E-ホモロジー Schur P, Q-関数と Lie 群上のループ空間について

中川 征樹 (岡山大学教育学部)

ホモトピー論シンポジウム 2012 年 11 月 2 日 - 11 月 4 日 (於 山口大学)

概要

$SU = SU(\infty)$, $Sp = Sp(\infty)$, $SO = SO(\infty)$ をそれぞれ無限特殊ユニタリー, シンプレクティック, 特殊直交群とする. SU 上の基点付きループ空間 ΩSU の整数係数ホモロジーのなす Hopf 代数 $H_*(\Omega SU)$ は整数環 $\mathbb{Z}$ 上の対称関数のなす環 Λ と Hopf 代数として同型であり, この同型により, 幾何的に定義されたホモロジー Schubert 類と代数的な対象である Schur 関数 s_λ (λ は分割) が対応していることが知られている. その類似として, Sp および SO 上の基点付きループ空間 ΩSp および $\Omega_0 SO$ (Ω_0 は単位元連結成分) の整数係数ホモロジーのなす Hopf 代数 $H_*(\Omega Sp)$ および $H_*(\Omega_0 SO)$ について, 河野-小島 [3] による $H_*(\Omega Sp)$ の記述を利用することにより, これらがそれぞれ Schur P-および Q-関数のなす環 Γ' および Γ と Hopf 代数として同型であることを位相幾何学の観点から示すことができた. この同型により, 同じくホモロジー Schubert 類と Schur P-関数 P_λ および Q-関数 Q_λ (λ は狭義分割) が対応している.

そこで, この考え方を「一般ホモロジー論」に拡張することを試みる. すなわち, $E^*(\,\cdot\,)$ を複素向き付け可能な一般コホモロジー論, $E_*(\,\cdot\,)$ を対応するホモロジー論とするとき, 河野-小島による $H_*(\Omega Sp)$ の記述および Clarke [1] による K-ホモロジー $K_*(\Omega Sp)$ の記述を基に, E-ホモロジー $E_*(\Omega Sp)$ および $E_*(\Omega_0 SO)$ を $E_*(\Omega SU)$ の中で記述し, これを基に "E-ホモロジー Schur P-および Q-関数のなす環" Γ'^E および Γ^E を定義した. さらに, 池田-成瀬 [2] により導入された "K-理論的 Schur P-関数 GP_λ および Q-関数 GQ_λ" (λ は狭義分割) の構成方法を拡張して, "E-コホモロジー Schur P-関数 P^E_λ および Q-関数 Q^E_λ" とその双対である "E-ホモロジー Schur P-関数 p^E_λ および Q-関数 q^E_λ" を定義した. 構成の仕方より, $E = H$ (常ホモロジー) の場合, $P^H_\lambda = p^H_\lambda = P_\lambda$ (通常の Schur P-関数), $E = K$ (K-理論) の場合, $P^K_\lambda = GP_\lambda$ となっている. また, Lam-Pylyavskyy [4] による "双対安定 Grothendieck 多項式" g_λ (λ は分割) の構成方法を基に, 形式的巾級数 gp_λ および gq_λ (λ は狭義分割) を組合せ論的に構成し, これらが上述の p^K_λ および q^K_λ に一致すると予想している.

講演では, Lie 群上のループ空間を「アフィン Grassmann 多様体」と見なすことにより, 近年, 精力的に研究されている「アフィン シューベルト・カルキュラス」について概観した後, 上述したような, 古典群上のループ空間のホモロジーと対称関数との関係について, これまでに得られている結果を解説する予定である (本研究は成瀬弘氏との共同研究である).

参考文献

[1] F. Clarke, *The K-theory of* $\Omega Sp(n)$, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **32** (1981), 11-22.

[2] T. Ikeda and H. Naruse, *K-theoretic analogue of factorial Schur P- and Q-functions*, arXiv:1112.5223.

[3] A. Kono and K. Kozima, *The space of loops on a symplectic group*, Japanese J. Math. **4** (1978), 461–486.

[4] T. Lam and P. Pylyavskyy, *Combinatorial Hopf algebras and K-homology of Grassmannians*, Int. Math. Res. Not. **2007** (2007), rnm125, 48pages.