Bousfield Quantale and its sublattece of idempotents

加藤　諒　　(名大多元数理)[*1]
下村　克己　　(高知大 理)[*2]
立原　有太郎　(高知大 総合人間自然科学)

スペクトラムの安定ホモトピー圏に Bousfield [1] が導入した概念を一般化するために、零対象を持つ閉対称モノイド圏 $\mathcal{C}$ を考える。そのモノイド構造により与えられる対象 X との積がゼロになる対象の class $\langle X\rangle$ を X の Bousfield class と呼ぶ。対象 X, Y は $\langle X\rangle = \langle Y\rangle$ のとき、Bousfield equivalent であるという。Bousfield classes が集合となるとき、それは束構造を持ち、代数的な解析が可能となる。このとき、Bousfield lattice と呼ぶ。安定ホモトピー論は、広義には安定ホモトピー圏 (see [5]) の構造解析である。安定ホモトピー圏は閉対称モノイド圏であることから、その Bousfield classes が考られる。ある圏の構造を解析するとき、その全体の把握が困難な場合、その特別な部分圏の分類を試みることは自然なアイデアである。安定ホモトピー圏の Bousfield classes の研究は、その localizing 部分圏 (see [5]) の分類に深く関連している。実際、任意の Bousfield class は、もとの圏の localizing 部分圏となっている [5]。また、Bousfield classes が集合をなすとき、その構造は数理論理学における quantale や Heyting algebra の構造も持つため、そちらとの関連性も興味深い。スペクトラムの安定ホモトピー圏の場合は大川の仕事 [8] により集合となることが分かっている。スペクトラムの圏における Bousfield classes の大小関係は Bousfield 局所化の強弱関係を表すことからも、Bousfield classes の持つ情報は豊富であろうことが示唆され得る。スペクトラムの圏の Boufield lattice の構造は、Hovey-Palmieri [4] により深く調べられている。彼らは、この論文内において多くの予想を提唱し、Boufield lattice の研究に対する多くの方向性を明示した。その 1 つに、現在はレトラクト予想と呼ばれている、Bousfield 束の構造に直結したものがある (後述)。可換環 R 上の導来圏 $\mathcal{D}(R)$ は、スペクトラムの圏に次ぐ安定ホモトピー圏の代表例である。Neeman [7] により、ネーター環 R に対する $\mathcal{D}(R)$ の構造は非常によく分かっているが、これらの結果をスペクトラムの圏で考えようとすると、球面スペクトラムのホモトピー群が非ネーターであることが原因となり拡張できない。このことから、Neeman は [7] において、非ネーター環上の導来圏の構造解析の重要性を指摘している。これに対し、Dwyer-Palmieri は [3] において、ある特別な非ネーター環 Λ 上の導来圏 $\mathcal{D}(\Lambda)$ の解析を行い、以下の結果を示した。

Theorem (Dwyer-Palmieri)**.** $\mathcal{D}(\Lambda)$ において、レトラクト予想は不成立。

ここでは任意の Bousfield lattice に対するレトラクト予想への新しいアプローチを紹介する。以下、詳細を述べる。

Definition. $Q = (Q, \vee, \cdot, 0, 1)$ は以下をみたすとき、**quantale** と呼ぶ。

1) $(Q, \vee, 0)$ は join-semilattice であり、 minimum 0 をもつ。
2) $(Q, \cdot, 1)$ は monoid である。
3) 分配律 $x\cdot\bigvee_{i\in I} y_i = \bigvee_{i\in I}(x\cdot y_i)$ と $\left(\bigvee_{i\in I} y_i\right)\cdot x = \bigvee_{i\in I}(y_i\cdot x)$ が $x \in Q$, $\{y_i\}_{i\in I} \subset Q$ に対して成り立つ。

[*1] e-mail: ryo_kato_1128@yahoo.co.jp
[*2] e-mail: katsumi@kochi-u.ac.jp

A quantale Q は $(Q,\cdot,1)$ が可換monoidの時、**可換**であるという。

Definition. $B=(B,\vee,\wedge,\cdot,0,1)$ は以下をみたすとき、**Bousfield quantale** と呼ぶ。

1) $(B,\vee,\cdot,0,1)$ は 可換 quantaleである。
2) $(B,\vee,\wedge)$ は束である。
3) 「$x\le y$」 と 「$y\cdot c=0$ なら $x\cdot c=0$である」は同値である。

Example. スペクトラムの圏$\mathcal{S}$ のBousfield lattice $\mathbb{S}$ は$\vee$ をウエッジ和、$\wedge$ を下限、$\cdot$ をスマッシュ積、0 を1点スペクトラムのclass、1を球面スペクトラムS^0 のclass とすれば、Bousfield quantale である。

以後、Bousfield quantale B の積$x\cdot y$ をxy と書く。B のidempotents からなるsubset

$$DL=\{x\in B\mid x^2=x\}$$

を考える。このとき、

Proposition. DL では$xy=x\wedge y$ $(x,y\in DL)$ である。特に、DLは分配束になる。さらに、$\{x_\alpha\}\subset DL$ に対し、$\bigvee_\alpha x_\alpha\in DL$ が言え、これに対しても分配律が成り立つので、DLはframeである。また、包含$i\colon DL\to B$ は任意のjoinを保存する。

Corollary. 包含iの右adjoint $r\colon B\to DL$ が$r(x)=\bigvee\{y\in DL\mid y\le x\}$で与えられる。$r$ は任意のmeets, 順序を保存し、$r(xy)=r(x)r(y)$, $r(x)\le x$ ($x\in B$, 等号は$x\in DL$ のとき) をみたす。

ここで、Exampleの$\mathbb{S}$ でのretract conjecture を述べる。mod p Eilenberg-Mac Laneスペクトラム $H\mathbb{Z}/p$ に対して、$J=\{x\in\mathbb{S}\mid x<\langle H\mathbb{Z}/p\rangle\}$ とおく。このとき、J はidealになり、r は全束射$r\colon\mathbb{S}/J\to\mathbb{D}L$ を誘導する。ここに、$\mathbb{D}L=\{x\in\mathbb{S}\mid x^2=x\}$である。

The Retract Conjecture. $r\colon\mathbb{S}/J\to\mathbb{D}L$は束同型である。

これを一般化するためにJの性質を見ておく。そのためにoperation $a,d\colon B\to B$ を

$$a(x)=\bigvee\{y\mid xy=0\}\quad\text{and}\quad d(x)=x\vee a(x)$$

と定義する。

Proposition. $J=\{x\mid x\le ad(\langle H\mathbb{Z}/p\rangle)\}$. 従って$x\in J$ なら、$x^2=0$.

このJの要素はstrange と呼ばれる。そこで、

$$sg(x)=\{y\mid y<x\}$$

の要素をx-strange と呼ぶことにする。特に$J=sg(\langle H\mathbb{Z}/p\rangle)$.

Definition. Bousfield quantale において、任意のyに対して、$xy=0$ or x のとき、$x\in B$ を **fieldlike** と呼ぶ。

$x\in B$ で生成されるBの主イデアル$I(x)$ とイデアル$J(x)$ を

$$I(x)=\{y\mid y\le x\}\quad\text{and}\quad J(x)=I(ad(x))$$

と定義する。

Proposition. $J(x)\subset sg(x)$. x がfieldlikeなら、$J(x)=sg(x)$.

Bousfield quantale B の冪零要素の集合

$$N = \{x \in B \mid \exists n > 0,\ x^n = 0\}$$

を考える。このとき、N はイデアルになり、

$$r\colon B/N \to DL \qquad (r(x) = \bigvee\{y \in DL \mid y \leq x\})$$

が定義出来る。さらに、

$$A = \{x \in B \mid r(x) = 0\}$$

とすると、$r(xy) = r(x)r(y)$ だから、

$$N \subset A.$$

Remark. A は必ずしもイデアルではない。

Theorem. Bousfield quantale B において、

1) The retraction r が $r\colon B/I \to DL$ を誘導するようなイデアル I があれば $I \subset A$ である。
2) イデアル I が $I \subset A$ をみたすなら、r は $r\colon B/I \to DL$ を誘導する。
3) r により誘導された $r\colon B/I \to DL$ が単射なら $I = A$ である。
4) r により誘導された $r\colon B/N \to DL$ が単射なら $N = A$ であり、さらに B の任意の要素 x に対して $r(x) = x^n$ となる自然数 n がある。

この 4) により、$J \subset N$ $(\subset \mathbb{S})$ であるから、

Corollary. retract conjecture が正しいなら、$\mathbb{S}$ の任意の元に対して $r(x) = x^n$ となる自然数 n がある。

これは言いかえると、retract conjecture が正しいなら、

$\mathbb{S}$ の任意の元に対して $m > n$ なら、$x^m = x^{m+1}$ となる自然数 n がある。

さらに、J の要素 x は $x^2 = 0$ をみたすので、

$\mathbb{S}$ の任意の元に対して $n > 1$ なら、$x^n = x^{n+1}$ となる。

従って

$$\langle E \wedge E \rangle > \langle E \wedge E \wedge E \rangle$$

となるスペクトラムが存在すれば retract conjecture は否定される。

次の考え方として、$J \subsetneqq J(x)$ となる x があるかという問題が考えられる。

K を $H\mathbb{Z}/p$-acyclic スペクトラムとする。例えば自然数の無限部分集合 I に対して $K = \bigvee_{n \in I} K(n)$ など。$\langle X \rangle \leq \langle K \rangle \vee \langle H\mathbb{Z}/p \rangle$ となる連結スペクトラム X で $\langle X \rangle \neq \langle H\mathbb{Q} \rangle$ となるものがあるとする。このとき、

$$J \subset J(\langle X \rangle)$$

となる。$J \neq J(\langle X \rangle)$ となる X があれば retract conjecture は不成立となる。

更なる例として、Bousfield quantale B とその要素 $x \in B$ に対して

$$B(x) = \{y \in B \mid x \leq y\}.$$

を考える。$B(h)$ の $\vee, \wedge, \cdot, 1$ は同じで 0 は x とすれば $x \in DL$ のとき、$B(x)$ は Bousfield quantale になる。さらに $DL(x) = DL \cap B(x)$ とする。

$$C = \{x \in DL \mid\colon r\colon B(x) \xrightarrow{\cong} DL(x)\}$$

の極小元の一つを m とする。このとき、$B(m) \cong DL(m)$.

Lemma. $s_m \colon B \to B(m)$ を $s_m(x) = x \vee m$ で定義すると全束射 $s_m \colon B/J(m) \to B(m)$ を誘導する。さらに、誘導された s_m が同型なら、$B/J(m) \cong DL(m)$ がいえる。

これが同型かどうかは $x \vee m = y \vee m$ なら、$x \vee ad(m) = y \vee ad(m)$ であることを示せば良い。

Corollary. The retract conjecture が正しいなら、$h = \langle H\mathbb{Z}/p \rangle$ とするとき、$\mathbb{S}/J(h) = \mathbb{S}(h)$, $\mathbb{S}(h) = \mathbb{D}L$, $\mathbb{D}L(h) = \mathbb{D}L$ となる。

これから、$\langle X \rangle \geq h$ 且つ $\langle X \wedge X \rangle \neq \langle X \rangle$ をみたすスペクトラム X があれば The retract conjecture を否定できる。

最後にスペクトラム E で Bousfield 局所化された $\mathcal{L}_E$ から得られる Bousfield quantale $\mathbb{L}_E$ について同様の考察ができることを注意する。さらに、$\mathbb{L}_{H\mathbb{Z}/p}$ では $\langle H\mathbb{Z}/p \rangle$ は minimal であるから、$J(\langle H\mathbb{Z}/p \rangle) = 0$ から The retract conjecture が正しければ $\mathbb{L}_{H\mathbb{Z}/p} = \mathbb{D}L_{H\mathbb{Z}/p}$ となり、任意のスペクトラム X は $\langle L_{H\mathbb{Z}/p}(X \wedge X) \rangle = \langle L_{H\mathbb{Z}/p} X \rangle$ をみたすはずである。また、$\mathbb{S}(h)$ と $\mathbb{L}_{H\mathbb{Z}/p}$ の関連性も興味深い。

参考文献

[1] A. K. Bousfield, The Boolean algebra of spectra, Comment. Math. Helv. **54** (1979), 368–377.

[2] W. G. Dwyer and J. H. Palmieri, Ohkawa's theorem: there is a set of Bousfield classes, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), 881–886.

[3] W. G. Dwyer and J. H. Palmieri, The Bousfield lattice for truncated polynomial algebras, Homology, Homotopy Appl. **10** (2008), 413–436.

[4] M. Hovey and J. H. Palmieri, The structure of the Bousfield lattice, in: Homotopy invariant algebraic structures (Baltimore, MD, 1998), 175–196, Contemp. Math., 239 Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[5] M. Hovey, J. H. Palmieri, and N. P. Strickland, Axiomatic stable homotopy theory, Mem. Amer. Math. Soc., **610**, Amer. Math. Soc., (1997).

[6] S. B. Iyengar and H. Krause, The Bousfield lattice of a triangulated category and stratification, arXiv:1105.1799.

[7] A. Neeman, The chromatic tower for $D(R)$, Topology **31** (1992), 519–532.

[8] T. Ohkawa, The injective hull of homotopy types with respect to generalized homology functors, Hiroshima Math. J. **19** (1989), 631–639.