = 1, 2, \ldots)$ は次の式により帰納的に定義される:

$$z_{2n} + \sum_{i+j=2n,\, i\geq 1,\, j\geq 1} (-1)^i z_i z_j = 0.$$

5.2 Schur の P-および Q-関数

- Q_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ を次の母関数における t^k の係数として定義:

$$Q(t) = \sum_{k \geq 0} Q_k t^k := \prod_{i \geq 1} \frac{1 + x_i t}{1 - x_i t} = H(t)E(t).$$

- 恒等式 $Q(t)Q(-t) = 1$ から, 次の関係式を得る:

$$Q_i^2 + 2\sum_{j=1}^{i} (-1)^j Q_{i+j} Q_{i-j} = 0 \quad (i \geq 1).$$

- Γ を, Q_i たちで生成される Λ の部分環とする:

$$\Gamma = \frac{\mathbb{Z}[Q_1, Q_2, \ldots, Q_i, \ldots]}{(Q_i^2 + 2\sum_{j=1}^{i}(-1)^j Q_{i+j} Q_{i-j} \ (i \geq 1))}.$$

- Q_λ: $\lambda \in \mathcal{SP} :=$ { 狭義分割 } に対応する Schur Q-関数

- 関数 P_k $(k = 1, 2, \ldots)$ を次の式により定義する:

$$P_k := \frac{1}{2} Q_k = \frac{1}{2} \sum_{i+j=k} h_i e_j.$$

- P_i たちは次の関係式を満たす:

$$P_i^2 + 2 \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^j P_{i+j} P_{i-j} + (-1)^i P_{2i} = 0 \quad (i \geq 1).$$

- Γ' を, P_i たちで生成される Λ の部分環とする:

$$\begin{aligned} \Gamma' &= \frac{\mathbb{Z}[P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots]}{(P_i^2 + 2\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^j P_{i+j} P_{i-j} + (-1)^i P_{2i} \ (i \geq 1))} \\ &= \mathbb{Z}[P_1, P_3, \ldots, P_{2n-1}, \ldots]. \end{aligned}$$

- $P_\lambda := 2^{-\ell(\lambda)} Q_\lambda$: $\lambda \in \mathcal{SP}$ に対応する Schur P-関数 ($\ell(\lambda)$ は λ の長さ)

事実 5.4

- これらの部分環 Γ と Γ' は自然な Hopf 代数構造をもつ.
- 余積

$$\begin{aligned}\phi(Q_k) &= \sum_{i+j=k} Q_i \otimes Q_j, \\ \phi(P_k) &= P_k \otimes 1 + 1 \otimes P_k + 2 \sum_{i+j=k,\, i\geq 1,\, j\geq 1} P_i \otimes P_j.\end{aligned}$$

- Γ と Γ' は互いに双対な Hopf 代数である:

$$\Gamma^* \cong \Gamma', \quad (\Gamma')^* \cong \Gamma.$$

- $\{Q_\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{SP}}$ および $\{P_\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{SP}}$ は, それぞれ Γ および Γ' の自由 $\mathbb{Z}$-加群としての基底である: $\Gamma = \bigoplus_{\lambda\in\mathcal{SP}} \mathbb{Z}Q_\lambda$ および $\Gamma' = \bigoplus_{\lambda\in\mathcal{SP}} \mathbb{Z}P_\lambda$.

5.3 対称関数との同一視

- 次の Hopf 代数としての同一視があった:

$$H_*(\Omega SU) \cong H_*(BU) = \mathbb{Z}[\beta_1, \beta_2, \ldots] \quad \xrightarrow{\sim} \Lambda = \mathbb{Z}[h_1, h_2, \ldots].$$

- この同一視の下で,

$$\begin{array}{ccc}
H_*(\Omega SU) & \longleftrightarrow & \Lambda \\
\beta(x) = \sum_{i \geq 0} \beta_i x^i & \longleftrightarrow & H(x) = \sum_{i \geq 0} h_i x^i \\
\Omega(c \circ q)_* : H_*(\Omega SU) \to H_*(\Omega SU) & \longleftrightarrow & \exists \Phi : \Lambda \longrightarrow \Lambda \\
\Omega(c \circ q)_*(\beta(x)) = \beta(x)/\beta(-x) & \longleftrightarrow & \Phi(H(x)) = H(x)/H(-x)
\end{array}$$

$$\Phi(H(x)) = H(x)/H(-x) = H(x)E(x) = Q(x)$$

したがって,

$$\Phi(h_n) = Q_n = 2P_n \ (n = 1, 2, \ldots).$$

つまり, 同一視 $H_*(\Omega SU) \cong \Lambda$ の下で, 河野-小島が定義した元 $z_n \in H_{2n}(\Omega Sp)$ は Schur P-関数 P_n に他ならない.

命題 5.5

- Hopf 代数としての同型

$$H_*(\Omega Sp) = \mathbb{Z}[z_1, z_3, z_5, \ldots] \quad \xrightarrow{\sim} \quad \Gamma' = \mathbb{Z}[P_1, P_3, P_5, \ldots]$$

- 準同型 $(\Omega q)_* : H_*(\Omega SU) \longrightarrow H_*(\Omega Sp)$ は準同型 $\Lambda \longrightarrow \Gamma'$, $h_i \longmapsto 2P_i$ に対応する.
- 準同型 $(\Omega c)_* : H_*(\Omega Sp) \longrightarrow H_*(\Omega SU)$ は自然な包含写像 $\Gamma' \hookrightarrow \Lambda$ に対応する.

6 $\Omega_0 SO$ および ΩSp の E-ホモロジー Hopf 代数

6.1 Hopf 代数 $E_*(\Omega_0 SO)$ および $E_*(\Omega Sp)$

- $E^*(\quad)$: 複素向き付け可能な一般コホモロジー論 (方向類 $x^E \in E^2(\mathbb{C}P^\infty)$)
- $E_*(\quad)$: 対応するホモロジー論
- $E_* := E_*(\mathrm{pt}) = E^{-*}$: 係数環 (ねじれ元をもたないと仮定)
- $\mu_E(x,y) = x + y + \sum_{i\geq 1, j\geq 1} a_{ij}^E x^i y^j$ $(a_{ij}^E \in E_{2(i+j-1)})$: $E^*(\quad)$ に付随する可換形式群律
- $[-1]_E(x) = \iota_E(x) = \overline{x} = -x + \sum_{j\geq 2} a'_j x^j$: 形式的逆, i.e., $\mu_E(x, [-1]_E(x)) \equiv 0$
- $[1]_E(x) := x$, $[n]_E(x) := \mu_E([n-1]_E(x), x)$ $(n \geq 2)$: n-列

写像

$$\Omega(c\circ r):\Omega SU \xrightarrow{\Omega r} \Omega_0 SO \xrightarrow{\Omega c} \Omega SU,$$

$$\Omega(c\circ q):\Omega SU \xrightarrow{\Omega q} \Omega Sp \xrightarrow{\Omega c} \Omega SU$$

は次の準同型写像を誘導する:

$$\Omega(c\circ r)_*:E_*(\Omega SU) \xrightarrow{(\Omega r)_*} E_*(\Omega_0 SO) \xrightarrow{(\Omega c)_*} E_*(\Omega SU),$$

$$\Omega(c\circ q)_*:E_*(\Omega SU) \xrightarrow{(\Omega q)_*} E_*(\Omega Sp) \xrightarrow{(\Omega c)_*} E_*(\Omega SU).$$

事実 6.1

- $(\Omega r)_*:E_*(\Omega SU)\twoheadrightarrow E_*(\Omega_0 SO)$ は全射.
- $(\Omega c)_*:E_*(\Omega_0 SO)\hookrightarrow E_*(\Omega SU)$ は単射.
- $(\Omega c)_*:E_*(\Omega Sp)\hookrightarrow E_*(\Omega SU)$ は分裂単射.

定理 6.2（Adams）

1.
$$E^*(\Omega SU) \cong E^*(BU) \cong E^*[[c_1^E, c_2^E, \ldots, c_n^E, \ldots]].$$
ただし, c_n^E $(n = 1, 2, \ldots)$ は E-理論 Chern-Conner-Floyd 類. 余積構造:
$$\phi(c_n^E) = \sum_{i+j=n} c_i^E \otimes c_j^E \quad (c_0^E := 1).$$

2.
$$E_*(\Omega SU) \cong E_*(BU) \cong E_*[\beta_1^E, \beta_2^E, \ldots, \beta_n^E, \ldots].$$
ただし, β_n^E $(n = 1, 2, \ldots)$ は $\mathbb{C}P^\infty \simeq BU(1) \longrightarrow BU$ から誘導される. 余積構造:
$$\phi(\beta_n^E) = \sum_{i+j=n} \beta_i^E \otimes \beta_j^E \quad (\beta_0^E := 1).$$

定理 6.3（河野-小島, Clarke, Baker）

$$\begin{aligned}\Omega(c\circ r)_*(\beta^E(x)) &= \beta^E(x)/\beta^E([-1]_E(x)),\\ \Omega(c\circ q)_*(\beta^E(x)) &= \beta^E(x)/\beta^E([-1]_E(x)).\end{aligned}$$

6.1.1 Hopf 代数 $E_*(\Omega_0 SO)$

$$\tau_n^E := (\Omega r)_*(\beta_n^E)\ (n=0,1,2,\ldots),\quad \tau^E(x) := \sum_{i\geq 0}\tau_i^E x^i.$$

命題 6.4

- 環構造:
  $E_*(\Omega_0 SO) = E_*[\tau_1^E,\tau_2^E,\ldots,\tau_n^E,\ldots]/(\tau^E(x)\tau^E([-1]_E(x))=1)$

- 余積構造:
  $$\phi(\tau_n^E) = \sum_{i+j=n}\tau_i^E\otimes\tau_j^E\quad(\tau_0^E=1)$$

6.1.2 Hopf 代数 $E_*(\Omega Sp)$

$E_*(\Omega Sp)$ の元 η_n^E $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ を, 次の関係式を満たすものとして定義する:

$$(\Omega q)_*(\beta^E(x)) = 1 + [2]_E(x)\eta^E(x),\ \eta^E(x) := \sum_{j\geq 0} \eta_{j+1}^E x^j,\ \eta_0^E := 0.$$

命題 6.5（Clarke）

- 環構造:

$$E_*(\Omega Sp) = E_*[\eta_1^E, \eta_3^E, \ldots, \eta_{2n-1}^E, \ldots]$$

- 余代数構造:

$$\phi(\eta_l^E) = \eta_l^E \otimes 1 + 1 \otimes \eta_l^E + \sum_{i+j+k=l} \alpha_{k+1}^E \eta_i^E \otimes \eta_j^E$$

ただし, $[2]_E(x) = \mu_E(x, x) = \sum_{k\geq 1} \alpha_k^E x^k = 2x + \sum_{k\geq 2} \alpha_k x^k$.

6.2 E-ホモロジー Schur P, Q-関数

定義 6.6 q_k^E $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ を, 次の母関数における t^k の係数として定義する $(q_0^E := 1)$:

$$q^E(t) = \sum_{k \geq 0} q_k^E t^k := \frac{H(t)}{H([-1]_E(t))} = \frac{H(t)}{H(\bar{t})} = \prod_{i \geq 1} \frac{1 - y_i \bar{t}}{1 - y_i t}.$$

次の関係式が成り立つ:

$$q^E(t) q^E(\bar{t}) = 1.$$

定義 6.7 Γ_E を, q_i^E たちで生成される $\Lambda_E := E_* \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$ の部分代数として定義する:

$$\Gamma_E := \frac{E_*[q_1^E, q_2^E, \ldots, q_i^E, \ldots]}{(q^E(t) q^E(\bar{t}) = 1)} \hookrightarrow \Lambda_E.$$

定義 6.8 p_k^E $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ を, 次の関係式を満たすものとして定義する:

$$q^E(t) = 1 + [2]_E(t)p^E(t), \quad p^E(t) := \sum_{j \geq 0} p_{j+1}^E t^j \quad p_0^E := 0.$$

次の関係式がある:

$$(1 + [2]_E(t)p^E(t))(1 + [-2]_E(t)p^E([-1]_E(t))) = 1.$$

ただし, $[-2]_E(t) = [2]_E([-1]_E(t))$.

定義 6.9 ${\Gamma'}_E$ を, p_i^E たちで生成される Λ_E の部分代数として定義する:

$$\begin{aligned} {\Gamma'}_E &= \frac{E_*[p_1^E, p_2^E, \ldots, p_i^E, \ldots]}{(1 + [2]_E(t)p^E(t))(1 + [-2]_E(t)p^E([-1]_E(t))) = 1)} \\ &= E_*[p_1^E, p_3^E, \ldots, p_{2n-1}^E, \ldots] \hookrightarrow \Lambda_E. \end{aligned}$$

命題 6.10

1. 次の Hopf 代数としての同一視が存在する:

$$\begin{aligned} E_*(\Omega SU) \cong E_*(BU) = E_*[\beta_1^E, \beta_2^E, \ldots] &\xrightarrow{\sim} \Lambda_E = E_*[h_1, h_2, \ldots], \\ \beta_i^E &\longmapsto h_i. \end{aligned}$$

2. Hopf 代数としての次の自然な同一視が存在する :

$$E_*(\Omega_0 SO) = \frac{E_*[\tau_1^E, \tau_2^E, \ldots, \tau_n^E, \ldots]}{(\tau^E(t)\tau^E(\bar{t}) = 1)} \xrightarrow{\sim} \Gamma_E = \frac{E_*[q_1^E, q_2^E, \ldots, q_n^E, \ldots]}{(q^E(t)q^E(\bar{t}) = 1)}.$$

- 準同写像 $(\Omega r)_* : E_*(\Omega SU) \twoheadrightarrow E_*(\Omega_0 SO)$ は全射 $\Lambda_E \twoheadrightarrow \Gamma_E$, $h_i \longmapsto q_i^E$ に対応する.
- 準同型写像 $(\Omega c)_* : E_*(\Omega_0 SO) \hookrightarrow E_*(\Omega SU)$ は自然な包含写像 $\Gamma_E \hookrightarrow \Lambda_E$ に対応する.

3. Hopf 代数としての次の自然な同一視が存在する：

$$E_*(\Omega Sp) = E_*[\eta_1^E, \eta_3^E, \eta_5^E, \ldots] \xrightarrow{\sim} \Gamma'_E = E_*[p_1^E, p_3^E, p_5^E, \ldots].$$

- 準同型写像 $(\Omega q)_* : E_*(\Omega SU) \longrightarrow E_*(\Omega Sp)$ は，写像 $\Lambda_E \longrightarrow \Gamma'_E$, $H(t) \longmapsto 1 + [2]_E(t)p^E(t)$ に対応する.
- 準同型写像 $(\Omega c)_* : E_*(\Omega Sp) \hookrightarrow E_*(\Omega SU)$ は自然な包含写像 $\Gamma'_E \hookrightarrow \Lambda_E$ に対応する.

6.3 E-(コ) ホモロジー Schur P, Q-関数

- "*K-theoretic analogue of factorial Schur P- and Q-functions*", arXiv:1112.5223.

池田-成瀬は, "K-理論的 factorial P- および Q-関数" を定義した.

- $x \oplus y = x + y + \beta xy, \quad x \ominus y = \dfrac{x-y}{1+\beta y}$
- $b = (b_1, b_2, \ldots)$: パラメーターの集合
- $[x|b]^k := (x \oplus b_1)(x \oplus b_2) \cdots (x \oplus b_k)$
- $[[x|b]]^k := (x \oplus x)[x|b]^{k-1}$
- $\mathcal{SP}_n$: $\ell(\lambda) = r \leq n$ である狭義分割の集合
- $[x|b]^\lambda := \prod_{j=1}^r [x_j|b]^{\lambda_j}$ および $[[x|b]]^\lambda := \prod_{j=1}^r [[x_j|b]]^{\lambda_j}$

定義 6.11（池田-成瀬 (2012)）

1. 狭義分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathcal{SP}_n$ に対して,

$$GP_\lambda(x_1, \ldots, x_n|b) := \frac{1}{(n-r)!} \sum_{w \in \mathcal{S}_n} w \left[[x|b]^\lambda \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=i+1}^{n} \frac{x_i \oplus x_j}{x_i \ominus x_j} \right],$$

$$GQ_\lambda(x_1, \ldots, x_n|b) := \frac{1}{(n-r)!} \sum_{w \in \mathcal{S}_n} w \left[[[x|b]]^\lambda \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=i+1}^{n} \frac{x_i \oplus x_j}{x_i \ominus x_j} \right].$$

2.

$$\begin{aligned} GP_\lambda(x_1, \ldots, x_n) &:= GP_\lambda(x_1, \ldots, x_n|0) \in G\Gamma_n, \\ GQ_\lambda(x_1, \ldots, x_n) &:= GQ_\lambda(x_1, \ldots, x_n|0) \in G\Gamma_{n,+}. \end{aligned}$$

3. 狭義分割 $\lambda \in \mathcal{SP} = \cup_{n\geq 1}\mathcal{SP}_n$ に対して,

$$\begin{aligned} GP_\lambda(x) &:= \varprojlim GP_\lambda(x_1,\ldots,x_n) \in G\Gamma = \varprojlim G\Gamma_n, \\ GQ_\lambda(x) &:= \varprojlim GQ_\lambda(x_1,\ldots,x_n) \in G\Gamma_+ = \varprojlim G\Gamma_{n,+}. \end{aligned}$$

これを一般化し, "E-コホモロジー factorial Schur P- および Q-関数" を次のように定義する.

- $\mu(x,y) = \mu_E(x,y)$: E-理論に付随する形式群律
- $x +_\mu y := \mu(x,y)$: 形式群の和
- $\bar{x}$: x の形式的逆, i.e. $\bar{x} +_\mu x = 0$
- $b = (b_1, b_2, \ldots)$: パラメーターの集合
- $[x|b]^k := \prod_{i=1}^k (x +_\mu b_i)$
- $[[x|b]]^k := (x +_\mu x)[x|b]^{k-1}$

- $[x|b]^\lambda = \prod_{j=1}^r [x_j|b]^{\lambda_j}$ および $[[x|b]]^\lambda = \prod_{j=1}^r [[x_j|b]]^{\lambda_j}$ $(\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathcal{SP}_n)$

定義 6.12（E-コホモロジー factorial Schur P- および Q-関数）

1. 狭義分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathcal{SP}_n$ に対して,

$$P_\lambda^E(x_1, \ldots, x_n|b) := \frac{1}{(n-r)!} \sum_{w \in \mathcal{S}_n} w \left[[x|b]^\lambda \prod_{i=1}^r \prod_{j=i+1}^n \frac{x_i +_\mu x_j}{x_i +_\mu \bar{x}_j} \right],$$

$$Q_\lambda^E(x_1, \ldots, x_n|b) := \frac{1}{(n-r)!} \sum_{w \in \mathcal{S}_n} w \left[[[x|b]]^\lambda \prod_{i=1}^r \prod_{j=i+1}^n \frac{x_i +_\mu x_j}{x_i +_\mu \bar{x}_j} \right].$$

Cauchy 型の再生核 $\Delta = \prod_{i,j\geq 1} \frac{1-\bar{x}_i y_j}{1-x_i y_j}$ を用いて，“E-ホモロジー factorial Schur P- および Q-関数” $p^E_\lambda(y|b)$ および $q^E_\lambda(y|b)$ を次で定義する:

定義 6.13（E-ホモロジー factorial Schur P- および Q-関数）

1.
$$\prod_{i,j\geq 1} \frac{1-\bar{x}_i y_j}{1-x_i y_j} = \sum_{\lambda\in\mathcal{SP}} Q^E_\lambda(x|b) p^E_\lambda(y|b),$$
$$\prod_{i,j\geq 1} \frac{1-\bar{x}_i y_j}{1-x_i y_j} = \sum_{\lambda\in\mathcal{SP}} P^E_\lambda(x|b) q^E_\lambda(y|b).$$

2. $p^E_\lambda(y) := p^E_\lambda(y|0)$ および $q^E_\lambda(y) := q^E_\lambda(y|0)$.

事実 6.14

- $\lambda = (k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ (1 行) のとき, $p^E_{(k)}(y)$ および $q^E_{(k)}(y)$ は §6.2 で導入された p^E_k および q^E_k にそれぞれ一致する .

- $\{q^E_\lambda(y)\}_{\lambda \in \mathcal{SP}}$ (resp. $\{p^E_\lambda(y)\}_{\lambda \in \mathcal{SP}}$ は Γ_E (resp. Γ'_E) の自由 E_*-基底をなす: $\Gamma_E = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{SP}} E_* \, q^E_\lambda(y)$ (resp. $\Gamma'_E = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{SP}} E_* \, p^E_\lambda(y)$).

7 K-ホモロジー Schur P-および Q-関数

ここでは, K-ホモロジー論 $(K_*(\quad) = K_0(\quad) \oplus K_1(\quad))$ を扱う.

- $\mu_K(x, y) = x + y - xy$
- $[-1]_K(x) = \overline{x} = -\dfrac{x}{1-x}$
- $[2]_K(x) = 2x - x^2$ $(\alpha_1^K = 2,\ \alpha_2^K = -1,\ \alpha_i^K = 0\ (i \geq 3))$
- $K_* = K_*(\mathrm{pt}) = K_0(\mathrm{pt}) = \mathbb{Z}$
- §6.2 において, "K-ホモロジー Schur P- および Q-関数のなす環" を定義した:

$$K_0(\Omega_0 SO) \cong \Gamma_K = \frac{\mathbb{Z}[q_1^K, q_2^K, \ldots, q_n^K, \ldots]}{(q^K(x)q^K([-1]_K(x)) = 1)} = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{SP}} \mathbb{Z} q_\lambda^K(y),$$

$$K_0(\Omega Sp) \cong \Gamma'_K = \mathbb{Z}[p_1^K, p_3^K, \ldots, p_{2n-1}^K, \ldots] = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{SP}} \mathbb{Z} p_\lambda^K(y).$$

Lam-Pylyavskyy による “双対安定 Grothendieck 多項式” $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{P}}$ の構成方法に倣って, それらの “C 型版” を構成する.

定義 7.1

1. 狭義分割 $\lambda = (\lambda_1 > \cdots > \lambda_r > 0)$ に対して,

   • $\mathrm{Tab}(\lambda) := 1' < 1 < 2' < 2 < \cdots$ を文字とし, λ を台 (シフトされた Young 図形) とする Young 盤で, 条件: 各行, 各列ともに広義 (弱い意味で) 単調増加であるもの全体の集合.

   • $\mathrm{Tab}'(\lambda) := \mathrm{Tab}(\lambda)$ の部分集合で, 各行について, 最初の箱がプライム付きの数字を含む, つまり対角線上の箱がすべてプライム付きの数字であるもの全体.

2. $gp_\lambda(y) = gp_\lambda(y_1, y_2, \ldots)$ および $gq_\lambda(y) = gq_\lambda(y_1, y_2, \ldots)$ を次で定義する:

$$\begin{aligned} gp_\lambda(y) &:= \sum_{T \in \mathrm{Tab}'(\lambda)} y^T, \\ gq_\lambda(y) &:= \sum_{T \in \mathrm{Tab}(\lambda)} y^T. \end{aligned}$$

ただし, $y^T := \prod_{i \in T} y_i^{c(i)} \prod_{i' \in T} y_i^{r(i')}$ であり,

- $c(i)$: i を含む列の本数,
- $r(i')$: i' を含む行の本数

とする.

例 7.2

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1' & 1' & 2 & 3 \\ \hline & 2' & 3 & 3 \\ \cline{2-4} & & 3 & \\ \cline{3-3} \end{array} \qquad y^T = y_1 y_2^2 y_3^2$$

$$\begin{aligned}
gp_1 &= h_1, \\
gp_2 &= h_1^2 + h_1, \\
gp_3 &= (h_1^3 - h_2 h_1 + h_3) + (2h_1^2 - h_2) + h_1, \\
gp_{21} &= (h_2 h_1 - h_3) + h_2, \\
gp_{31} &= (h_2 h_1^2 - h_3 h_1) + (2h_2 h_1 - h_3) + h_2.
\end{aligned}$$

予想 7.3 $gp_\lambda(y) = p_\lambda^K(y)$ および $gq_\lambda(y) = q_\lambda^K(y)$ $(\lambda \in \mathcal{SP})$.

注意 7.4

1. 上の予想は, “1 行の場合”, すなわち $\lambda = (k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ の場合には正しいことが示される.
2. $p_\lambda^K(y)$ および $q_\lambda^K(y)$ は, 定義から対称関数であるので, $gp_\lambda(y)$ および $gq_\lambda(y)$ が実際に対称関数になることは, 上の予想から従う.