Invariant rings and representations of symmetric groups

工藤 翔太郎

福岡大学理学研究科

2012 年 11 月 2 日
ホモトピー論シンポジウム
山口大学

分類空間 BG のコホモロジー

コンパクト連結 Lie 群 G の分類空間 BG の有理コホモロジー $H^*(BG;\mathbb{Q})$ が Weyl 群の作用による invariant ring で表され, 多項式環になることが知られている.

$$\begin{aligned} H^*(BG;\mathbb{Q}) &\cong H^*(BT^n;\mathbb{Q})^{W(G)} \\ &\cong \mathbb{Q}[t_1, t_2, \cdots, t_n]^{W(G)} = \mathbb{Q}[x_1, x_2, \cdots, x_n] \end{aligned}$$

分類空間 BG のコホモロジー

コンパクト連結 Lie 群 G の分類空間 BG の有理コホモロジー $H^*(BG;\mathbb{Q})$ が Weyl 群の作用による invariant ring で表され, 多項式環になることが知られている.

$$\begin{aligned} H^*(BG;\mathbb{Q}) &\cong H^*(BT^n;\mathbb{Q})^{W(G)} \\ &\cong \mathbb{Q}[t_1, t_2, \cdots, t_n]^{W(G)} = \mathbb{Q}[x_1, x_2, \cdots, x_n] \end{aligned}$$

また, p を奇素数とするとき, $\mathbb{F}_p$–係数コホモロジー $H^*(BG;\mathbb{F}_p)$ も G に p–torsion がなければ同様の結果が成り立つ.

問題 (Steenrod)

多項式環 $\mathbb{F}_p[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ に対し,

$$H^*(X; \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p[x_1, x_2, \cdots, x_n]$$

を満たす位相空間 X が存在するための条件を求めよ.

ここで, $H^*(X; \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ を満たす位相空間 X が存在するとき, 実現可能という.

Clark-Ewing の構成

W を $GL(n, \mathbb{Z}_p^\wedge)$ の有限部分群とする.
このとき, W は Eilenberg-MacLane 空間 $K((\mathbb{Z}_p^\wedge)^n, 2)$ に, free に作用する.

$$X = K((\mathbb{Z}_p^\wedge)^n, 2) \times EW$$

とし, $X_W = X/W$ とすると, $p \nmid |W|$ ならば

$$\begin{aligned} H^*(X_W; \mathbb{F}_p) &= H^*(K((\mathbb{Z}_p^\wedge)^n, 2); \mathbb{F}_p)^W \\ &= \mathbb{F}_p[t_1, t_2, \cdots, t_n]^W \end{aligned}$$

もし, W が p–adic 鏡映群ならば invariant ring は多項式環となる.

環 R に対して, n 変数の多項式環 $R[t_1, t_2, \cdots, t_n]$ を考える.
W を $GL(n, R)$ の部分群とするとき, 不変多項式の全体
$R[t_1, t_2, \cdots, t_n]^W$ は環の構造を持ち, invariant ring と呼ばれている.
たとえば, 鏡映群の置換作用による invariant ring は多項式環となることが知られている.

環 R に対して, n 変数の多項式環 $R[t_1, t_2, \cdots, t_n]$ を考える.
W を $GL(n, R)$ の部分群とするとき, 不変多項式の全体
$R[t_1, t_2, \cdots, t_n]^W$ は環の構造を持ち, invariant ring と呼ばれている.
たとえば, 鏡映群の置換作用による invariant ring は多項式環となることが知られている.

問題

(1) $H^*(BT^n; \mathbb{F}_p)^W$ の代数的構造

(2) $H^*(BT^n; \mathbb{F}_p)^W$ の実現可能性

たとえば, $G = U(n)$ の場合を考える.
ユニタリー群 $U(n)$ の Weyl 群は対称群 Σ_n なので, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} H^*(BU(n);\mathbb{Z}) &\cong H^*(BT^n;\mathbb{Z})^{W(U(n))} \\ &\cong \mathbb{Z}[t_1, t_2, \cdots, t_n]^{\Sigma_n} = \mathbb{Z}[c_1, c_2, \cdots, c_n] \end{aligned}$$

また, すべての素数 p に対し,

$$H^*(BU(n);\mathbb{F}_p) \cong H^*(BT^n;\mathbb{F}_p)^{W(U(n))}$$

が成り立つ.

たとえば, $G = U(n)$ の場合を考える.
ユニタリー群 $U(n)$ の Weyl 群は対称群 Σ_n なので, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} H^*(BU(n);\mathbb{Z}) &\cong H^*(BT^n;\mathbb{Z})^{W(U(n))} \\ &\cong \mathbb{Z}[t_1, t_2, \cdots, t_n]^{\Sigma_n} = \mathbb{Z}[c_1, c_2, \cdots, c_n] \end{aligned}$$

また, すべての素数 p に対し,

$$H^*(BU(n);\mathbb{F}_p) \cong H^*(BT^n;\mathbb{F}_p)^{W(U(n))}$$

が成り立つ.

$G = SU(n)$ について, 類似の結果が成り立つことも多いが,
$\mathrm{rank}(SU(n)) = n - 1$ であることに, 注意が必要である.

$SU(n)$ の center は $\mathbb{Z}_n$ だから,d を n の約数とするとき,Lie 群 $SU(n)/\mathbb{Z}_d$ が定義される.

$$\phi_d = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \\ d-1 & \cdots & d-1 & d \end{pmatrix}$$

とするとき, $SU(n)/\mathbb{Z}_d$ の Weyl 群の $\mathbb{Z}$–表現は,

$$W(SU(n)/\mathbb{Z}_d) = \phi_d^{-1} W(SU(n))\, \phi_d$$

となる.

$n = d$ のとき, $W_{n,n}$ と dual 表現 $W(SU(n))^*$ は同値である.

$$\phi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$$

とすると, $\phi^{-1} W(SU(n))\, \phi = W(SU(n))^*$ となる.

$W_{n,n} = \phi_n^{-1} W(SU(n))\, \phi_n$ より $\psi = \phi_n^{-1}\phi$ とおくと

$$\psi^{-1} W_{n,n}\, \psi = W(SU(n))^*$$

となる.

問題

$W_{n,d} = W(SU(n)/\mathbb{Z}_d)$ とするとき,

invariant ring $H^*(BT^n; \mathbb{F}_p)^{W_{n,d}}$ の構造を調べよ.

問題

$W_{n,d} = W(SU(n)/\mathbb{Z}_d)$ とするとき,

invariant ring $H^*(BT^n; \mathbb{F}_p)^{W_{n,d}}$ の構造を調べよ.

$n = d = 3$ のとき, 次が知られている.

(1) $H^*(BT^2; \mathbb{F}_3)^{W_{3,3}} = \mathbb{F}_3[t_1 + t_2, t_1^2 t_2^2 (t_1 - t_2)^2]$

(2) $H^*(BT^2; \mathbb{F}_3)^{W_{3,3}}$ は実現可能ではない.

関連する結果を表にすると, 次のとおりである. 尚, 適当な p と m に対し, $S[V] = H^*(BT^m; \mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p[t_1, t_2, \cdots, t_m]$ とする.

W	$S[V]^W \cong S[V]^{W^*}$	多項式環	実現可能性
$D_6 = \Sigma_3$	×	○	○
D_6^*	×	○	×
D_{2p} $(p \geq 5)$	×	○	×
D_{2p}^* $(p \geq 5)$	×	○	×
D_{12}	○	○	○
D_{4p} $(p \geq 5)$	○	○	×
D_8	○	○	×
Σ_p $(p \geq 5)$	×	○	○
Σ_p^* $(p \geq 5)$	×	×	×
$W_{n,d}$	?	?	?

ただし, $W_{n,d} = W(SU(n)/\mathbb{Z}_d)$ とする. $(W_{p,1} = \Sigma_p,\ W_{p,p} = \Sigma_p^*)$

定理 1

$n = 4$, $d = 2$ のとき, 次が成り立つ.

(1) $H^*(BT^3; \mathbb{F}_2)^{W_{4,2}} = \mathbb{F}_2[x_2, x_4, x_6]$
ただし,
$x_2 = t_3$
$x_4 = t_1^2 + t_2^2 + t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3$
$x_6 = t_1t_2(t_1 + t_2 + t_3)$
である.

(2) $H^*(BT^3; \mathbb{F}_2)^{W_{4,2}} \cong H^*(BSU(3) \times BS^1; \mathbb{F}_2)$
すなわち, 実現可能である.

定理 2

$n = d = 4$ のとき, 次が成り立つ.

(1) $H^*(BT^3; \mathbb{F}_2)^{W_{4,4}} = \mathbb{F}_2[x_2, x_8, x_{12}]$
ただし,
$x_2 = t_3$
$x_8 = t_1^4 + t_2^4 + t_1^2t_2^2 + t_1^2t_3^2 + t_2^2t_3^2 + t_1^2t_2t_3 + t_1t_2^2t_3 + t_1t_2t_3^2$
$x_{12} = t_1t_2(t_1 + t_2)(t_2 + t_3)(t_3 + t_1)(t_1 + t_2 + t_3)$
である.

(2) $H^*(BT^3; \mathbb{F}_2)^{W_{4,4}}$ は実現不可能である.

一般の群の作用に対しては invariant ring が多項式環になるとは限らず複雑であるが, 対称群などの鏡映群（reflection group）の場合は, 次のような結果がある.

$$\mathbb{C}[t_1, t_2, \cdots, t_n]^W \text{が多項式環} \Leftrightarrow W \text{ が鏡映群}$$

一般の群の作用に対しては invariant ring が多項式環になるとは限らず複雑であるが, 対称群などの鏡映群（reflection group）の場合は, 次のような結果がある.

$$\mathbb{C}[t_1, t_2, \cdots, t_n]^W \text{が多項式環} \Leftrightarrow W \text{が鏡映群}$$

定義

V を体 $\mathbb{F}$ 上の n 次元のベクトル空間とする. 線形写像 $\varphi : V \longrightarrow V$ が鏡映 (reflection) とは，次の２つの性質をみたすことである.

(1) $\varphi^m = id$ となる自然数 m が存在する.

(2) 任意の U の元 x に対して, $\varphi(x) = x$ となる $(n-1)$ 次元部分ベクトル空間 U が存在する.

定義

一般線形群 $GL(n, \mathbb{F})$ の部分群 G が鏡映群 (reflection group) であるとは，G が鏡映によって生成された群であることをいう.

定義

一般線形群 $GL(n, \mathbb{F})$ の部分群 G が鏡映群 (reflection group) であるとは，G が鏡映によって生成された群であることをいう.

たとえば, n 次の対称群 $\Sigma_n = W(U(n))$ は互換 $\{(i, i+1) \mid 1 \leqq i \leqq n-1\}$ によって生成されているから鏡映群である.

一般にコンパクト連結 Lie 群の Weyl 群 $W(G)$ は $\mathbb{Q}$ 上の鏡映群である.

特殊ユニタリー群 $SU(n)$ の Weyl 群は Σ_n で, 対称群 Σ_{n-1} と $(n-1)\times(n-1)$ 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & & -1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

で生成されている.

特殊ユニタリー群 $SU(n)$ の Weyl 群は Σ_n で, 対称群 Σ_{n-1} と $(n-1)\times(n-1)$ 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & & -1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

で生成されている.

$n = 4$ について考える.

$$W(SU(4)) = \Sigma_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$d = 2$ のとき, $W_{4,2} = \phi_2^{-1} W(SU(4)) \phi_2$ は

$$W_{4,2} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$d = 2$ のとき, $W_{4,2} = \phi_2^{-1} W(SU(4)) \phi_2$ は

$$W_{4,2} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$\mathbb{F}_2$–係数上で考えると

$$W_{4,2} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$d = 2$ のとき, $W_{4,2} = \phi_2^{-1} W(SU(4)) \phi_2$ は

$$W_{4,2} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$\mathbb{F}_2$–係数上で考えると

$$W_{4,2} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

よって, $p = 2$ では

$$W_{4,2} \cong \Sigma_3$$

定理 1

$n = 4$, $d = 2$ のとき, 次が成り立つ.

(1) $H^*(BT^3; \mathbb{F}_2)^{W_{4,2}} = \mathbb{F}_2[x_2, x_4, x_6]$
ただし,
$x_2 = t_3$
$x_4 = t_1^2 + t_2^2 + t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3$
$x_6 = t_1t_2(t_1 + t_2 + t_3)$
である.

(2) $H^*(BT^3; \mathbb{F}_2)^{W_{4,2}} \cong H^*(BSU(3) \times BS^1; \mathbb{F}_2)$
すなわち, 実現可能である.

Inavariant 環の生成元の求め方

G を $GL(V)$ の部分群で $\dim_{\mathbb{F}} V = n$ とする.
$x_1, x_2, \cdots, x_n \in S[V]^G$ を system of parameters とし,

$$\prod_{i=1}^{n} \deg(x_i) = |G| \text{ ならば } S[V]^G \cong \mathbb{F}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$$

が成り立つ.

Inavariant 環の生成元の求め方

G を $GL(V)$ の部分群で $\dim_{\mathbb{F}} V = n$ とする.
$x_1, x_2, \cdots, x_n \in S[V]^G$ を system of parameters とし,

$$\prod_{i=1}^{n} \deg(x_i) = |G| \text{ ならば } S[V]^G \cong \mathbb{F}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$$

が成り立つ.
$x_1, x_2, \cdots, x_n \in S[V]^G$ が system of parameters であることと

$$\begin{cases} x_1(t_1, t_2, \cdots, t_n) = 0 \\ x_2(t_1, t_2, \cdots, t_n) = 0 \\ \qquad\vdots \\ x_n(t_1, t_2, \cdots, t_n) = 0 \end{cases} \quad \text{ならば} \quad \text{各 } t_i = 0$$

であることは同値である.

定理 1 の証明の概略

(1) 連立方程式

$$\begin{cases} x_2 = t_3 \\ x_4 = t_1^2 + t_2^2 + t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3 \\ x_6 = t_1 t_2 (t_1 + t_2 + t_3) \end{cases}$$

これを解くと $t_1 = t_2 = t_3 = 0$ となるので, x_2, x_4, x_6 は system of parameters である.

定理 1 の証明の概略

(1) 連立方程式

$$\begin{cases} x_2 = t_3 \\ x_4 = t_1^2 + t_2^2 + t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 \\ x_6 = t_1t_2(t_1 + t_2 + t_3) \end{cases}$$

これを解くと $t_1 = t_2 = t_3 = 0$ となるので, x_2, x_4, x_6 は system of parameters である.
また

$$|W_{4,2}| = 6 = \deg(x_2) \cdot \deg(x_4) \cdot \deg(x_6)$$

なので

$$H^*(BT^3; \mathbb{F}_2)^{W_{4,2}} = \mathbb{F}_2[x_2, x_4, x_6]$$

(2) $\psi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする. $W_{4,2}$ の生成元を ψ–共役をとると

$$\psi^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\psi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\psi^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なり, この 2 つは $W(SU(3)) \times W(S^1)$ の元である.

$$H^*(BT^3; \mathbb{F}_2)^{W_{4,2}} \cong H^*(BT^3; \mathbb{F}_2)^{W(SU(3))\times W(S^1)} = H^*(BSU(3) \times BS^1; \mathbb{F}_2)$$

□

$d = 4$ のとき, $W_{4,4} = \phi_4^{-1} W(SU(4)) \phi_4$ は

$$W_{4,4} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ -3 & -2 & -4 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$d = 4$ のとき, $W_{4,4} = \phi_4^{-1} W(SU(4)) \phi_4$ は

$$W_{4,4} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ -3 & -2 & -4 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$\mathbb{F}_2$–係数上で考えると

$$W_{4,4} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

定理 2

$n = d = 4$ のとき, 次が成り立つ.

(1) $H^*(BT^3; \mathbb{F}_2)^{W_{4,4}} = \mathbb{F}_2[x_2, x_8, x_{12}]$
ただし,
$x_2 = t_3$
$x_8 = t_1^4 + t_2^4 + t_1^2 t_2^2 + t_1^2 t_3^2 + t_2^2 t_3^2 + t_1^2 t_2 t_3 + t_1 t_2^2 t_3 + t_1 t_2 t_3^2$
$x_{12} = t_1 t_2 (t_1 + t_2)(t_2 + t_3)(t_3 + t_1)(t_1 + t_2 + t_3)$
である.

(2) $H^*(BT^3; \mathbb{F}_2)^{W_{4,4}}$ は実現不可能である.

定理 2 の証明の概略

(1) 連立方程式

$$\begin{cases} x_2 = t_3 \\ x_8 = t_1^4 + t_2^4 + t_1^2t_2^2 + t_1^2t_3^2 + t_2^2t_3^2 + t_1^2t_2t_3 + t_1t_2^2t_3 + t_1t_2t_3^2 \\ x_{12} = t_1t_2(t_1+t_2)(t_2+t_3)(t_3+t_1)(t_1+t_2+t_3) \end{cases}$$

これを解くと $t_1 = t_2 = t_3 = 0$ となるので, x_2, x_8, x_{12} は system of parameters である.
また

$$|W_{4,4}| = 24 = \deg(x_2) \cdot \deg(x_8) \cdot \deg(x_{12})$$

なので

$$H^*(BT^3; \mathbb{F}_2)^{W_{4,4}} = \mathbb{F}_2[x_2, x_8, x_{12}]$$

コンパクト Lie 群 G の群論的構造を分類空間 BG のホモトピー論的構造で表す有効な方法として p – コンパクト群という概念が Dwyer-Wilkerson によって導入された.

コンパクト Lie 群 G の群論的構造を分類空間 BG のホモトピー論的構造で表す有効な方法として p – コンパクト群という概念が Dwyer-Wilkerson によって導入された.

定義

X が p –コンパクト群であるとは次の 3 つの条件をみたすときをいう.

(1) X はループ空間である.

(2) X は $\mathbb{F}_p$– *finite* である. すなわち, $H^*(X;\mathbb{F}_p)$ は有限次元ベクトル空間である.

(3) BX は $\mathbb{F}_p$– *complete* である.

(2) $H^*(BT^3;\mathbb{F}_2)^{W_{4,4}}$ が実現可能とすると,
$H^*(BT^3;\mathbb{F}_2)^{W_{4,4}} \cong H^*(BX;\mathbb{F}_2)$ となる 2–コンパクト群 X がある.
BX は 2–torsion free なので 2–adic コホモロジーは多項式環になる.
Kasper-Andersen-Grodal の定理より

$$H^*(BX;\mathbb{Z}_2^\wedge) \cong H^*(BG;\mathbb{Z}_2^\wedge)$$

となるコンパクト連結 Lie 群 G がある.

(2) $H^*(BT^3;\mathbb{F}_2)^{W_{4,4}}$ が実現可能とすると,
$H^*(BT^3;\mathbb{F}_2)^{W_{4,4}} \cong H^*(BX;\mathbb{F}_2)$ となる 2–コンパクト群 X がある.
BX は 2–torsion free なので 2–adic コホモロジーは多項式環になる.
Kasper-Andersen-Grodal の定理より

$$H^*(BX;\mathbb{Z}_2^\wedge) \cong H^*(BG;\mathbb{Z}_2^\wedge)$$

となるコンパクト連結 Lie 群 G がある.

しかしながら, $H^*(BG;\mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[x_2, x_8, x_{12}]$ を満たすようなコンパクト連結 Lie 群 G は存在しない. なぜなら, 次数が 4 の生成元がないからである. □

Dual 表現による invariant 環

定理 (Dwyer-Wilkerson)

$V = \oplus\mathbb{F}_p$ に対し, W を $GL(V)$ の部分群, U を V の部分集合とする. このとき,

$$W_U = \langle w \in W \mid w(x) = x, \ {}^{\forall}x \in U \rangle$$

と定義する. $S[V]^{W^*}$ が多項式環であるならば, W_U は鏡映群の構造をもち, $S[V]^{W_U}$ も多項式環である.

Dual 表現による invariant 環

定理 (Dwyer-Wilkerson)

$V = \oplus\mathbb{F}_p$ に対し, W を $GL(V)$ の部分群, U を V の部分集合とする. このとき,

$$W_U = \langle w \in W \mid w(x) = x, \ {}^\forall x \in U \rangle$$

と定義する. $S[V]^{W^*}$ が多項式環であるならば, W_U は鏡映群の構造をもち, $S[V]^{W_U}$ も多項式環である.

$p \geq 5$ のとき, $H^*(BT^{p-1}; \mathbb{F}_p)^{\Sigma_p^*}$ は多項式環ではない.
なぜなら, W_U が鏡映群にならない例が存在するからである.

$GL(p-1, \mathbb{F}_p)$ の部分群 $\Sigma_p^* = W(SU(p))^*$ に対して,

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & p-1 \end{pmatrix} \right\}$$

とすると, $W_U \cong \mathbb{Z}/p \ \ (p \geqq 5)$ であり, $S[V]^{W(SU(p))^*}$ は多項式環でない.

特に, $p = 5$ のとき

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

とおくと

特に, $p = 5$ のとき

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$Ax = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \mod 5$$

特に, $p = 5$ のとき

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$Ax = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \mod 5$$

よって

$$Ax = x \text{ かつ } A^5 = I$$

しかしながら, A は鏡映でない.

しかしながら, A は鏡映でない.
なぜなら

$$rank(A - I) = rank \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \neq 1$$

である.

$p = 2, 3$ の場合は状況が異なる.

$p = 2, 3$ の場合は状況が異なる.

定理 3

次が成り立つ.

(1) $n = 6, 8$ のとき, $H^*(BT^{n-1}; \mathbb{F}_2)^{W_{n,n}}$ は多項式環ではない.

(2) $n = 6, 9$ のとき, $H^*(BT^{n-1}; \mathbb{F}_3)^{W_{n,n}}$ は多項式環ではない.

定理 3 の証明の概略

$W(SU(6))$ の mod 2 表現について考える. $A = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ とする. ただし, 各 a_i は列ベクトルで標準基底 e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 および $b = {}^t(1, 1, 1, 1, 1)$ から 1 つずつ選ぶ.

定理 3 の証明の概略

$W(SU(6))$ の mod 2 表現について考える. $A = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ とする. ただし, 各 a_i は列ベクトルで標準基底 e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 および $b = {}^t(1, 1, 1, 1, 1)$ から 1 つずつ選ぶ.

例えば, $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (e_3, e_2, b, e_1, e_4)$ とすると

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$W(SU(6)) = \Sigma_6$ であり, これは $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, b$ の組み合わせで生成されるので $A \in W(SU(6))$ となる.

$W = W(SU(6))$, $x = {}^t(1,1,1,0,0)$, $y = {}^t(1,1,0,1,1)$ で,
$U = \{x, y\}$ とするとき, W_U を求める.

$W = W(SU(6))$, $x = {}^t(1,1,1,0,0)$, $y = {}^t(1,1,0,1,1)$ で,
$U = \{x, y\}$ とするとき, W_U を求める.

$A \in W_U$ とすると, ベクトル x に対して

$$Ax = a_1 + a_2 + a_3 = x$$

ここで $a_1 = e_1$ とすると, $\{a_2, a_3\} = \{e_2, e_3\}$ となる.
また, $a_1 = e_4$ とすると, $\{a_2, a_3\} = \{e_5, b\}$ となる.

よって, $\{a_1, a_2, a_3\}$ の組み合わせは次の 2 通りである.

$$\{e_1, e_2, e_3\} \text{ または } \{e_4, e_5, b\}$$

したがって, A は

$$\{a_1, a_2, a_3\} = \{e_1, e_2, e_3\} \quad \text{かつ} \quad \{a_4, a_5\} \subset \{e_4, e_5, b\} \quad \cdots \quad (1)$$

または

$$\{a_1, a_2, a_3\} = \{e_4, e_5, b\} \quad \text{かつ} \quad \{a_4, a_5\} \subset \{e_1, e_2, e_3\} \quad \cdots \quad (2)$$

のいずれかである.

さらに, $y = {}^t(1,1,0,1,1)$ なので, $Ay = y$ となる.

$$Ay = a_1 + a_2 + a_4 + a_5 = y$$

(1) のとき,

$$\{a_1, a_2\} = \{e_1, e_2\},\ a_3 = e_3,\ \{a_4, a_5\} = \{e_4, e_5\}$$

である.

(2) のとき,

$$\{a_1, a_2\} = \{e_4, e_5\},\ a_3 = b,\ \{a_4, a_5\} = \{e_1, e_2\}$$

である.

以上より, W_U は

$$W_U = \left\{ \begin{array}{cc} e & (1,2) \\ (4,5) & (1,2)(4,5) \\ (1,4)(2,5)(3,6) & (1,5,2,4)(3,6) \\ (1,4,2,5)(3,6) & (1,5)(2,4)(3,6) \end{array} \right\}$$

ここで, $A = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in W_U$ に対して

$$\begin{aligned} (1,2) &= (e_2, e_1, e_3, e_4, e_5) \\ (1,5,2,4)(3,6) &= (e_5, e_4, b, e_1, e_2) \end{aligned}$$

を意味している.

したがって,

$$W_U \cong D_8$$

この D_8 の表現では鏡映群でないので W_U は鏡映群ではない.
故に, Dwyer-Wilkerson の定理より, $H^*(BT^5; \mathbb{F}_2)^{W_{6,6}}$ は多項式環でない. □

今後の検討課題

(1) 他の $W_{n,d}$ に対して, $H^*(BT;\mathbb{F}_p)^{W_{n,d}}$ は多項式環になるかどうかを調べる.

(2) $H^*(BT;\mathbb{F}_p)^{W_{n,d}}$ の生成元の計算
- 低い次元における代数的構造
- コホモロジー作用素