finite category のオイラー標数とゼータ関数

野口 和範*(信州大学理学部アソシエイト研究員)

この講演では

1. finite category のオイラー標数
2. finite category のゼータ関数
3. 両者の関係

について話す予定である。

まず category のオイラー標数についてであるが、現在その定義は４，５種類あり、どれが定番であると言えるか決まっていない状況である。今回はその内の２つである finite category のオイラー標数 χ_L(T. Leinster, 2008) と series Euler characteristic $\chi_{\sum}$ (C. Berger and T. Leinster, 2008) について話す予定である。category のオイラー標数の定義は数種類あるが、それのどれもが単体複体のオイラー標数の一般化になっている。

$$\begin{tikzcd}
\textbf{certain categories} \arrow[d, "\chi"'] & \textbf{Finite posets} \arrow[l, hook'] \arrow[r, shift left, "\text{order complex}"] \arrow[d, "\chi"'] & \textbf{Finite simplicial complexes} \arrow[l, shift left, "\text{face poset}"] \arrow[d, "\chi"] \\
\mathbb{Q} & \mathbb{Z} \arrow[l, hook'] \arrow[r, equal] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

次に χ_L の性質をいくつか挙げておく。

1. category の equivalence で不変である。
2. A を finite acyclic category とした時、その分類空間 BA の空間としてのオイラー標数と A の category としてのオイラー標数は等しい。つまり $\chi_L(A) = \chi(BA)$。
3. χ_L は有理数に値を持つ。特に有限群 G を object が一つ、morphism を G の元で category と見なした時、$\chi_L(G) = \frac{1}{\#G}$ である。

まず 1 についてであるが、category の equivalence というのは位相空間におけるホモトピー同値に対応するような概念である。二つの small category J_1, J_2 が equivalence の時、BJ_1, BJ_2 はホモトピー同値であるので χ_L は category の世界におけるホモトピー同値による分類をするための道具だと言える。

3 についてであるが $\chi_L(G) = \frac{1}{\#G}$ という値については fibration を使った解釈を与えることができる。ある条件を持つ fibration $F \hookrightarrow E \to B$ に対して、$\chi(E) = \chi(F)\chi(B)$ という公式があり、これを G の分類空間 BG の fibration $G \hookrightarrow EG \to BG$ に対して適用すると、$\chi(EG) = \chi(G)\chi(BG)$ を得る。ここで EG は

*E-mail : noguchi@math.shinshu-u.ac.jp

可縮であるので $\chi(EG)=1$ で、G には離散位相が入っているので $\chi(G)=\#G$、よって $\chi(BG)=\frac{1}{\#G}$ という解釈が可能である。

次に finite category I のゼータ関数は nerve の cardinality によって、

$$\zeta_I(z)=\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\#N_m(I)}{m}z^m\right)$$

で定義される。ゼータとオイラー標数は数多くの数学的対象に定義されるが、ゼータの式の中にオイラー標数の情報が入っていることは多く見受けられる。以下に例を挙げる。

1. Let G be a finite graph. Then, Ihara zeta function of G is defined by

$$Z_G(u)=\prod_{[C]}\frac{1}{1-u^{l[C]}}$$

where $[C]$ is an equivalence class of certain paths in G and l is the length function. The zeta function Z_G has the determinant expression

$$Z_G(u)=\frac{(1-u^2)^{\chi(G)}}{\det(E-A_Gu+Q_Gu^2)}$$

for some matrices A_G and Q_G where $\chi(G)$ is the Euler characteristic of G.

2. Let X be an n-dimensional smooth projective variety over a finite field $\mathbb{F}_q$. Then, the zeta function of X is defined by

$$Z_X(T)=\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{N_m(X)}{m}T^m\right)$$

where $N_m(X)$ is the number of points in X over $\mathbb{F}_{q^m}$. The Weil conjecture states that Z_X has the rational expression of the following form

$$Z_X(T)=\frac{P_1(T)\dots P_{2n-1}(T)}{P_0(T)\dots P_{2n}(T)}$$

where each $P_i(T)$ is a polynomial with the coefficient in $\mathbb{Z}$ and we obtain $\chi(X)=\sum_{i=0}^{2n}(-1)^i\deg P_i(T)$.

このようにゼータはオイラー標数の情報を持っているケースが多くみられるが、category に対してもそれが成立する。

Theorem 0.1 (N,2012)**.** *Suppose a finite category I has series Euler characteristic. Then,*

1.

$$\zeta_I(z)=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{(1-a_kz)^{b_{k,0}}}\exp\left(\sum_{j=1}^{e_k-1}\frac{b_{k,j}z^j}{j(1-a_kz)^j}\right)$$

for some $a_k,b_{k,j}\in\mathbb{C}$ and $e_k,n\in\mathbb{N}$.

2.

$$\sum_{j=0}^{M}(-1)^j\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{b_{k,j}}{a_k^{j+1}}\right)=\chi_{\sum}(I)$$

for a sufficiently large M.