# 素数 3 でのある 2 型スペクトラムのピカール群を次数とするホモトピー群について

高知高専　市木 一平
高知大　理　下村 克己
高知大　総合人間自然科学　立原　有太郎

$\mathcal{S}_3$ を素数 3 で局所化されたスペクトラムの安定ホモトピー圏とする．2 番目の Johnson-Wilson スペクトラム $E(2)$ に対し, $\mathcal{L}_2$ を $E(2)$-局所的なスペクトラムからなる $\mathcal{S}_3$ の充満部分圏と表す．この時, Bousfield-局所化関手 $L_2 : \mathcal{S}_3 \to \mathcal{L}_2$ が得られる．この圏 $\mathcal{L}_2$ において, $X \in \mathcal{L}_2$ は $X \wedge Y = L_2S^0$ を満たす $Y \in \mathcal{S}_3$ が存在する時に可逆であるという．ピカール群 $\mathrm{Pic}(\mathcal{L}_2)$ は $\mathcal{L}_2$ の可逆スペクトラムの同値類全体のなす群である．実際, 演算 $+$ は $a = [A]$, $b = [B] \in \mathrm{Pic}(\mathcal{L}_2)$ に対して $a + b = [A \wedge B]$ で与える．$L_2S^n$ は可逆であるから, $n = [L_2S^n] \in \mathrm{Pic}(\mathcal{L}_2)$ とすれば $n + m = [L_2S^n \wedge L_2S^m] = [L_2S^{n+m}]$ を満たす．従って, $0 = [L_2S^0]$ は単位元で $\mathbb{Z} \subset \mathrm{Pic}(\mathcal{L}_2)$ がわかる．$\mathrm{Pic}(\mathcal{L}_2)$ は Kamiya-Shimomura[4] により, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3$ または $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/3$ と同型であることが示されたが示されていたが, 最近, Goerss-Henn-Mahowald-Rezk[1] や Shimomura[8] により, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/3$ と同型であると示された．この時, $\lambda(= [S^\lambda]) \in \mathrm{Pic}(\mathcal{L}_2)$ を次元としたスペクトラム $X$ のホモトピー群は次のように定義される．

$$\pi_\lambda(X) \quad := \quad [S^\lambda, X] \quad \cong \quad [S^0, X \wedge S^{-\lambda}]$$

今, $\mathrm{Pic}(\mathcal{L}_2)$=$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/3$ の左側の $\mathbb{Z}/3$ の生成元を与える可逆スペクトラムを $P$, 右側の $\mathbb{Z}/3$ の生成元を与える可逆スペクトラムを $Q$ として, $P = S^{-x}, Q = S^{-y}$ と書く．今回は $V$ を $\alpha^2 : \Sigma^8 M \to M$ のコファイバーとするときに $\pi_*(L_2V)$ を調べた．ここで, $M$ は mod $p$ Moore スペクトラムであり, $\alpha$ は Adams map のことである．また, Adams map のコファイバーは Toda-Smith のスペクトラム $V(1)$ として知られている．Oka[5] により, $V(1)$ は環スペクトラムではないが, $V$ は環スペクトラムであることが示されている．
最初の結果は

**Theorem.** 生成元 $x \in \mathrm{Pic}(\mathcal{L}_2)$ に対して,

$$\pi_{n+kx}(L_2V) \quad \cong \quad \pi_{n+48k}(L_2V) \qquad (n, k \in \mathbb{Z})$$

Proof) $V(1)$ を定義するコファイバー列を $\Sigma^4 M \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{i_1} V(1) \xrightarrow{j_1} \Sigma^5 M$ とする．Ichigi-Shimomura[3] により, $\Sigma^{48} L_2V(1) \cong V(1) \wedge S^{-x}$ が示されたためコファイバー列の可換図式

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^{52}V(1) \arrow[r] \arrow[d, "v_2^3"'] & \Sigma^{48}V \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \Sigma^{48}V(1) \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "v_2^3"] & \Sigma^{53}V(1) \arrow[d, "v_2^3"] \\
\Sigma^4V(1) \wedge S^{-x} \arrow[r] & V \wedge S^{-x} \arrow[r] & V(1) \wedge S^{-x} \arrow[r, "\delta_1"] & \Sigma^5V(1) \wedge S^{-x}
\end{tikzcd}$$

$(\delta_1 = i_1 j_1)$ を考えて, $\Sigma^{48} L_2V \cong V \wedge S^{-x}$ がいえるので以下のように分かる．

$$\begin{aligned}\pi_{n+kx}(L_2V) &= [S^{n+kx}, L_2V] \cong [S^n, L_2V \wedge \overbrace{S^{-x} \wedge \cdots \wedge S^{-x}}^{k}] \\ &\cong [S^n, \Sigma^{48k} L_2V] = \pi_{n+48k}(L_2V)\end{aligned}$$

従って $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/3} \pi_{n+kx}(L_2V)$ の構造は $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \pi_n(L_2V)$ が分かればよい. $\pi_*(L_2V(1))$ $(* \in \mathbb{Z})$ の構造は [6] で次のように決定されている.

**Theorem.** ([6, Th. A, Th. 10.6, Cor. 10.7]) $K\otimes E(\zeta_2)$-module として, $\pi_*(L_2V(1)) = B \otimes K \otimes E(\zeta_2)$. 但し,

$$B = I \otimes (P_5 \otimes F \oplus P_4 \otimes bF) \oplus \overline{I} \otimes (P_3 \otimes F^* \oplus P_2 \otimes bF^*).$$

ここに,

$$\begin{aligned} K &= \mathbb{Z}/3[v_2^9, v_2^{-9}], \quad P_k = \mathbb{Z}/3[b_0]/(b_0^k) \\ I &= \mathbb{Z}/3\{v_2^j \mid j = 0,1,5\}, \quad \overline{I} = \mathbb{Z}/3\{v_2^j \mid j = 2,3,4,6,7,8\} \\ F &= \mathbb{Z}/3\{1, \psi\} \quad bF = \mathbb{Z}/3\{b1, b\psi\} \\ F^* &= \mathbb{Z}/3\{h, \xi\} \quad bF^* = \mathbb{Z}/3\{bh, b\xi\}\end{aligned}$$

[6] の記号では

$$\psi = v_2^6\psi_1, \quad b1 = v_2^3 b_1, \quad b\psi = v_2^2\psi_0,$$
$$h = v_2^3 h_0, \quad \xi = v_2^5\xi, \quad bh = v_2^{-2}h_1, \quad b\xi = v_2^{-1}b_1\xi.$$

この結果を元に, $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \pi_n(L_2V)$ の構造を以下のように計算できた. 結果を説明するために更なる記号を用意しておく.

$$\begin{aligned} A &= A_1 \otimes E(\psi_1) \oplus A_2 \\ A_1 &= L/(b_1b_0^4) \otimes E(v_1v_2) \oplus L/(b_0^4)\{v_2^2h_1, v_2^7h_1\} \\ &\quad \oplus L/(b_0^2)\{v_1v_2^4h_1, v_1v_2^7h_1\} \oplus L/(b_1b_0^2)\{v_1, v_1v_2^2, v_1v_2^5, v_1v_2^6\} \\ A_2 &= K(2)_*\{\xi, h_0, b_1\xi\} \oplus K(2)_*\{v_2^{3k}\psi_0 \mid k = 0,1,2\} \\ L &= K[b_0, b_1]/(b_1^2 + v_2^9b_0^2) \quad (= K[b_0] \otimes E(b_1) \text{ as a module})\end{aligned}$$

**Theorem.** $L \otimes E(\zeta_2)$-module として, $\pi_*(L_2V) = A \otimes E(\zeta_2)$.

$\mathrm{Pic}(\mathcal{L}_2)$ のもうひとつの生成元 $y$ を与える可逆スペクトラム $Q$ は $d_5(1) = h_0\psi_0\zeta_2 \in E_2^{5,4}(Q) = E^{5,4}(S^0)$ で特徴付けられる. この微分を手がかりにして

**Proposition.** $\bigoplus_{n,k\in\mathbb{Z}} \pi_{n+ky}(L_2V) \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \pi_n(L_2V) \oplus \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \pi_{n+y}(L_2V) \oplus \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \pi_{n+2y}(L_2V)$ であり,

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \pi_{n+y}(L_2V) \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \pi_{n+2y}(L_2V)$$

である.

さらに, $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \pi_{n+y}(L_2V)$ の構造も決定できた. 更なる記号を用意する.

$$\begin{aligned} A_{11} &= b_0^2L/(b_1b_0^2) \oplus v_1v_2L/(b_1b_0^4) \oplus L/(b_1b_0^4) \otimes E(v_1v_2) \otimes \mathbb{Z}/3\{\psi_1, \zeta_2, \psi_1\zeta_2\} \\ A_{12} &= \left(b_0^2L/(b_0^2) \oplus L/(b_0^4) \otimes \mathbb{Z}/3\{\psi_1, \zeta_2, \psi_1\zeta_2\}\right) \otimes \mathbb{Z}/3\{v_2^2h_1, v_2^7h_1\} \\ A_{13} &= L/(b_0^2)\{v_1v_2^4h_1, v_1v_2^7h_1, v_2^6h_1\} \otimes E(\psi_1, \zeta_2) \oplus v_2^3h_1L/(b_0^2) \otimes \mathbb{Z}/3\{1, \psi_1, \zeta_2\} \\ A_{14} &= L/(b_1b_0^2)\{v_1, v_1v_2^5\} \otimes E(\psi_1, \zeta_2) \\ &\quad \oplus \left(L/(b_1b_0^2)\{1, \psi_1, \zeta_2\} \oplus \psi_1\zeta_2L/(b_1)\right) \otimes \mathbb{Z}/3\{v_1v_2^2, v_1v_2^6\}\end{aligned}$$

これらの記号により,

**Theorem.** $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \pi_{n+y}(L_2V) \cong \bigoplus_{i=1}^{4} A_{1i} \oplus A_2 \otimes E(\zeta_2)$.

ここで, 生成元はそれぞれ次のような部分加群の生成元になっている.

$$v_2 \in E_2^{0,16}(V), \quad h_0 \in E_2^{1,52}(V), \quad h_1 \in E_2^{1,-20}(V),$$
$$b_0 \in E_2^{2,12}(V), \quad b_1 \in E_2^{2,84}(V), \quad \xi \in E_2^{2,-56}(V),$$
$$\psi_0 \in E_2^{3,84}(V), \quad \psi_1 \in E_2^{3,-24}(V)$$

一般に, $V$ が環スペクトラムのとき $\pi_*(L_2V)$ は algebra である. そのため, $\pi_*(L_2V) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} (\pi_n(L_2V) \oplus \pi_{n+y}(L_2V) \oplus \pi_{n+2y}(L_2V))$, $(* \in \mathrm{Pic}(\mathcal{L}_2))$ の algebra としての構造を知るために生成元とその relation を調べたが, relation が複雑でまだ求まっていないため生成元のみ報告する.

**Theorem.** $\pi_*(L_2V)(* \in \mathrm{Pic}(\mathcal{L}_2))$ は algebra として, $A_{1*} = \bigoplus_{i=0}^{4} A_{1i} \otimes \mathbb{Z}/3[\omega]/(\omega^3 - 1)$ と $A_{2*} = A_2 \otimes E(\zeta_2) \otimes \mathbb{Z}/3[\omega]/(\omega^3 - 1)$ の直和である. ただし, $x\omega^k \in \pi_{n+k\omega}(L_2V)$ は上の定理の同型により $x$ に対応する要素である. $A_{1*}$ の algebra としての生成元は, 以下のように羅列できる.

$$v_1v_2, \quad \psi_1, \quad \zeta_2, \quad v_2^2h_1, \quad v_2^7h_1, \quad v_2^3h_1, \quad v_2^6h_1, \quad v_1v_2^4h_1, \quad v_1v_2^7,$$
$$\widetilde{b_0^2}\omega, \quad v_2^2\widetilde{b_0^2}\omega, \quad v_2^7\widetilde{b_0^2}\omega, \quad v_1\omega, \quad v_1v_2\omega, \quad v_1v_2^2\omega, \quad v_1v_2^5\omega,$$
$$v_1v_2^6\omega, \quad \psi_1\omega, \quad \zeta_2\omega, \quad v_2^3h_1\omega, \quad v_2^6h_1\omega, \quad v_1v_2^4h_1\omega, \quad v_1v_2^7h_1\omega,$$
$$b_0^2\omega^2, \quad v_2^2\widetilde{b_0^2}\omega^2, \quad v_2^7\widetilde{b_0^2}\omega^2, \quad v_1\omega^2, \quad v_1v_2\omega^2, \quad v_1v_2^2\omega^2, \quad v_1v_2^5\omega^2,$$
$$v_1v_2^6\omega^2, \quad \psi_1\omega^2, \quad \zeta_2\omega^2, \quad v_2^3h_1\omega^2, \quad v_2^6h_1\omega^2, \quad v_1v_2^4h_1\omega^2, \quad v_1v_2^7h_1\omega^2$$

$A_{2*}$ の algebra としての生成元は

$$\omega, \quad v_2^s\xi, \quad v_2^sh_0, \quad v_2^sb_1\xi, \quad v_2^{3t}\psi_0, \quad v_2^s\xi\zeta_2, \quad v_2^sh_0\zeta_2, \quad v_2^sb_1\xi\zeta_2, \quad v_2^{3t}\psi_0\zeta_2.$$

ここに, $s \in \mathbb{Z}/9, \quad t \in \mathbb{Z}/3$ である.

## References


1. P. Goerss, H.-W. Henn, M. Mahowald, C. Rezk, Picard groups for the prime 3 and chromatic level 2, preprint.
2. I. Ichigi and K. Shimomura, On the homotopy groups of an invertible spectrum in the $E(2)$-local category at the prime 3, JP Jour. Geometry & Topology 3 (2003), 257–268.
3. I. Ichigi and K. Shimomura, $E(2)_*$-invertible spectra smashing with the Smith-Toda spectrum $V(1)$ at the prime 3 , Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2004), 3111-3119.
4. Y. Kamiya and K. Shimomura, A relation between the Picard groups of the $E(n)$-local homotopy category and $E(n)$-based Adams spectral sequence, Contemp. Math. 346 (2004), 321–333.
5. S. Oka, Ring spectra with few cells, Japan J. Math. **5**, 1979.
6. K. Shimomura, The homotopy groups of $L_2$-localized Toda-Smith spectrum $V(1)$ at the prime 3, Trans. Amer. Math. Soc. 349 (1997), 1821–1850.
7. K. Shimomura, The homotopy groups of the $L_2$-localized mod 3 Moore spectrum, J. Math. Soc. Japan **52** (2000), 65–90.
8. K. Shimomura, Picard group of the $E(2)$-local stable homotopy category at the prime three, preprint.