Invariant rings and representations of symmetric groups

工藤 翔太郎　福岡大学理学研究科

コンパクト連結 Lie 群 G の極大トーラスを T とすると，分類空間 BG の有理コホモロジーは $H^*(BG;\mathbb{Q}) \cong H^*(BT;\mathbb{Q})^{W(G)}$ である．この表現により Weyl 群 $W(G)$ は reflection 群となり，その invariant ring は多項式環である．局所同型な Lie 群 G と K に対し，Weyl 群 $W(G)$ と $W(K)$ の表現は $\mathbb{Q}$ 上においては同値であるが $\mathbb{Z}$ 上で同値であるとは限らない．たとえば，n 次の対称群 Σ_n と同型である $W(SU(n))$ の表現と $W(PSU(n))$ の表現を比べると互いの dual 表現となっている．射影 $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{F}_p$ により $W(G)$ の $\mathbb{Z}$ 上表現はその modular 表現を与える．$W_{n,d} = W(SU(n)/\mathbb{Z}_d)$, $H^*(BT^n;\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p[t_1, t_2, \cdots, t_n]$ とおくとき, 次の結果が得られたことを報告する．

定理 1
$n = 4, d = 2$ のとき，次が成り立つ．
(1) $H^*(BT^3;\mathbb{F}_2)^{W_{4,2}} = \mathbb{F}_2[x_2, x_4, x_6]$
ただし $x_2 = t_3$，$x_4 = t_1^2 + t_2^2 + t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3$，$x_6 = t_1t_2(t_1 + t_2 + t_3)$.
(2) $H^*(BT^3;\mathbb{F}_2)^{W_{4,2}} \cong H^*(BSU(3) \times BS^1;\mathbb{F}_2)$

定理 2
$n = d = 4$ のとき，次が成り立つ．
(1) $H^*(BT^3;\mathbb{F}_2)^{W_{4,4}} = \mathbb{F}_2[x_2, x_8, x_{12}]$
ただし $x_2 = t_3$，$x_8 = t_1^4 + t_2^4 + t_1^2t_2^2 + t_1^2t_3^2 + t_2^2t_3^2 + t_1^2t_2t_3 + t_1t_2^2t_3 + t_1t_2t_3^2$,
$x_{12} = t_1t_2(t_1 + t_2)(t_1 + t_3)(t_2 + t_3)(t_1 + t_2 + t_3)$
(2) $H^*(BT^3;\mathbb{F}_2)^{W_{4,4}}$ は実現不可能である．

Dwyer-Wilkerson の結果より，$p \geqq 5$ のとき $H^*(BT^{p-1};\mathbb{F}_p)^{W_{p,p}} \cong H^*(BT^{p-1};\mathbb{F}_p)^{W(PSU(p))}$ が多項式環でないことが知られている．$p = 2, 3$ については，少し状況が異なる．

定理 3
次が成り立つ．
(1) $n = 6, 8$ のとき，$H^*(BT^{n-1};\mathbb{F}_2)^{W_{n,n}}$ は多項式環ではない．
(2) $n = 6, 9$ のとき，$H^*(BT^{n-1};\mathbb{F}_3)^{W_{n,n}}$ は多項式環ではない．