Sinha's spectral sequence and model category of operads (arXiv:1210.0996)

森谷 駿二

京都大学 理学研究科

2012 年 11 月 3 日

目次

long knots modulo immersions

$\overline{Emb}_d$ の余単体モデル

- 直感的説明
- Kontsevich オペラッド
- 乗法的オペラッド
- スペクトル系列

オペラッドの形式性とスペクトル系列の退化

- Gerstenhaber 代数

モデル圏

- left proper なモデル圏
- オペラッドのモデル圏

multiplicative formality の証明

展望：$d = 3$ の場合

用語など

基礎体 $\mathbf{k}$ を固定する.

オペラッドといったら非対称オペラッドのこと.
チェインオペラッド = チェイン複体の圏におけるオペラッド.
位相オペラッド = 位相空間の圏におけるオペラッド.

long knots modulo immersions

定義 1.1

long knot とは，滑らかな埋め込み $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ で $t \notin (-1, 1)$ のとき $f(t) = (t, 0, \ldots, 0)$ となるもの.

Emb_d : $\mathbb{R}^d$ 内の long knot のなす空間．(位相：C^∞-topology).

long immersion とは，long knot の定義で「埋め込み」を「はめ込み」に置き換えたもの.

Imm_d : $\mathbb{R}^d$ 内の long immersion のなす空間.

long knots modulo immersions のなす空間 $\overline{Emb}_d$ を次のように定義する.

$$\overline{Emb}_d := \text{homotopy fiber of the inclusion } Emb_d \longrightarrow Imm_d$$

命題 1.2 (Sinha)

$d \geq 3$ の時，包含写像 $Emb_d \longrightarrow Imm_d \simeq \Omega S^{d-1}$ は null-homotopic．特に，$\overline{Emb}_d \simeq Emb_d \times \Omega^2 S^{d-1}$． □

$\overline{Emb}_d$ の余単体モデル：直感的説明

X：基点付位相空間.
基点付ループ空間 ΩX の余単体モデル $\mathbb{EM}_X^\bullet$：

$$\mathbb{EM}_X^n := X^{\times n},$$

$$d^i(x_1, \ldots, x_n) := \begin{cases} (*, x_1, \ldots, x_n) & (i = 0) \\ (\ldots, x_i, x_i, \ldots) & (1 \leq i \leq n) \\ (x_1, \ldots, x_n, *) & (i = n+1), \end{cases}$$

$$s^i(x_1, \ldots, x_n) := (x_1, \ldots, x_i, x_{i+2}, \ldots x_n).$$

次が成り立つ：$\mathrm{Tot}(\mathbb{EM}_X^\bullet) \cong \Omega X$.

$\mathbb{EM}^{\bullet}_{X}$ に類似のモデルを long knot に対しても定義したい!

$\mathbb{EM}_X^\bullet$ に類似のモデルを long knot に対しても定義したい!

loop と long knot の相違点：

- 可微分性

$\mathbb{EM}_X^\bullet$ に類似のモデルを long knot に対しても定義したい!

loop と long knot の相違点：

- 可微分性 $\Longrightarrow$ 各点に対して (正規化された) 接ベクトルを対応させる．即ち，$(\mathbb{R}^d)^{\times n}$ の代わりに $(ST\mathbb{R}^d)^{\times n} \cong (\mathbb{R}^d)^{\times n} \times (S^{d-1})^{\times n}$ を考える ($ST\mathbb{R}^d$：接球面束).

$\mathbb{EM}_X^\bullet$ に類似のモデルを long knot に対しても定義したい!

loop と long knot の相違点：

- 可微分性 $\Longrightarrow$ 各点に対して (正規化された) 接ベクトルを対応させる．即ち，$(\mathbb{R}^d)^{\times n}$ の代わりに $(ST\mathbb{R}^d)^{\times n} \cong (\mathbb{R}^d)^{\times n} \times (S^{d-1})^{\times n}$ を考える ($ST\mathbb{R}^d$：接球面束).
- 単射性

$\mathbb{EM}_X^\bullet$ に類似のモデルを long knot に対しても定義したい!

loop と long knot の相違点：

- 可微分性 $\Longrightarrow$ 各点に対して (正規化された) 接ベクトルを対応させる．即ち，$(\mathbb{R}^d)^{\times n}$ の代わりに $(ST\mathbb{R}^d)^{\times n} \cong (\mathbb{R}^d)^{\times n} \times (S^{d-1})^{\times n}$ を考える ($ST\mathbb{R}^d$：接球面束).
- 単射性 $\Longrightarrow$ $(\mathbb{R}^d)^{\times n}$ の代わりに順序付配置空間 $C_n(\mathbb{R}^d)$ を考える.

$$C_n(\mathbb{R}^d) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^d)^{\times n} \mid x_i \neq x_j \text{ if } i \neq j\}$$

$\mathbb{EM}^\bullet_X$ に類似のモデルを long knot に対しても定義したい!

loop と long knot の相違点：

- 可微分性 $\Longrightarrow$ 各点に対して (正規化された) 接ベクトルを対応させる．即ち，$(\mathbb{R}^d)^{\times n}$ の代わりに $(ST\mathbb{R}^d)^{\times n} \cong (\mathbb{R}^d)^{\times n} \times (S^{d-1})^{\times n}$ を考える ($ST\mathbb{R}^d$：接球面束).
- 単射性 $\Longrightarrow$ $(\mathbb{R}^d)^{\times n}$ の代わりに順序付配置空間 $C_n(\mathbb{R}^d)$ を考える.

$$C_n(\mathbb{R}^d) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^d)^{\times n} \mid x_i \neq x_j \text{ if } i \neq j\}$$

- 問題点：$C_n(\mathbb{R}^d) \times (S^{d-1})^{\times n} \subset \mathbb{EM}^n_{\mathbb{R}^d \times S^{d-1}}$ は余面写像 d^i で閉じていない.

$\mathbb{EM}^\bullet_X$ に類似のモデルを long knot に対しても定義したい!

loop と long knot の相違点：

- 可微分性 $\Longrightarrow$ 各点に対して (正規化された) 接ベクトルを対応させる．即ち，$(\mathbb{R}^d)^{\times n}$ の代わりに $(ST\mathbb{R}^d)^{\times n} \cong (\mathbb{R}^d)^{\times n} \times (S^{d-1})^{\times n}$ を考える ($ST\mathbb{R}^d$：接球面束).
- 単射性 $\Longrightarrow$ $(\mathbb{R}^d)^{\times n}$ の代わりに順序付配置空間 $C_n(\mathbb{R}^d)$ を考える.

$$C_n(\mathbb{R}^d) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^d)^{\times n} \mid x_i \neq x_j \text{ if } i \neq j\}$$

- 問題点：$C_n(\mathbb{R}^d) \times (S^{d-1})^{\times n} \subset \mathbb{EM}^n_{\mathbb{R}^d \times S^{d-1}}$ は余面写像 d^i で閉じていない.
  $\Longrightarrow$ 点同士が近づく極限を持つような $C_n(\mathbb{R}^d)$ のコンパクト化を考える.

$\overline{Emb}_d$ の余単体モデル：Kontsevich オペラッド

写像 $\theta : C_n(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \prod_{1 \le i < j \le n} S^{d-1}$ を次のように定義する.

$$\theta(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_j - x_i}{|x_j - x_i|} \right)_{i,j}$$

$\overline{Emb}_d$ の余単体モデル：Kontsevich オペラッド

写像 $\theta : C_n(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \prod_{1 \le i < j \le n} S^{d-1}$ を次のように定義する.

$$\theta(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_j - x_i}{|x_j - x_i|} \right)_{i,j}$$

自然な同相

$$Image(\theta) \cong C_n(\mathbb{R}^d)/\sim$$

が存在する．ただし，$\sim$ は以下の関係で生成される同値関係.

- (回転を含まない) 相似拡大・縮小
- colinear relation :

定義 2.1

$\mathcal{K}_d(n) = Closure(Image(\theta)) \subset \prod_{1 \leq i < j \leq n} S^{d-1}$ と置く.
$\{\mathcal{K}_d(n)\}_{n \geq 0}$ は位相オペラッドの構造を持つ. この位相オペラッドを d 次 Kontsevich オペラッドと呼ぶ.

定義 2.1

$\mathcal{K}_d(n) = Closure(Image(\theta)) \subset \prod_{1 \le i < j \le n} S^{d-1}$ と置く.
$\{\mathcal{K}_d(n)\}_{n \ge 0}$ は位相オペラッドの構造を持つ．この位相オペラッドを d 次 Kontsevich オペラッドと呼ぶ.

$\mathcal{A}$: 結合律オペラッドとする.
colinear relation より，$\mathcal{K}_1(n) \cong \Sigma_n$. よって，点の順序と $\mathbb{R}$ の順序が一致する配置を取ることによりオペラッドの射 $\mathcal{A} \to \mathcal{K}_1$ が定まる.

線形埋め込み $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ を固定することにより，オペラッドの射 $\mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_d$ が得られる.
合成により，オペラッドの射 $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{K}_d$ が得られる.

$\overline{Emb}_d$ の余単体モデル：乗法的オペラッド

定義 2.2 (Gerstenhaber-Voronov)

非対称オペラッドの射 $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{O}$ のことを乗法的オペラッドという.

$\overline{Emb}_d$ の余単体モデル：乗法的オペラッド

定義 2.2 (Gerstenhaber-Voronov)

非対称オペラッドの射 $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{O}$ のことを乗法的オペラッドという.

乗法的オペラッド $\mathcal{O}$ に対して，余単体対象 $\mathcal{O}^\bullet$ が次のように定まる.

$$\mathcal{O}^n = \mathcal{O}(n),$$

$$d^i(x) = \begin{cases} \mu \circ_1 x & (i = 0) \\ x \circ_i \mu & (1 \leq i \leq n) \\ \mu \circ_2 x & (i = n+1), \end{cases}$$

$$s^i(x) = x \circ_{i+1} e$$

$$(\mu \in \mathcal{A}(2),\ e \in \mathcal{A}(0)).$$

定理 2.3 (Sinha)

$d \geq 4$ のとき，弱ホモトピー同値

$$\widetilde{\mathrm{Tot}}(\mathcal{K}_d^\bullet) \simeq \overline{Emb}_d$$

が存在する． ($\widetilde{\mathrm{Tot}}$: homotopy totalization) □

証明には Goodwillie-Weiss の embedding calculus (関手の微積分) を使う．

$\overline{Emb}_d$ の余単体モデル：スペクトル系列

余単体空間 $\mathcal{K}_d^\bullet$ から得られる Bousfield-Kan 型ホモロジースペクトル系列を Sinha のスペクトル系列と呼ぶ．このスペクトル系列の E^2 ページは Poisson オペラッドを用いて記述される．

定義 2.4

k 次 Poisson オペラッドを次のように定義する．

$L_k(x_1, \ldots, x_n)$:次数 0 の元 $x_1, \ldots, x_n$ で生成される自由次数付 Lie 代数．ただしブラケット $[-,-]$ は次数を k 上げる．

$\bigwedge(L_k(x_1, \ldots, x_n))$: $L_k(x_1, \ldots, x_n)$ で生成される自由次数付可換代数．

次数付部分加群 $\mathrm{Poiss}_k(n) \subset \bigwedge(L_k(x_1, \ldots, x_n))$ を，$x_1, \ldots, x_n$ をちょうど一つづつ含む単項式で生成されるものとする．

合成は次の等式を使って定める．

$$[a, bc] = [a, b]c + (-1)^{(|a|+k+1)|b|} b[a, c].$$

乗法的チェインオペラッド $\mathcal{O}$ の Hochschild コホモロジー $HH^*(\mathcal{O})$ とは, $\mathcal{O}^\bullet$ の total complex のホモロジーのことを言う.

定理 2.5 (Sinha)

Sinha のスペクトル系列の E^2 ページは $HH^*(\mathrm{Poiss}_{d-1})$ と同型である. 特に $d \geq 4$ のときこのスペクトル系列は $H_*(\overline{Emb}_d)$ に収束する. □

オペラッドの形式性とスペクトル系列の退化

定義 3.1

(1) チェインオペラッドの間の射 $f : \mathcal{O} \to \mathcal{P}$ が弱同値であるとは, $\forall n \geq 0$ について $f_n : \mathcal{O}(n) \to \mathcal{P}(n)$ が quasi-isomorphism であることを言う.

(定義の続き)

(2) $\mathcal{O}$: チェインオペラッドとする.

$H_*(\mathcal{O})$: $\mathcal{O}$ のホモロジーをとって得られるオペラッドとする.

乗法的チェインオペラッド $\mathcal{O}$ が relatively formal であるとは，チェインオペラッドの可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{P}_1 \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \arrow[r] & \mathcal{P}_N \arrow[d] & \mathcal{A} \arrow[l] \arrow[d] \\
\mathcal{O} \arrow[r] & \mathcal{O}_1 & \cdots \arrow[l] \arrow[r] & \mathcal{O}_N & H_*(\mathcal{O}) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

で水平方向の射がすべて弱同値であるものが存在することを言う.

$C_*(\mathcal{K}_d)$: $\mathcal{K}_d$ の特異 **k**-チェインをとって得られるオペラッドとする．自然に乗法的オペラッドとみなす.

定理 3.2 (Tamarkin, Kontsevich, Lambrechts-Volic)

$d \geq 3$, $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ のとき，$C_*(\mathcal{K}_d)$ は relatively formal. □

定義 3.3

乗法的チェインオペラッド $\mathcal{O}$ が multiplicatively formal であるとは,
チェインオペラッドの可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{A} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, equal] & \mathcal{A} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{A} \arrow[d] \\
\mathcal{O} \arrow[r] & \mathcal{O}_1 & \cdots \arrow[l] \arrow[r] & \mathcal{O}_N & H_*(\mathcal{O}) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

で水平方向の射がすべて弱同値であるものが存在することを言う.

もし，$C_*(\mathcal{K}_d)$ が multiplicatively formal ならば，$C_*(\mathcal{K}_d^\bullet)$ と $H_*(\mathcal{K}_d^\bullet)$ が余単体チェイン複体の弱同値 (termwise quasi-isomorphism) で結べる．しかも，$H_*(\mathcal{K}_d^\bullet)$ のスペクトル系列は E^2 ページで退化するので，Sinha のスペクトル系列の E^2 ページからの退化が言える．

もし，$C_*(\mathcal{K}_d)$ が multiplicatively formal ならば，$C_*(\mathcal{K}_d^\bullet)$ と $H_*(\mathcal{K}_d^\bullet)$ が余単体チェイン複体の弱同値 (termwise quasi-isomorphism) で結べる．しかも，$H_*(\mathcal{K}_d^\bullet)$ のスペクトル系列は E^2 ページで退化するので，Sinha のスペクトル系列の E^2 ページからの退化が言える．

Lambrechts,Turchin,Volic はこのアイデアを実行するために任意のオペラッドの射に対して適用可能な Gerstenhaber-Voronov の構成の部分的一般化を導入し，$d \geq 4$ のときの Sinha のスペクトル系列の退化を証明した．

定理 3.4 (M., Tsopméné)

$d \geq 3$, $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ のとき， $C_*(\mathcal{K}_d)$ は multiplicatively formal. □

定理 3.4 (M., Tsopméné)

$d \geq 3$, $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ のとき，$C_*(\mathcal{K}_d)$ は multiplicatively formal. □

系 3.5 (M., Tsopméné, $d \geq 4$ のとき Lambrechts-Turchin-Volic)

$d \geq 3$, $\mathbf{k} = \mathbb{Q}$ のとき，Sinha のスペクトル系列は E^2 ページで退化する. □

Gerstenhaber 代数

$\mathcal{O}$: 乗法的チェインオペラッド.

$HH^*(\mathcal{O})$ には次のような Gerstenhaber 代数の構造が定まる.
(Gerstenhaber-Voronov)

$$x \cdot y = \mu(x, y) \qquad (\mu \in \mathcal{A}(2))$$
$$[x, y] = \sum_i (\pm x \circ_i y) + \sum_i (\pm y \circ_i x)$$

Gerstenhaber 代数

$\mathcal{O}$: 乗法的チェインオペラッド.

$HH^*(\mathcal{O})$ には次のような Gerstenhaber 代数の構造が定まる.
(Gerstenhaber-Voronov)

$$x \cdot y = \mu(x, y) \qquad (\mu \in \mathcal{A}(2))$$
$$[x, y] = \sum_i (\pm x \circ_i y) + \sum_i (\pm y \circ_i x)$$

$\mathcal{O}$: 乗法的位相オペラッド.

$\widetilde{\mathrm{Tot}}(\mathcal{O}^\bullet)$ には little 2-cubes の作用が入る. (McClure-Smith)
$H_*(\overline{Emb}_d) \cong H_*(\widetilde{\mathrm{Tot}}(\mathcal{K}_d^\bullet))$ に Gerstenhaber 代数の構造が誘導される.

系 3.6

次のような Gerstenhaber 代数の同型が存在する:

$$H_*(\overline{Emb}_d) \cong HH^*(\mathrm{Poiss}_{d-1}).$$

Proof.

$$H_*(\overline{Emb}_d) \cong H_*(\widetilde{\mathrm{Tot}}(\mathcal{K}_d^\bullet)) \overset{\text{境}}{\cong} HH^*(C_*(\mathcal{K}_d)) \overset{\text{定理 3.4}}{\cong} HH^*(\mathrm{Poiss}_{d-1}) \qquad \square$$

モデル圏

モデル圏 = " model for doing homotopy theory " (Quillen).

$\mathcal{M}$: small limit, colimit で閉じている圏.
WEQ, COF, FIB : $\mathcal{M}$ の射のクラス.
WEQ, COF, FIB に属す射をそれぞれ弱同値, cofibration, fibration と呼び, $\xrightarrow{\sim}$, $\rightarrowtail$, $\twoheadrightarrow$ で表す.

定義 4.1

組 $(\mathcal{M}; \mathrm{WEQ}, \mathrm{COF}, \mathrm{FIB})$ がモデル圏であるとは，以下の条件を満たすことを言う.

- (2 から 3) $\mathcal{M}$ の合成可能な射の組 (f, g) に対して，f, g, $g \circ f$ のうち二つが弱同値ならば，残り一つも弱同値である.
- (レトラクト) $\mathcal{M}$ の射 f, g に対して，f が g のレトラクトで g が弱同値 (resp. cofibration, fibration) ならば，f も弱同値 (resp. cofibration, fibration).

(定義の続き)

- (リフティング) 次の二つの可換四角形は常に lifting を持つ.

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d, tail, "\sim"'] & \bullet \arrow[d, two heads] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d, two heads, "\sim"] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

- (factorization) $\mathcal{M}$ の任意の射 $\bullet \to \bullet$ は次のような二通りの関手的な分解を持つ. $\bullet \overset{\sim}{\rightarrowtail} \bullet \twoheadrightarrow \bullet$, $\bullet \rightarrowtail \bullet \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} \bullet$

定義 4.2

$\mathcal{M}$: モデル圏. $f, g : X \to Y \in \mathcal{M}$ 射とする.

f と g が left homotopic $\iff$ 次のような可換図式が存在する.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
X \arrow[r] \arrow[ur, equal] \arrow[dr, equal] & X' \arrow[r] & Y \\
 & X \arrow[u, "\sim"'] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

f と g が right homotopic $\iff$ 次のような可換図式が存在する.

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dr, equal] & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[r] \arrow[dr, equal] & Y' \arrow[u, "\sim"'] \arrow[r] & Y \\
 & Y \arrow[u, equal] &
\end{tikzcd}$$

定理 4.3 (Quillen)

X : cofibrant (i.e., $\emptyset \rightarrowtail X$), Y: fibrant (i.e., $Y \twoheadrightarrow *$) とする．このとき，二つの射 $f, g : X \to Y$ が left homotopic であることと right homotopic であることは同値.

$$[X, Y] = Hom_{\mathcal{M}}(X, Y)/(\text{right or left homotopic})$$

とおくと，$[X, Y]$ は X と Y の弱同値類のみに依存する. □

left proper なモデル圏

定義 4.4

モデル圏 $\mathcal{M}$ が left proper であるとは，弱同値の cofibration による pushout が常に弱同値であることを言う.

$\mathcal{M}$: モデル圏，$f : X \to Y \in \mathcal{M}$ 射とする．
$X/\mathcal{M}$: X 下の対象のなす圏．i.e.,

$$Obj(X/\mathcal{M}) = \{X \to A \in \mathcal{M}\},$$
$$Hom_{X/\mathcal{M}}(A, B) = \{X \text{ からの射と可換な射 } g : A \to B \in \mathcal{M}\}.$$

関手 $U_f : Y/\mathcal{M} \longrightarrow X/\mathcal{M}$ を次のように定める．

$$U_f : (Y \to A) \longmapsto (X \xrightarrow{f} Y \to A)$$

$\mathcal{M}$: モデル圏，$f : X \to Y \in \mathcal{M}$ 射とする．
$X/\mathcal{M}$: X 下の対象のなす圏．i.e.,

$$Obj(X/\mathcal{M}) = \{X \to A \in \mathcal{M}\},$$
$$Hom_{X/\mathcal{M}}(A, B) = \{X \text{ からの射と可換な射 } g : A \to B \in \mathcal{M}\}.$$

関手 $U_f : Y/\mathcal{M} \longrightarrow X/\mathcal{M}$ を次のように定める．

$$U_f : (Y \to A) \longmapsto (X \xrightarrow{f} Y \to A)$$

命題 4.5

$\mathcal{M}$ が left proper で，$f : X \to Y$ が弱同値のとき，U_f はホモトピー圏の同値 $\mathbf{Ho}(Y/\mathcal{M}) \simeq \mathbf{Ho}(X/\mathcal{M})$ を誘導する． □

オペラッドのモデル圏

$\mathcal{CH}_{\geq 0}$: 非負整数で次数付けられた **k** 上のチェイン複体のなす圏.
$\mathcal{OPER}_{\geq 0}$: $\mathcal{CH}_{\geq 0}$ 上の非対称オペラッドのなす圏.

定理 4.6

$\mathcal{OPER}_{\geq 0}$ には次のような left proper なモデル圏の構造が入る.

- $f : \mathcal{O} \to \mathcal{P}$ が弱同値 $\iff$ $\forall n \geq 0,\ f_n : \mathcal{O}(n) \to \mathcal{P}(n)$ が quasi-isomorphism.
- $f : \mathcal{O} \to \mathcal{P}$ が fibration $\iff$ $\forall n \geq 0,\ k \geq 1,\ f_{n,k} : \mathcal{O}(n)_k \to \mathcal{P}(n)_k$ が全射.

□

定理 4.6 は以下の仕事に実質的には含まれる.

- 対称オペラッドの (セミ) モデル圏構造の存在
  - チェインオペラッド : Hinich ('97)
  - 一般のモデル圏上のオペラッド : Spitzweck ('01), Berger-Moerdijk ('03)
- 非対称オペラッドのモデル圏構造の存在 : Muro ('11)

multiplicative formality の証明

結合律オペラッド $\mathcal{A}$ と弱同値なオペラッドを A_∞-オペラッドという.

補題 5.1

(1) $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{B}_1$: A_∞-オペラッドとする.
B_0 : cofibrant とする. オペラッドの射 $f : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_1$ を一つ固定する.
このとき, 写像

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^\times &\longrightarrow [\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1] \\ a &\longmapsto a * f, \quad (a * f)_n = a^{n-1} f_n \end{aligned}$$

は全単射である.

(補題の続き)

(2) $\mathcal{OPER}_{\geq 0}$ における可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}_0 \arrow[r, "f_1"] & \mathcal{B}_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\alpha"] & \mathcal{O}_1 \arrow[d, "\beta", "\sim"'] \\
\mathcal{B}_0 \arrow[r, "f_2"] & \mathcal{B}_2 \arrow[r, "g_2"] & \mathcal{O}_2
\end{tikzcd}$$

を考える． $\mathcal{B}_0$，$\mathcal{B}_1$，$\mathcal{B}_2$: A_∞-オペラッド， $\mathcal{B}_0$: cofibrant, β : 弱同値とする． $h_i = g_i \circ f_i$ とおく．

このとき，h_1 と h_2 は $\mathbf{Ho}(\mathcal{B}_0/\mathcal{OPER}_{\geq 0})$ の対象として同型.

Proof.

(1) $Hom_{\mathcal{OPER}_{\geq 0}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \cong \mathbf{k}^{\times}$ に帰着.

Proof.

(1) $Hom_{\mathcal{OPER}_{\geq 0}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \cong \mathbf{k}^{\times}$ に帰着.

(2)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}_0 \arrow[r, "f_1"] & \mathcal{B}_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\alpha"] & \mathcal{O}_1 \arrow[d, "\beta"] \\
\mathcal{B}_0 \arrow[r, "f_2"] & \mathcal{B}_2 \arrow[r, "g_2"] & \mathcal{O}_2
\end{tikzcd}$$

まず, $\alpha = \mathrm{id}$, $\beta = \mathrm{id}$ の場合を考える. もし f_1 と f_2 が homotopic ならば h_1 と h_2 も right homotopic. よって OK.

よって $f_2 = a * f_1$, $a \in \mathbf{k}^{\times}$ としてよい. 射 $\phi_a : \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_1$ を $\phi_{a,n} = a^{n-1} : \mathcal{O}_1(n) \to \mathcal{O}_1(n)$ によって定義すると, ϕ_a は h_1 と h_2 との $\mathcal{B}_0/\mathcal{OPER}_{\geq 0}$ の対象としての同型である.(よって $\mathbf{Ho}(\mathcal{B}_0/\mathcal{OPER}_{\geq 0})$ でも同型.)

Proof.

(1) $Hom_{\mathcal{OPER}_{\geq 0}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \cong \mathbf{k}^{\times}$ に帰着.

(2)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}_0 \arrow[r, "f_1"] & \mathcal{B}_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\alpha"] & \mathcal{O}_1 \arrow[d, "\beta"] \\
\mathcal{B}_0 \arrow[r, "f_2"] & \mathcal{B}_2 \arrow[r, "g_2"] & \mathcal{O}_2
\end{tikzcd}$$

まず, $\alpha = \mathrm{id}$, $\beta = \mathrm{id}$ の場合を考える. もし f_1 と f_2 が homotopic ならば h_1 と h_2 も right homotopic. よって OK.

よって $f_2 = a * f_1$, $a \in \mathbf{k}^{\times}$ としてよい. 射 $\phi_a : \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_1$ を $\phi_{a,n} = a^{n-1} : \mathcal{O}_1(n) \to \mathcal{O}_1(n)$ によって定義すると, ϕ_a は h_1 と h_2 との $\mathcal{B}_0/\mathcal{OPER}_{\geq 0}$ の対象としての同型である.(よって $\mathbf{Ho}(\mathcal{B}_0/\mathcal{OPER}_{\geq 0})$ でも同型.)

一般の場合. $g_1 \circ f_1$ と $g_2 \circ \alpha \circ f_1$ は $\mathbf{Ho}(\mathcal{B}_0/\mathcal{OPER}_{\geq 0})$ で同型. f_2 と $\alpha \circ f_1$ に上の場合を適用すると主張が出る. □

multiplicative formality の証明.

$\mathcal{A}$ の cofibrant replacement $f : \mathcal{B}_0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$ をとる. 先の補題を relative formality を実現するチェインの各四角形に適用する:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}_0 \arrow[d, "f"] & \mathcal{B}_0 \arrow[d, "f_1"] & \cdots & \mathcal{B}_0 \arrow[d, "f_N"] & \mathcal{B}_0 \arrow[d, "f"] \\
\mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{P}_1 \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \arrow[r] & \mathcal{P}_N \arrow[d] & \mathcal{A} \arrow[l] \arrow[d] \\
C_*(\mathcal{K}_d) \arrow[r] & \mathcal{O}_1 & \cdots \arrow[l] \arrow[r] & \mathcal{O}_N & H_*(C_*(\mathcal{K}_d)) \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

$U_f(C_*(\mathcal{K}_d))$ と $U_f(H_*(C_*(\mathcal{K}_d))$ が $\mathbf{Ho}(\mathcal{B}_0/\mathcal{OPER}_{\geq 0})$ の対象として同型であることがわかる. left-properness から, $C_*(\mathcal{K}_d)$ と $H_*(C_*(K_d))$ は $\mathbf{Ho}(\mathcal{B}_0/\mathcal{OPER}_{\geq 0})$ において同型. $\square$

註：Tsopméné は，relative formality を実現するオペラッドの弱同値を整理することにより，より初等的な証明を与えている.

展望：$d = 3$ の場合

Emb_d のモデルは " 半直積 " $\mathbb{EM}^{\bullet}_{S^{d-1}} \ltimes \mathcal{K}^{\bullet}_{d}$ で与えられる.

展望：$d = 3$ の場合

Emb_d のモデルは " 半直積 " $\mathbb{EM}^{\bullet}_{S^{d-1}} \ltimes \mathcal{K}^{\bullet}_d$ で与えられる.

定理 6.1 (Salvatore, Turchin)

$\widetilde{\mathrm{Tot}}(\mathbb{EM}^{\bullet}_{S^2} \ltimes \mathcal{K}^{\bullet}_3)$ は二重ループ空間. □

定理 6.2 (Budney)

Emb_3 は prime knot の空間で生成される自由 little 2-cubes 代数. □

予想 6.3

$\widetilde{\mathrm{Tot}}(\mathbb{EM}^{\bullet}_{S^2} \ltimes \mathcal{K}^{\bullet}_3)$ は Emb_3 の group completion と弱ホモトピー同値であろう. □

予想の帰結：自然な写像 $\pi_0(Emb_3) \to \pi_0(\widetilde{\mathrm{Tot}}(\mathbb{EM}^{\bullet}_{S^2} \ltimes \mathcal{K}^{\bullet}_3))$ が単射.

予想 6.3

$\widetilde{\mathrm{Tot}}(\mathbb{EM}^{\bullet}_{S^2} \ltimes \mathcal{K}^{\bullet}_3)$ は Emb_3 の group completion と弱ホモトピー同値であろう. □

予想の帰結：自然な写像 $\pi_0(Emb_3) \to \pi_0(\widetilde{\mathrm{Tot}}(\mathbb{EM}^{\bullet}_{S^2} \ltimes \mathcal{K}^{\bullet}_3))$ が単射.

定理 6.4 (Volic)

$H_0(\mathrm{Tot}(C_*(\mathcal{K}^{\bullet}_3)))$ の双対は Vassiliev の有限型不変量全体の空間に等しい. □

ご清聴ありがとうございました!