

# Unconditional well-posedness of the fifth order KdV equation with periodic boundary condition

加藤 孝盛 京都大学大学院理学研究科

津川 光太郎 名古屋大学大学院多元数理研究科

キーワード：非線形分散型方程式，KdV階層，適切性，無条件一意性

本講演では非線形分散型方程式の代表例である KdV 方程式  $\partial_t u + \partial_x^3 u + \partial_x(u^2) = 0$  をある意味で一般化した KdV 階層の一つである次の 5 次 KdV 方程式に対する初期値問題の適切性 (解の存在, 一意性, 初期値に対する連続依存性) をトーラス  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  上で考える.

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^5 u + \alpha \partial_x(u^3) + \beta \partial_x(\partial_x u)^2 + 2\beta \partial_x(u \partial_x^2 u) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}, \\ u|_{t=0} = u_0 \in H^s(\mathbb{T}). \end{cases} \quad (1)$$

ここで  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  であり, 未知関数  $u$  は実数値関数とする. また Sobolev 空間  $H^s(\mathbb{T})$  は正則性を表す  $s \in \mathbb{R}$  をパラメータを持つ  $L^2$  空間を基礎にしたものである.  $\alpha = -2\beta^2/5$  の場合 (1) は可積分系となるが, 本講演ではこの条件が成立しない場合, つまり (1) は可積分系でない場合も扱うため逆散乱法は機能しないことを注意する.

非線形分散型方程式は波が局在化せず空間全体に広がる分散性と波の集約によりある種の特異性が生じる非線形性という相反する 2 つの性質をあわせ持つ. これらを統一的に扱うことは数学的に難しいため, 各方程式に対して個別の解析が必要になる. 非線形分散型方程式の代表例である KdV 方程式のトーラスにおける適切性に関する結果は非常に多いが, 5 次 KdV 方程式ではの研究はそれほど進んでいない. そこで我々は KdV 方程式に対応するある意味最良な結果を (1) で導くということを考えて. 本研究の最も難しいのは, 非線形項が微分を含むことにより波の集約から引き起こるより強い特異性をどのように解消するかである. これを「微分の損失」とよぶ. まずは KdV 方程式において生じる 1 階の微分の損失を解消した結果を述べる.  $\mathbb{R}$  の場合は, 基本解が振動するとう特徴より従う平滑化効果  $\|\partial_x e^{-t\partial_x^3} u_0\|_{L_x^\infty L_t^2} \leq C \|u_0\|_{L^2}$  によりこの問題は回避できる. 一方トーラス上ではそれがコンパクト集合であるため, このような線形部分から従う平滑化効果は存在しない. そこで有効に機能するのが, Bourgain[2] が提唱した Fourier 制限法である. Bourgain はこの手法により  $s \geq 0$  で時間局所的適切性を導き, それを  $s \geq -1/2$  まで Kenig-Ponce-Vega[3] が拡張した. この指数は逐次近似法を用いる限りでは最良である. これらの結果において解の一意性は連続空間  $C([0, T]; H^s(\mathbb{T}))$  を含むある Banach 空間でしか示されていなかったが,  $s \geq 0$  においては Babin-Ilyin-Titi[1] により解の一意性を連続空間全体に拡張できることがわかった. これを無条件一意性とよぶ. また  $s < 0$  の場合は解を超関数の意味で定義することができないため, この結果はある意味最良ということができる. ここで KdV 方程式の微分の損失は 1 階であるのに対して, (1) のそれは 3 階でありそれを解消することは難しいことを注意する. 実際に Fourier 制限法で回復できる微分は高々 2 階であるため, KdV 方程式の場合とは異なりこの手法を適用することはできない. しかし, 上述の結果は非線形項を線形の解の近似とみなす摂動法に大きく依存している. そこで我々は (1) の非線形項の構造を反映した手法を構築することを考える. 特に (1) は

$$E_0(u(t)) := \int_{\mathbb{T}} u(t) dx = E_0(u_0), \quad E_1(u(t)) := \int_{\mathbb{T}} u^2(t) dx = E_1(u_0)$$

という保存量を持つことから、その非線形項は豊富な対称性を有することが期待できる。実際に非線形項の代数的構造を引き出すことにより、対称性から強い非線形相互作用が相殺されることがわかり次の結果を得た。

**定理 1.**  $s \geq 1$  とする。このとき任意の  $u_0 \in H^s(\mathbb{T})$  に対して、以下を満たす  $T = T(\|u_0\|_{H^s}) > 0$  が存在する。(1) の解  $u \in C([0, T]; H^s(\mathbb{T}))$  が一意に存在し、解写像  $H^s(\mathbb{T}) \ni u_0 \mapsto u \in C([0, T]; H^s(\mathbb{T}))$  は連続である。

**注意.** 本証明では Sobolev の埋め込みのみで非線形評価が閉じるため、無条件一意性も時間局所適切性と同時に証明できる。これは KdV 方程式を扱った Babin らの結果 [1] に対応する。また  $\alpha = -2\beta^2/5$  の場合は、 $\int_{\mathbb{T}} (\partial_x u)^2(t) + \frac{2}{5}\beta u^3(t) dx$  が保存されるため、容易に  $s \geq 1$  において定理 1 で構成した局所解を時間大域的に延長することができる。

(証明のアイデア) 本証明において鍵になるのは、振動の速い波が互いの相互作用になり相殺され平滑化効果が失われる共鳴部分における 3 階の微分の損失を非線形項の対称性を用いて相殺させることである。実際に  $E_0$  と  $E_1$  のという 2 つの保存量を用いることにより、(1) を次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} & \partial_t u - \partial_x^5 u + 2\beta E_0(u_0) \partial_x^3 u + \left\{ 3\alpha E_1(u_0) + \frac{4}{5}\beta^2 (E_1(u_0) - E_0(u_0)^2) \right\} \partial_x u \\ & = -3\alpha \left( u^2 - \int_{\mathbb{T}} u^2 dx \right) \partial_x u \end{aligned} \quad (2)$$

$$- \beta \partial_x \left\{ \partial_x \left( u - \int_{\mathbb{T}} u dx \right)^2 \right\} - 2\beta \partial_x \left\{ \left( u - \int_{\mathbb{T}} u dx \right) \partial_x^2 \left( u - \int_{\mathbb{T}} u dx \right) \right\} \quad (3)$$

$$+ \frac{4}{5}\beta^2 \left\{ \int_{\mathbb{T}} u^2 dx - \left( \int_{\mathbb{T}} u dx \right)^2 \right\} \partial_x u. \quad (4)$$

(4) は共鳴部分であるが、(2) と (3) は共鳴部分を取り除いた非共鳴部分であり、その上では振動項がある程度大きいことがわかるため平滑化効果が期待できる。そこで我々は normal form method を用いることによりその効果を引き出す。normal form method の詳細は講演で述べることにするが、これは時間に関する部分積分に相当し非常に初等的な手法であることを注意しておく。ただし normal form method により回復できる微分は 1 階であるため、これを 3 回反復する必要がある。その各ステップで共鳴部分が現れるのだが、それは対称性を用いることにより (4) と相殺されることが分かる。このように一見強い特異性を持つ方程式も非線形項の代数的構造を捉えることにより、Sobolev の埋め込みや normal form method という初等的な道具を用いるだけである意味最良の結果を示すことができる点が面白い。また上述の議論と Fourier 制限法を組み合わせることによって KdV 方程式の場合の Kenig らの結果 [3] に対応する次の定理を証明することができる (ただし、無条件一意性は失われる)。

**定理 2.**  $s \geq 1/2$  とする。このとき任意の  $u_0 \in H^s(\mathbb{T})$  に対して、 $T = T(\|u_0\|_{H^s}) > 0$  が存在しある Banach 空間  $X_T^s \subset C([0, T]; H^s(\mathbb{T}))$  において時間局所的適切性が従う。

## 参考文献

- [1] A. Babin, A. Ilyin, E. Titi, *Comm. Pure. Appl. Math.* **64** (2011), no. 5, 591–648.
- [2] J. Bourgain, *Geom. Funct. Anal.* **3** (1993), no.3, 209–262.
- [3] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), no.2, 573–603.

# 絶対値 $p$ 乗の非線形項を持つシュレディンガー方程式に対する解のライフスパンの評価について

池田 正弘 (大阪大学)\*

## 1. イントロダクション

本講演では、次のゲージ不変性を持たない非線形シュレディンガー方程式 (以下、NLS と書く) の初期値問題に対する爆発解について考察する:

$$i\partial_t u + \Delta u = \lambda |u|^p, \quad (t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

$$u(0, x) = \varepsilon f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.2)$$

ここで  $T > 0$ ,  $1 < p \leq 1 + 2/n$ ,  $u = u(t, x)$  は複素数値の未知関数  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $f \in L^2$  は与えられた複素数値関数である.

方程式 (1.1)-(1.2) に対して様々なソボレフ空間  $H^s$  ( $s \geq 0$ ) での局所適切性が成立することが知られている (see e.g. [3] and the references therein). しかし、大域解の存在についての結果が全くなかった (初期データが十分に小さくても). そこで、最近 [1] で、(1.1)-(1.2) に対する  $L^2$ -爆発解が構成された. 構成のためには、初期データの形状を上手く選ぶ必要があるが、大きさはどんなに小さくてもよい. そこで、次に問題になるのは「解がいつ爆発するのか?」すなわち「解のライフスパンの評価」である. [1] では、背理法が用いられていたため、爆発解の性質 (ライフスパンの評価、爆発解の爆発速度等) はわからなかった. そこで、今回、劣臨界 ( $1 < p < 1 + 2/n$ ) の場合に爆発解のライフスパンの上からの評価を与えることができたのでその結果を紹介する.

## 2. 主結果

まず、次の積分方程式の局所解の存在の結果を思い出す:

$$u(t) = \varepsilon U(t) f - i\lambda \int_0^t U(t-s) |u|^p ds \quad (2.1)$$

これは (1.1)-(1.2) に対応している. ここで、 $U(t) = \exp(it\Delta)$  はシュレディンガーの自由発展群である.

**Proposition 2.1 (Tsutsumi [3])** Let  $1 < p < 1 + 4/n$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\varepsilon \geq 0$  and  $f \in L^2$ . Then there exist a positive time  $T = T(\|f\|_{L^2}, \varepsilon) > 0$  and a unique solution  $u \in C([0, T); L^2) \cap L_t^r(0, T; L_x^\rho)$  of (2.1), where  $r, \rho$  are defined by  $\rho = p + 1$  and  $2/r = n/2 - n/\rho$ .

上で得られた解  $u$  は“ $L^2$ -solution”と呼ばれている. さらに上の結果から、ライフスパンの下からの評価が従う.  $T_\varepsilon$  を局所  $L^2$ -解の最大存在時間 (ライフスパン) とする:

$$T_\varepsilon \equiv \sup \{T \in (0, \infty]; \text{ there exists the unique solution } u \text{ to (2.1) such that } u \in C([0, T); L^2) \cap L_t^r(0, T; L_x^\rho)\},$$

このとき、次が従う.

キーワード: NLS, small data blow-up, ライフスパン

\* 〒560-0043 大阪府豊中市待兼山町1番 大阪大学大学院理学研究科  
e-mail: m-ikeda@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

**Corollary 2.2** Under the same assumptions as in Proposition [3], the estimate is valid

$$T_\varepsilon \geq C\varepsilon^{1/\theta},$$

where  $\theta = n/4 - 1/(p-1)$  and  $C$  is dependent only on  $n, p$  and  $\|f\|_{L^2}$ .

次に [1] で得られた小さな初期値に対する爆発解の結果を紹介する . 簡単のため ,  $\lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda$ ,  $\lambda_2 = \operatorname{Im} \lambda$ ,  $f_1 = \operatorname{Re} f$ ,  $f_2 = \operatorname{Im} f$  と表す .

初期データに次の形状に関する仮定をする:

$$“f_1 \in L^1, \lambda_2 \int_{\mathbb{R}^n} f_1(x) dx > 0” \text{ or } “f_2 \in L^1, \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^n} f_2(x) dx < 0”. \quad (2.2)$$

このとき , 次が得られている:

**Proposition 2.3 (Ikeda and Wakasugi [1])** Let  $1 < p \leq 1 + 2/n$ ,  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $\varepsilon > 0$  and  $f \in L^2$ . If the initial data  $f$  satisfies (2.2), then  $T_\varepsilon < \infty$ . Moreover, we have

$$\lim_{t \rightarrow T_\varepsilon - 0} \|u(t)\|_{L^2} = \infty. \quad (2.3)$$

**Remark 2.1 (Remark 2.2)** 上記の結果は論文 [4] に基づいた背理法を用いているので , ライフスパンの評価は得られていない .

次に本講演の主結果を紹介する . 初期データに更なる仮定を置く:

$$\lambda_2 f_1(x) \text{ or } -\lambda_1 f_2(x) \geq \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ |x|^{-k}, & |x| > 1, \end{cases} \quad (2.4)$$

ここで ,  $n < k < 2/(p-1)$ . また , 右辺の関数は  $L^1 \cap L^2$  に属することに注意する . このとき , 次を得た:

**Theorem 2.4** Let  $1 < p < 1 + 2/n$ ,  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $\varepsilon > 0$  and  $f \in L^2$ . If  $f$  satisfies (2.4), then there exists a positive constant  $C$  dependent only on  $k, p, \lambda$  such that  $T_\varepsilon \leq C\varepsilon^{1/\omega}$ , where  $\omega \equiv k/2 - 1/(p-1)$ .

主結果の証明は放物型方程式に対するライフスパンの評価 [2] のアイデアを参考にした . ただ , シュレディンガーの解はそれらの解と異なる関数空間と相性が良いので , [2] の結果から直接我々の結果が従うものではない .

最後に ,  $p = 1 + 2/n$  の場合のライフスパンの評価や  $1 < p < 1 + 2/n$  の場合のライフスパンの最適性については今のところ分かっていない . また ,  $p \geq p_s$  ( $p_s$ : ストラウス臨界冪) の場合には , 小さなデータに対する大域解の存在が知られている (see [?]), ただ ,  $1 + 2/n < p \leq p_s$  の間にどうなっているのかは依然未解決である .

## 参考文献

- [1] M. Ikeda and Y. Wakasugi, *Small data blow-up of  $L^2$ -solution for the nonlinear Schrödinger equation without gauge invariance*, arXiv:1111.0178.
- [2] H. J. Kuiper, *Life span of nonnegative solutions to certain quasilinear parabolic cauchy problems*, Electronic J. Diff. Eqs., **2003** (2003), 1-11.
- [3] Y. Tsutsumi,  *$L^2$ -solutions for nonlinear Schrödinger equations and nonlinear groups*. Funkcialaj Ekvacioj, **30** (1987), 115-125.
- [4] Qi S. Zhang, *A blow-up result for a nonlinear wave equation with damping: The critical case*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **333** (2001), 109-114.

# A Generalisation of Quasi-compactness and Its Applications

中野 雄史 京都大学人間・環境学研究科 D2

キーワード：エルゴード性，相関関数，転移作用素，擬コンパクト性，リャプノフ指数

本講演の目的は以下の Ionescu-Tulcea-Marinescu の定理 ([1]) の紹介とその一般化，およびにそのエルゴード理論への応用の説明である。

**定理 1.**  $(E, \|\cdot\|)$  を Banach 空間とし， $|\cdot|$  を  $E$  のノルムで  $|\cdot| \leq \|\cdot\|$  であって， $\|\cdot\|$  による単位球が  $|\cdot|$  の位相で相対コンパクトであるものとする． $E$  上の有界線形作用素  $L$  について，以下の Lasota-Yorke 型不等式が成立すると仮定する：定数  $C_1, C_2 > 0, 0 < \lambda < 1$  が存在して，任意の  $x \in E$  およびに  $n \geq 1$  について，

$$\|L^n x\| \leq C_1 \lambda^n \|x\| + C_2 |x| \quad (0.1)$$

が成り立つ．このとき， $L$  は擬コンパクト性を持つ．つまり， $L$  のスペクトル半径より真に小さい  $r_e$  が存在して，絶対値が  $r_e$  より大きいスペクトルは有限個かつすべて固有値であり，その重複度もすべて有限である．

この定理は以下に見るようにエルゴード理論において基本的な役割を果たしている．コンパクトで滑らかなリーマン多様体  $X$  上の力学系  $f : X \rightarrow X$  について，以下の相関関数の指数的減衰と呼ばれる性質が成り立つかがエルゴード理論における大きな問題として存在する： $X$  上の確率測度  $\mu_0$  およびに定数  $C > 0, 0 < \rho < 1$  が存在して，任意の  $\varphi, \psi \in L^1(m)$  ( $m$  : Lebesgue 確率測度) およびに  $n \geq 1$  について，

$$\left| \int \varphi \circ f^n \cdot \psi d\mu_0 - \int \varphi d\mu_0 \int \psi d\mu_0 \right| \leq C \rho^n \|\varphi\|_{L^1(m)} \|\psi\|_{L^1(m)} \quad (0.2)$$

が成り立つ．(0.2) が成り立てば， $(f, \mu_0)$  はエルゴード的であり，中心極限定理を満たす．

この問題と擬コンパクト性の関係は以下のようになる．転移作用素  $M_f : L^1(m) \rightarrow L^1(m)$  を  $f_* : L^\infty(m) \rightarrow L^\infty(m)$ ,  $\varphi \mapsto \varphi \circ f$  の共役作用素として定義する．このとき，詳細は省くが形式的な”射影分解”を用いた簡単な計算により， $M_f$  が擬コンパクト性を持てば (0.2) が得られることがわかる．

$f$  の力学系的性質 (e.g. 双曲性)

⇒  $M_f$  が Lasota-Yorke 型不等式 (0.1) を満たす

⇒  $M_f$  が擬コンパクト性を持つ (定理 1 より)

⇒ 力学系  $f$  が性質 (0.2) を満たす．

本講演では性質 (0.2) がランダムな微小摂動下でも成立するかという問題を考える．このとき (0.1) に対応する不等式は比較的簡単に得られるものの，転移作用素  $M_f$  に対応する作用素の擬コンパクト性を期待することは一般には不可能となる．そこで，無限次元リャプノフ指数を用いて擬コンパクト性を一般化した概念を導入し，これについて定理 1 に対応する定理が成立することを説明する．

## 参考文献

- [1] C. T. Ionescu Tulcea and G. Marinescu, Théorie ergodique pour des classes d'opérations non complètement continues, *Ann. of Math. (2)*, **52** (1950) 140-147.

# 完全 WKB 解析における標準形について

廣瀬 三平 京都大学数理解析研究所 D3

キーワード：完全 WKB 解析, ホロノミック系, 変換論

WKB 法とは, 大きなパラメータを持つ微分方程式に対して構成される WKB 解と呼ばれる解を用いた方程式の解析手法である. この WKB 解は一般には収束しないため, 形式解, あるいは近似解として扱われてきた. 完全 WKB 解析とは, WKB 解を Borel 総和法によって意味付け解析的に完全に扱う手法であり, 解の大域的性質, 例えば 2 階の Fuchs 型方程式のモノドロミー群の計算など, に極めて有効な手法である. 完全 WKB 解析は 1 次元の (定常)Schrödinger 方程式, つまり 2 階の線型常微分方程式から始まり, 高階の線型常微分方程式や非線型常微分方程式への拡張が議論されているがホロノミック系 (偏微分方程式系) への拡張はまだ未整備である.

一方, 完全 WKB 解析では変わり点と呼ばれる点の近傍での標準形への変換論が重要な役割を果たす. 例えば 2 階の線型常微分方程式

$$\left( \eta^{-2} \frac{d^2}{dx^2} - Q(x) \right) \psi = 0$$

が  $x = 0$  に単純変わり点, つまり  $Q(x)$  の一位の零点, を持つ場合には, Airy 方程式

$$\left( \eta^{-2} \frac{d^2}{dx^2} - x \right) \psi = 0$$

への (WKB 解析的な) 変換が構成される. この標準形への変換論は変わり点での局所的であるが, 変わり点から出る Stokes 曲線との幾何の構造と組み合わせることにより, 解の大域的性質を調べることが出来る.

本講演では, 常微分方程式に対する完全 WKB 解析から始め, 次の 2 変数の可積分な方程式系に対する完全 WKB 解析について解説する.

$$\begin{cases} \eta^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} \Psi = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \eta^{-n} P_n(x) \right) \Psi, \\ \eta^{-1} \frac{\partial}{\partial x_2} \Psi = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \eta^{-n} Q_n(x) \right) \Psi \end{cases}$$

ここで  $P_n(x), Q_n(x)$  は正則函数を成分に持つ行列である. 特に, 方程式系の変わり点の集合 (これは  $\mathbb{C}^2$  内の解析的集合となる) の特異点の近傍での標準形について述べる.

## 参考文献

- [1] 青木貴史, ホロノミー系の完全 WKB 解析に向けて, 数理解析研究所講究録, 1433, 2005, pp. 1-8.
- [2] 青木貴史, 河合隆裕, 竹井義次, 特異摂動の代数解析学 — exact WKB analysis について —, 数学, 45, 1993, pp. 299-315.
- [3] 河合隆裕, 竹井義次, 特異摂動の代数解析学, 岩波講座 現代数学の展開, 岩波書店, 1998.
- [4] 竹井義次, 完全 WKB 解析, そして完全最急降下法 — 特異摂動の代数解析学続論 —, 数学, 55, 2003, pp. 350-367.

# Teichmüller 空間の双正則自己同型について (宮地秀樹氏との共同研究)

嶺山良介 大阪大学大学院理学研究科 D2

キーワード：点列, ネット収束, 超強位相, 超弱位相, レゾルベント収束

この講演の目標は解析的に有限な Riemann 面を底空間とする Teichmüller 空間の双正則自己同型を特徴づける, H. Royden, C. Earle, I. Kra, and V. Markovic による次の定理の別証明を彼らとは異なるアプローチで与えることである. (cf.[1],[2],[4])

**定理 1** (Royden, Earle, Kra, Markovic).  $T_{g,n}$  を解析的に有限なタイプ  $(g, n)$  の Riemann 面の Teichmüller 空間とする.  $3g - 3 + n > 2$  かつ  $(g, n) \neq (1, 2)$  の場合,  $T_{g,n}$  の任意の双正則自己同型はタイプ  $(g, n)$  の曲面の向きを保つ位相同型から誘導される. 加えて, もし  $(g, n) \neq (2, 0)$  ならば  $T_{g,n}$  の正則自己同型群はタイプ  $(g, n)$  の曲面の写像類群と同型である.

## ● 用語の定義

Riemann 面  $X$  に対する Teichmüller 空間  $T(X)$  は標識つき Riemann 面  $(Y, f)$  の Teichmüller 同値類の空間として定義される. ここで標識付き Riemann 面とは Riemann 面  $Y$  と写像  $f$  の組である. ただし  $Y$  は  $X$  と位相同型な Riemann 面であって標識  $f$  は  $X$  から  $Y$  への擬等角写像  $f: X \rightarrow Y$  と呼ばれる特別な位相同型写像である. これは写像の「歪め方」を表す数 (最大歪曲度) が有限であるようなものとして定義される. 2つの標識付き Riemann 面  $(Y_1, f_1), (Y_2, f_2)$  が Teichmüller 同値であるとは, ある等角写像  $h: Y_1 \rightarrow Y_2$  があって, これが  $f_2 \circ f_1^{-1}$  とホモトピックであるときをいう.  $T(X)$  の底曲面とは  $X$  のことを指すことを注意しておく.

Teichmüller 空間  $T(X)$  は等角構造の差を測る自明な距離を備えており, Teichmüller 距離  $d_T$  と呼ばれている. これは

$$d_T(y_1, y_2) = \frac{1}{2} \log \inf \{ K(h) \mid h \text{ は擬等角で } f_2 \circ f_1^{-1} \text{ とホモトピック} \}$$

で定義される. ただしここで  $y_i = (Y_i, f_i)$  ( $i = 1, 2$ ) であり,  $K(h)$  は  $h$  の最大歪曲度である. 擬等角写像の逆写像, 合成もまた擬等角写像である.

Teichmüller 空間は自然な複素構造を備えていて複素多様体であることが知られている. Teichmüller 距離はこの複素構造から定まる距離である Kobayashi 距離と一致する. 従って, Teichmüller 空間上任意の双正則自己同型は Teichmüller 距離に関する等長変換になる.

Riemann 面の写像類群は Riemann 面上の向きを保つ自己位相同型のアイソトピー類のなす群である. 向きを保つ位相同型の作用は Teichmüller 空間の正則写像を誘導することが知られている. 従ってこの逆を示せば定理を得ることができる.

## ● これまでのアプローチ

今までのアプローチについて簡単に振り返る. 定理 1 は H. Royden [4] によって初めて,  $g \geq 2$  かつ  $n = 0$  の場合に「二つの標識付き Riemann 面が Teichmüller 空間の双正則自己同型で一方が一方の像であるとき, それぞれの Riemann 面どうしは等角同値である」ことを示すことにより得られた. Earle と Kra は Royden の議論を一般化することで, Teichmüller 距離の等長写像が (いくつかのタイプ  $(g, n)$  を除いて) 底空間の位相同型を誘導するこ

とを示した. 実際, 与えられた等長写像はほとんど全ての標識つき Riemann 面の組に対する正則二次微分の空間の  $\mathbb{R}$  等長写像を誘導することがわかる. 彼らはこの  $\mathbb{R}$  等長写像を解析して結果を得た. また, ここで除かれた場合に関しても彼らは Royden の定理の拡張を得ている. その後, V.Markovic は Royden の定理を底空間が無限解析的な場合まで拡張した. そこで採用された方法を用いて Earle と Markovic は有限解析的な Riemann 面の Teichmüller 空間の自己同型を特徴づけている. これらは Teichmüller 空間の無限小での振る舞いを調べることによって得られる.

初めに述べたように, Teichmüller 空間の双正則自己同型について上記とは異なるアプローチで特徴付けを行う. まず等長変換がある無限遠境界の位相同型に拡張することを確認する. その後拡張された位相同型が境界の部分集合と見做される, 曲線複体の単体的自己同型となることを用いて, この単体的自己同型が向きを保つ位相同型から誘導されていることを示す. ここでの証明は等長写像の無限遠での振る舞いを観察して得られるものであり, 先人たちの方法が無限小の振る舞いを研究するものであったことと比較して本質的に異なっていると言える.

## 参考文献

- [1] C. EARLE AND I. KRA, On isometries between Teichmüller spaces, *Duke Math. J.* **41** (1974), 583–591.
- [2] C. EARLE AND V. MARKOVIC, Isometries between the spaces of  $L^1$  holomorphic quadratic differentials on Riemann surfaces of finite type, *Duke Math. J.* **120** (2003), no. 2, 433–440.
- [3] R.MINEYAMA AND H.MIYACHI, A Characterization of Biholomorphic Automorphisms of Teichmüller Space, To appear in *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*
- [4] H. ROYDEN, Automorphisms and isometries of Teichmüller space, *Advances in the Theory of Riemann Surfaces*, Ann. of Math. Studies **66**, (Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1971), pp. 369–383.



# 作用素環と距離空間の幾何学

酒匂宏樹 京都大学数理解析研究所 日本学術振興会特別研究員 (PD)

キーワード：作用素環, 距離空間, 従順性

私の専門は作用素環論です. 作用素環論の研究対象はヒルベルト空間上の線形作用素からなるバナッハ空間です. 研究を進めるなかで作用素環と距離空間との関連に関心を持つようになりました. 関数解析と幾何学的対象がどのようなつながりを持つのか疑問に思われるかもしれません. 本講演ではその点について解説したいと思います.

作用素環論ではいろいろな場面で“従順性”という言葉がキーワードとして現れます. 距離空間と関連するのもまさに“従順性”においてです. 従順性はもともと群について定められた性質ですので, まずはそこから説明したいとおもいます.

**定義 1.** 離散群  $G$  が従順であるとは以下の三条件を満たす線形汎関数  $\phi: \ell_\infty G \rightarrow \mathbb{C}$  が存在することである: (1)  $f \geq 0$  のときは  $\phi(f) \geq 0$ , (2)  $\phi(1_G) = 1$ , (3)  $\phi(l_g f) = \phi(f)$ , ただし  $l_g f$  は関数  $f \in \ell_\infty X$  の  $g \in G$  による左シフト.

従順であるとは有界関数  $f \in \ell_\infty X$  について何か平均のようなものが取れて, それが左シフトで変化しないということです. 従順な群の代表例は整数群などの可換群です. 自由群や  $SL(3, \mathbb{Z})$  は従順ではありません. 従順性にはたくさんの特徴づけがあり, 中には上の定義と似ても似つかないものがあります. 従順性が数学のさまざまな対象をつなぐ可能性があるといえるでしょう. ここでは Følner 集合による特徴づけを紹介したいと思います. 無限離散群  $G$  をひとつとってきましょう. 話を簡単にするために  $G$  が有限生成であると仮定し,  $S = S^{-1} \subset G$  を有限な生成集合であるとします.

**定理 2.** 群  $G$  が従順であるための必要十分条件は任意の正の数  $\epsilon$  に対して, 有限部分集合  $F \subset G$  が存在して  $\#(SF \cup F) < (1 + \epsilon)\#(F)$  が成り立つことである.

この定理の意味を知るためには群自体を幾何学的対象として捕らえる必要があります. 群  $G$  の上に次の式で距離を入れることができます:  $d(x, y) = \min\{n \in \mathbb{N}: xy^{-1} \in S^n\}$ . 距離空間  $(G, d)$  の部分集合  $F \subset G$  に注目してみましょう. 部分集合  $F$  の距離 1 についての近傍  $N_1(F)$  は  $SF \cup F$  と一致します. 定理の不等式は  $F$  を距離 1 の分だけ大きくしても元の個数がほとんど変わらないことを意味します. 境界の小さな部分集合  $F \subset G$  は Følner 集合と呼ばれ, 定理で与えられている条件は Følner 条件と呼ばれています.

群については興味深い言い換えがみつかりました. これでめでたし, といいたいところですがちょっとした疑問が浮かんできます. Følner 条件は距離の言葉を使うことで自然に解釈することができました. それでは距離空間に対する Følner 条件を定義することができるのでしょうか.

**問題 3.** 距離空間に対して適切な Følner 条件を定義せよ.

この問いに答えるためには定理 2 の “ $SF \cup F$ ” をそのまま “ $N_1(F)$ ” に置き換えればよいと思われるかもしれませんが, しかしそれではうまくいきません. 従順性は定義にあるように大域的性質です. 定理 2 の条件は一見すると局所的性質におもえますがそれは見せかけに過ぎず, 実際には空間の大規模構造にかかわる性質です. その心を知らずに距離空間の言葉に翻訳してもうまくいきません. 定理 2 の条件が本当に意味していることは何でしょうか. 群に Følner 集合  $F$  が存在したと仮定します. すると右シフト  $\{Fg\}_{g \in G}$  もすべ

て Følner 集合です. このように空間に対称性がある場合は, 境界の小さな集合がひとつでも存在すれば, それが遍在していることがわかります. Følner 集合がどこにでもあるという大規模構造こそが真の Følner 性質です.

どうやら Følner 集合があちこちに存在するということを定式化すれば, 距離空間に対しての適切な Følner 条件を与えられそうです. Brodzki–Niblo–Špakula–Willett–Wright によって与えられた一様局所従順性がその答えを与えているように私には思えます. 話の筋をわかりやすくするため, 連結局所有限な無限グラフの頂点集合  $X$  のみを考えることにしましょう. 辺の長さを 1 と定めることで距離が導入されます.

**定義 4.** 空間  $X$  が一様局所従順であるとは任意の (小さな) 正数  $\epsilon$  に対して (大きな) 距離  $S$  が存在して次の条件を満たすことである:  $X$  上の任意の有限測度  $w$  に対して  $\text{diam}(F_w) < S$  と  $w(N_1(F_w)) < (1 + \epsilon)w(F_w)$  をみたす部分集合  $F_w \subset X$  が存在する. ここで  $N_1(F_w)$  は距離 1 の閉近傍, すなわち  $F_w$  と連結している頂点全体をあらわす.

集合の大きさを測る手段が集合の濃度から有限測度  $w$  に変わりました. 測度  $w$  は無数に存在します. サポートが偏っているものもあります. 測度  $w$  がどこにあろうと,  $w$  ごとに境界の小さな部分集合が存在するということが定義です. 集合の直径に対する条件も重要です. これがないとどの  $X$  についても上の性質が成り立ってしまいます. 続いて次の問題を考えてみましょう.

**問題 5.** 距離空間の Følner 条件 (一様局所従順性) を関数解析的に言いかえよ.

結論から言いますと Guoliang Yu によって与えられた Property A がその答えをあたえています. 今日は定理 6 の一つ目の条件を Property A の定義として扱いたいと思います.

**定理 6** (Tu, Skandalis–Tu–Yu). 空間  $X$  が **Property A** を持つことと以下の二条件が同値.

- (ヒルベルト空間による表現可能性) 任意の (小さな) 正の数  $\epsilon$  に対して, ヒルベルト空間の単位球面への写像  $\eta: X \rightarrow \mathcal{H}$  および (大きな) 距離  $S$  があり, 次を満たす:  $\|\eta(x) - \eta(y)\| < \epsilon$  ( $d(x, y) \leq 1$ ),  $\langle \eta(x), \eta(y) \rangle = 0$  ( $d(x, y) > S$ ).
- (作用素環の核型性) 空間  $X$  から作られる作用素環  $C_u^*(X)$  が核型である.

ここで 2 番目の条件に注目しましょう. 作用素環  $C_u^*(X)$  の元はヒルベルト空間  $\ell_2 X$  に作用する線形作用素です. その環は以下で定義されています.

**定義 7.** 有界な  $\ell_2 X$  上の線形作用素  $a$  の *propagation* が  $R$  以下であるとは, 距離が  $R$  よりも大きな  $X$  上の二点  $x, y$  について  $\langle a\delta_x, \delta_y \rangle = 0$  が成り立つことである. *propagation* が有限な作用素をすべて集めた複素代数を  $\mathcal{A}_\infty(X)$  とおく.  $C^*$ -環  $C_u^*(X)$  を  $\mathcal{A}_\infty(X)$  の作用素ノルムによる閉包によって定め, 一様 Roe 環と名づける.

*propagation* とはいったいどのような量でしょうか. 定義中の作用素  $a$  をとってきます. 像  $a\delta_x$  の台は  $\delta_x$  の影響が及ぶ範囲と解釈することができます. 作用素  $a$  の *propagation* が有限であるとはつまり,  $a$  が離れた二点間の関係を与えないということを意味します. *propagation* が 0 である作用素全体は  $\ell_2 X$  上の対角作用素全体であり,  $\ell_\infty X$  と同型です. 一様 Roe 環は  $\ell_\infty X$  と  $X$  の大規模構造の情報を併せ持っているといえます. ここに  $X$  の従順性にかかわる何らかのデータがこめられていると期待するのは自然です. その直感は次の定理によって正当化されます. これが私の講演の目標です.

**定理 8.** 一様に局所有限な距離空間  $X$  について一様局所従順性と *Property A* は同値.

# Asymptotic theory of characters of $U(M_{2^\infty})$

榎本 拓実 京都大学大学院理学研究科 M2

キーワード：無限次元ユニタリ群, 因子表現, 指標, *ergodic method*

表現論における基本的な問題の一つに、「既約表現の決定」がある。コンパクト群, 局所コンパクト群におけるこの問題は一般論としては解決したと考えても良いだろう。それでは局所コンパクトですらない群でこの問題を考えることをできないか? 少なくとも Haar 測度に基づく解析は原理的に不可能である (Weil の逆定理)。このような群の例として,

$$U(n) \rightarrow U(n+1), \quad u \mapsto \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$U(2^n) \rightarrow U(2^{n+1}), \quad u \mapsto \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$$

の帰納極限  $U(\infty)$ ,  $U(2^\infty)$ , より一般にコンパクト群の帰納極限が考えられる。より大きな群の例として, 単位的な作用素環のユニタリ群 (=ユニタリ元全体) なども考えられる。しかしこれらのような巨大な群に対しては既約表現を考えることは難しい。そこで既約表現の代わりに因子表現を考えてみる。

Strătilă-Voiculescu[2] はコンパクト群の帰納極限から AF 環 (Approximately finite dimensional) と呼ばれる  $C^*$ -環を構成し, それぞれの表現論の関係を調べた。Boyer[1] はこの理論を用い,  $U(2^\infty)$  の因子表現の指標を決定した。これによりこの群の (finite な) 因子表現は可算個しかないとわかる:

**Theorem 1** (Boyer, 1993).  $U(2^\infty)$  の *finite* な指標は  $\tau^p \bar{\tau}^q$  ( $p, q$  は非負整数) で与えられる。ここで  $\tau$  は  $M_{2^\infty}$  の (唯一つの) *tracial state*。

一方, Vershik-Kerov[3] は  $S(\infty)$  や  $U(\infty)$  の指標を次の *ergodic method* と呼ばれる方法で決定した:

**Theorem 2** (Vershik-Kerov, 1982). コンパクト群の帰納極限  $\lim G_n$  の因子表現の指標は  $\lim \chi_n$  と書ける。ここで  $\chi_n$  は  $G_n$  の正規化された既約指標。

今回の講演では, この *ergodic method* と, Boyer の定理の別証明について議論する。また時間が許せば, 他の作用素環に由来する群, 例えば unital simple AF 環や unital AT 環のユニタリ群の場合についての考察についても触れたい。

## 参考文献

- [1] R. P. Boyer, *Characters and factor representations of the unitary group of the CAR-algebra*. J. Operator Theory, **30**(1993), 315-328.
- [2] S. Strătilă and D. Voiculescu, *Representation theory of AF-algebras and the group  $U(\infty)$* , Lecture Notes in Math., vol. **486**, Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg and New-York: 1975.
- [3] A. M. Vershik and S. V. Kerov, *Characters and factor representations of the infinite unitary group*. Soviet Math. Dokl., **26**(1982), 570-574.

# 非線形常微分方程式系に対する精度保証付き数値計算

木下武彦 京都大学数理解析研究所

キーワード：常微分方程式, 有限差分法, 精度保証付き数値計算

## 1 はじめに

本講演は [1] で提案された非線形常微分方程式系の初期値問題に対する精度保証付き数値計算方法を紹介する. 精度保証付き数値計算とは, 計算機による近似解と微分方程式の厳密解との誤差が把握出来る計算手法を表す. また, 精度保証という言葉には誤差の把握とは別に, 問題に対する解の存在や一意性を保証するという意味も含まれている. 解の存在や一意性に数学的な関心や意義がある場合は, その立場を強調して数値的検証法もしくは, 計算機援用証明と呼ぶ事もある.

## 2 検証原理

次の非線形常微分方程式系の初期値問題:

$$\begin{cases} u' = f(t, u), & \text{in } J, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (1a)$$

$$(1b)$$

に対する解  $u = (u_1, \dots, u_n)^T \in H^1(J)^n$  に対する精度保証付き数値計算について考える. ここで,  $J := (T_0, T_1) \subset \mathbb{R}$  は有界区間,  $f : J \times L^p(J)^n \rightarrow L^2(J)^n$  を非線形作用素,  $u_0 \in U_0 \subset \mathbb{R}^n$  とする. また,  $f$  は任意の  $v \in H^1(J)^n$  で Fréchet 微分可能で,  $\frac{\partial f}{\partial u}(\cdot, v) \in L^\infty(J)^{n \times n}$  と仮定する.

適当な近似解  $u_k \in H^1(J)^n$  に対して (1a)-(1b) の線形化作用素を  $\mathcal{L}_t := \frac{d}{dt} - \frac{\partial f}{\partial u}(t, u_k)$  と置く. このとき, (1a)-(1b) の解  $u$  の存在と局所一意性は次の3つの条件で得られる.

1.  $\|\mathcal{L}_t^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(J)^n, L^p(J)^n)}$  の評価を行う (e.g., [2]).
2. (1a)-(1b) と同値な不動点方程式  $w = \mathcal{L}_t^{-1}(f(t, u_k + u_s + w) - \frac{\partial f}{\partial u}(t, u_k)w - u'_k - u'_s)$  をみたく  $w \in H^1(J)^n$  の存在条件を Schauder の不動点定理から求める. ここで,  $u_s \in H^1(J)^n$  は初期値の誤差から定義される関数である.
3.  $w$  の右辺が原点近傍で縮小的になる条件を求める.

$w$  は  $u$  と  $u_k + u_s$  との誤差に対応し,  $u_k$  が  $u$  に十分近ければ  $w$  は小さな量であると期待できる. 講演では1から3の検証条件を具体的に求め, 幾つかの検証例を紹介する.

## 参考文献

- [1] Takehiko Kinoshita, Takuma Kimura and Mitsuhiro T. Nakao; A numerical verification method for solutions of initial value problems for ODEs using a linearized inverse operator. *RIMS-Preprints*, **RIMS-1749** (2012).
- [2] Takehiko Kinoshita, Takuma Kimura and Mitsuhiro T. Nakao; A posteriori estimates of inverse operators for initial value problems in linear ordinary differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **236** (2011), no. 6, 1622–1636.

# 円板領域における Lugiato-Lefever 方程式に対する分岐解析

宮路 智行 京都大学数理解析研究所学振研究員  
堤 誉志雄 京都大学数学教室

キーワード：非線形 Schrödinger 方程式，散逸構造，分岐解析，数値的分岐追跡

Lugiato-Lefever 方程式 (LL 方程式) は散逸項，離調項，外力項を伴う三次の非線形 Schrödinger 方程式 (CNLS) である．非線形光学分野において，ある種の光共振器におけるパターン形成を記述するモデル方程式として Lugiato と Lefever により提案された [1]．方程式は以下で与えられる：

$$\partial_t E = -(1 + i\theta) E + ib^2 \Delta E + i|E|^2 E + E_{\text{in}}, \quad x \in \Omega, t > 0, \quad (1)$$

ここで， $\Omega \subset \mathbf{R}^d, x = (x_1, \dots, x_d)^T$  は空間座標であり， $t$  は時刻を表す． $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \dots + \partial_{x_d}^2$  は  $d$  次元ラプラシアンである． $b^2, \theta \in \mathbf{R}$  はそれぞれ回折と離調のパラメータである． $E = E(t, x) \in \mathbf{C}$  はゆっくりと変動する電場の包絡線を表す． $E_{\text{in}} \geq 0$  は空間一様な外力の強さであり，これが主要な制御パラメータである．

力学系の視点から方程式を理解するとき，まず特殊解に着目して楔とすることが多い．すなわち，時間の経過とともに変化しない定常解や，時間周期解である．これらの存在や性質を調べることで，その近くにある初期値に対する解の漸近的な振る舞いを理解する．例えば，(1) は空間一様な定常解を持っている． $E_{\text{in}} = 0$  ならば散逸に抗う力が無いため，初期値問題の解は時間の経過とともに  $E = 0$  へ向かう． $E_{\text{in}} > 0$  とすれば， $E = 0$  はもはや定常解ではないが，何らかの空間一様な定常解が存在する．外力がそれほど大きくなければ，適当な関数空間内でこの定常解に近い初期値から出発した解は時間の経過とともにこれに吸引されていく．外力の大きさがある閾値を越えると，空間一様な定常解は空間非一様な摂動に対して不安定化し，時間が経っても最早この定常解には収束しなくなる．この不安定化に伴い，空間非一様なパターンをもった定常解が現れ，その周囲の初期値から出発した解を吸引する．このように，系に含まれるパラメータの値が変化するとき，それに伴い方程式の解構造に質的な変化が生じることを分岐という．

数値計算を用いた先行研究により，空間 1 次元及び 2 次元における (1) は，あるパラメータ領域において，孤立波状の解をもつことが知られている [2, 3]．図 1 は定常的な孤立波解の例である．

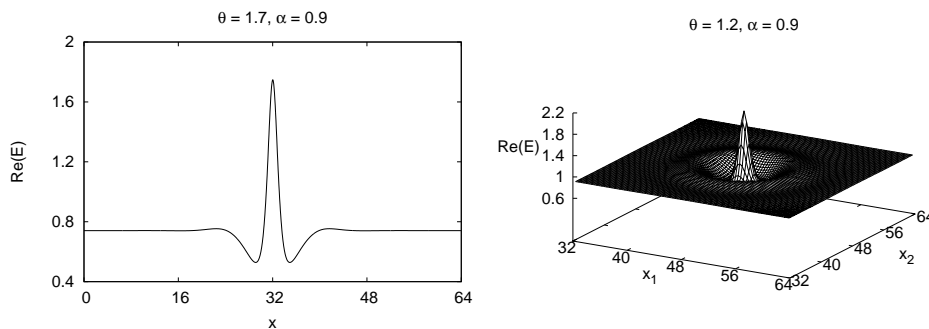


図 1: Stationary solitary waves. (Left)  $\Omega = (0, 64) \subset \mathbf{R}$ ,  $b^2 = 1, \theta = 1.7, E_{\text{in}} \simeq 1.21491$ ; (right)  $\Omega = (0, 96)^2 \subset \mathbf{R}^2, b^2 = 1, \theta = 1.2, E_{\text{in}} \simeq 0.990454$ .

よく知られているように，CNLS は Hamilton 力学系を定め，保存則をもつ．一方，LL 方程式は CNLS の保存則を満たさない．図 1 のような孤立波解は (1) に対する定常解と

して現れる．CNLS の孤立波解は波を空間に広げようとする分散性と集めようとする非線形性の均衡で生じると理解されるが，LL 方程式における孤立波解は，むしろエネルギーの流入と散逸の均衡によって生じる散逸構造の一種であると言える．

$d = 2$  の場合，空間局在的なスポット解の Hopf 分岐により，oscillon と呼ばれる空間局在的かつ時間周期的な解が生じる [2]．我々は (1) を 2 次元円板領域上 Neumann 境界条件下で考え，力学系の縮約理論と数値計算を用いて空間局在的な解の分岐構造を明らかにしたい．空間一様な定常解が二つの異なる回転対称なモードに対して同時に不安定化する分岐点近傍における中心多様体上のベクトル場は以下のような形になる：

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = a_1\nu_1 z_1 + l_1\nu_2 z_1 + q_{20}z_1^2 + q_{11}z_1 z_2 + q_{02}z_2^2 + O(|z|^3), \\ \dot{z}_2 = a_2\nu_1 z_2 + l_2\nu_2 z_2 + r_{20}z_1^2 + r_{11}z_1 z_2 + r_{02}z_2^2 + O(|z|^3), \end{cases} \quad (2)$$

ただし， $(z_1, z_2)^T \in \mathbb{R}^2$  であり， $\nu_1, \nu_2$  はそれぞれ  $E_{in}$  と  $\theta$  のある臨界値からのずれである．(2) を二次の非線形項までで打ち切った系に対して，分岐解析ソフトウェア AUTO07-p[4] を用いて分岐構造を調べた．空間 2 次元における oscillon 解は，パラメータの変化とともに，大域的な分岐により消滅することが知られている [2]．図 2 に示すように，モード間相互作用によってこのような分岐構造が生じることを数値的な分岐解析によって確認した．本講演では，縮約方程式 (2) と (1) に対する数値計算結果を対照する．

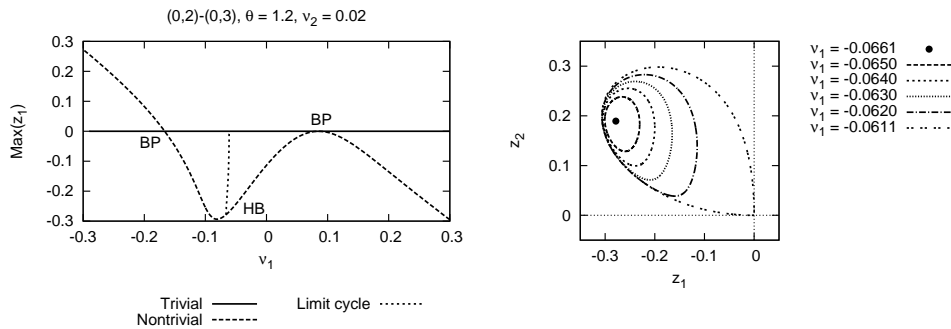


図 2: 左図：  $(0, 2)$ - $(0, 3)$  モード間相互作用による (2) の 1-パラメータ分岐図 ( $\nu_1$  vs.  $\max_t(z_1(t))$ )．右図:  $(z_1, z_2)$  平面上に描いた (2) の極限周期軌道．

## 参考文献

- [1] L. A. Lugiato and R. Lefever, Spatial Dissipative Structures in Passive Optical Systems, *Phys. Rev. Lett.*, **58** (1987), 2209–2211.
- [2] P. Colet, D. Gomila, A. Jacobo and M. A. Matía, Excitability mediated by dissipative solitons in nonlinear optical cavities, *Lect. Notes in Physics*, **751** (2008), 113–135.
- [3] A. J. Scroggie, W. J. Firth, G. S. McDonald, M. Tlidi, R. Lefever and L. A. Lugiato, Pattern formation in a passive kerr cavity, *Chaos, Solitons & Fractals*, **4** (1994), 1323–1354.
- [4] E. J. Doedel and B. E. Oldeman, *AUTO-07P: Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations*, Concordia University, Montreal, Canada, January 2012. <http://cmvl.cs.concordia.ca/auto/>

# べき乗型非線形波動方程式の大域的な古典解について

戌亥 隆恭 京都大学理学研究科数学・数理解析専攻数学系 修士1年

キーワード: 波動方程式, Rauch の定理, Jörgens の定理, Hardy の不等式, Sobolev の不等式

次の波動方程式について考える.

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u + f(u) = 0, & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^3, \\ (u, \partial_t u)|_{t=0} = (u_0, u_1), & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (NLW)$$

ここで  $u(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  は未知関数,  $u_0, u_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  と  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は既知関数とし,  $\Delta := \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i}^2$  はラプラシアンとする. ただし,  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  とする.

このとき次の定理が知られている.  $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  は  $\mathbb{R}^3$  上で定義された  $C^\infty$  級関数で台がコンパクトなもの全体とする.

**定理 1 (Jörgens).**  $f \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $(u_0, u_1) \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^3))^2$  とする. このとき或る  $T > 0$  と  $(NLW)$  の唯一つの局所解  $u \in C^2([0, T) \times \mathbb{R}^3)$  が存在する. 更にこのとき  $T < \infty$  ならば  $\sup_{t < T, x \in \mathbb{R}^3} |u(t, x)| = \infty$  であり,  $T = \sup\{T > 0 \mid u \in C^2([0, T) \times \mathbb{R}^3) \text{ が } (NLW) \text{ の解, } \sup_{t < T, x \in \mathbb{R}^3} |u(t, x)| < \infty\}$  である.

今回はこの定理を用いて非線形項が  $f(u) = u|u|^{p-1}$  の場合の大域解に対する次の Jörgens の定理と Rauch の定理とその証明を紹介する.

**定理 2 (Jörgens).**  $2 < p < 5$  で  $(u_0, u_1) \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^3))^2$  のとき,  $(NLW)$  は大域解をもつ.

**定理 3 (Rauch).**  $p = 5$  で  $(u_0, u_1) \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^3))^2$  のとき, 或る  $\varepsilon > 0$  が存在して  $E(u_0, u_1) < \varepsilon$  ならば  $(NLW)$  は大域解をもつ.

ただし,  $E(u_0, u_1) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\nabla u_0|^2 + |u_1|^2}{2} + \frac{|u_0|^6}{6} dx$  とする.

## 参考文献

- [1] Shatah J. and Struwe M., *Geometric Wave Equations*, (Courant Lecture Notes in Mathematics 2, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, New York, 1998).
- [2] Struwe M., *Semilinear Wave Equations*, Bull. Amer. Math. Soc., Volume **26**, Number **1**, (1992), 53-85.

# Feynman-Kac の公式とその応用例

大木健司 京都大学理学研究科数学・数理解析専攻 修士1回生

キーワード: 確率微分方程式, 伊藤の公式, 拡散過程

次の確率微分方程式

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$$

の解  $X_t$  は Ito diffusion とよばれ, 拡散過程となることが知られている. 確率過程に対する生成作用素  $A$  を

$$Af(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E^x[f(X_h)] - f(x)}{h}$$

で定めると,  $A$  と偏微分作用素の関係が得られる. この関係から Kolmogorov の後退方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= Au + Vu + g, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d \\ u(0, x) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

の解が  $X_t$  を用いて表現できるようになることがわかる. この時の表現を Feynman-Kac の公式と呼ぶ. 今回の SC では Feynman-Kac の公式の導出の概要を紹介し, この公式を用いることで得られる次の定理の証明を行う.

定理 1. (*Levy arcsine law*)

$\{B_t\}_{t \geq 0}$  を 1次元のブラウン運動とし, 確率変数  $L_t^+$  を次で定める. ( $\mathcal{L}$  はルベーグ測度とする)

$$L_t^+ = \mathcal{L}(\{s \in [0, t]; B_s > 0\})$$

この時,  $L_t^+$  の分布関数が次のように求まる.

$$P(L_t^+ \leq \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{x(t-x)}} dx = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{\tau}{t}}$$

## 参考文献

- [1] B.Øksendal, *Stochastic Differential Equations; An Introduction with applications*, 6th edition, (Springer, 2003).
- [2] Hui-Hsiung Kuo, *Introduction to Stochastic Integration*, (Springer, 2006).



# 圧縮性粘性流の初期値問題

坂本 祥太 京都大学人間・環境学研究所

キーワード：粘性保存則、エネルギー法、進行波

一次元圧縮性粘性流の保存則系の方程式の一つとして、Barotropic Model

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ u_t + uu_x + \frac{1}{\rho}(p - \mu u_x)_x = g, \quad p = p(\rho) \end{cases}$$

がある。 $g \equiv 0$  のとき必ず非粘性  $\mu = 0$  の式を考えるのだが、一次元方程式の Riemann 問題

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 \\ u(0, x) = u_0^R(x) = \begin{cases} u_-(x < 0) \\ u_+(x > 0) \end{cases} \end{cases}$$

に対して、エントロピーが減少しない、という状況に合わせ方程式の特殊解として希薄波や衝撃波が現れる。すなわち、 $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  上に特性曲線を描いたとき、空白ができる様な時はそれを埋めて変化する希薄波

$$u^r(t, x) = \begin{cases} u_- & (x < \lambda(u_-)t) \\ \lambda^{-1}(x/t) & (\lambda(u_-)t \leq x \leq \lambda(u_+)) \\ u_+ & (u_+)t < x \end{cases}$$

( $\lambda$  は  $f$  により決まる関数) が、特性曲線が二重になる領域がある場合はその領域を分割する直線の前後で密度や流速が不連続に変化する衝撃波

$$u^s(t, x) = \begin{cases} u_-(x < st) \\ u_+(x > st) \end{cases}$$

( $s$  は  $u_{\pm}$  と  $f$  に依る定数) が特殊解となる。Barotropic Model の変形から、この結果を用いて初めの方程式の特殊解にも希薄波・衝撃波を考えることができる。このとき、 $\mu > 0$  とした粘性方程式では、解がこの希薄波・衝撃波に漸近するという予想を自然に考えることができるが、希薄波に漸近する場合は粘性効果が薄く漸近しやすく、衝撃波への漸近は圧力が強い時未知である。このようにどちらに漸近するかによって漸近に関する結果が変わってしまう。

## 参考文献

- [1] 松村昭孝・西原健二 『非線型微分方程式の大域解 圧縮性粘性流の数学解析』日本評論社、2004.
- [2] 永田雅人 『高速流体力学：圧縮性流体力学の基礎』森北出版、2010.

# 時間遅れフィードバック制御と Floquet 理論

西口 純矢 京都大学大学院理学研究科数学教室 M1

キーワード：時間遅れフィードバック, 遅れ微分方程式, Floquet 理論, 力学系

$n$  次元の常微分方程式

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (1)$$

が不安定な周期軌道  $\Gamma$  を持つときに, (1) に  $K[x(t-\tau) - x(t)]$  を加えて得られる微分方程式

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + K[x(t-\tau) - x(t)] \quad (2)$$

を考え,  $\Gamma$  が (2) の解軌道として安定になるようにすることを時間遅れフィードバック制御という. ここで,  $\tau$  は  $\Gamma$  の周期  $\omega$  の正の整数倍,  $K$  は  $n \times n$  定数行列である. これは Pyragas[1] により提案されたため, Pyragas 制御とも呼ばれる.

Pyragas 制御の特徴は, 必要な情報は安定化させたい周期軌道の周期のみであることである. このため, このような時間遅れ制御は, 物理学, 化学, 生物学, 医学等の実世界の問題に広く用いられ, 大きな成功を収めている.

その一方で, ある種の周期軌道はいかなるフィードバックゲイン  $K$  に対しても安定化できないという制約があると考えられている. 例えば, 1 よりも大きな実 Floquet 乗数を奇数個もつ周期軌道は安定化できないというもの [2] があり, このような制約は odd-number limitation と呼ばれる. ただし, これは subcritical Hopf 分岐の標準形を調べた Fiedler ら [3] によって否定された.

ここでは,  $n = 2$  の場合に  $K$  がスカラー倍として作用する, すなわち  $K = kI$  ( $k$  は実数,  $I$  は単位行列) のときに Pyragas 制御が可能かどうかを調べた結果 [4] を紹介する. これは, フィードバックゲインとして必要な自由度の問題であり, (2) の分岐解析 [3] とも関連がある.

一般に, (2) のように, 時刻  $t$  における変化率が  $t$  よりも前の状態によって決まる微分方程式を遅れ微分方程式という. 時間遅れ  $\tau$  の遅れ微分方程式について, 時刻  $s$  を初期時刻とする初期値問題としては  $[s-\tau, s]$  での情報 (すなわち,  $[-\tau, 0]$  で定義された関数) が必要であり, 時刻  $t$  で  $[t-\tau, t]$  での情報を対応させることで  $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$  上のダイナミクスを定めると考えることができる.

## 参考文献

- [1] K. Pyragas, *Continuous control of chaos by self-controlling feedback*, Phys. Lett. A **170**, 421 (1992)
- [2] H. Nakajima, *On analytical properties of delayed feedback control of chaos*, Phys. Lett. A **232**, 207 (1997)
- [3] B. Fiedler, V. Flunkert, M. Georgi, P. Hövel, E. Schöll, *Refuting the odd-number limitation of time-delayed feedback control*, Phys. Rev. Lett. **98**, 114101 (2007)
- [4] M. Kadowaki, R. Miyazaki, *Delayed Feedback 制御の限界について*, 数理解析研究所講究録 **1445**, 121 (2005)
- [5] J. Hale, S. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, (Springer-Verlag, New York, 1993)

# 直交多項式と量子状態転送

三木 啓司 京都大学情報学研究科/日本学術振興会特別研究員 PD

キーワード：(多変数) 直交多項式, 量子状態転送,  $XX$  スピン鎖

量子情報をノード間で転送することは, 量子コンピュータの設計において基礎的な概念であり, 特にそのノード間のやりとりをデータの損失なしで実現することは非常に重要な問題である [1, 2]. この問題は, 「量子状態をある場所から別の場所へと確率 1 で転送できる状況は実現可能か」という問題と置き換えることができる. 先に述べた状況を完全状態遷移 (Perfect State Transfer) といい, 以降 PST と呼ぶことにする. PST は理論的に観測できることが知られている. 例えば, ハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{N-1} J_{l+1} (\sigma_l^x \sigma_{l+1}^x + \sigma_l^y \sigma_{l+1}^y) + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^N B_l (\sigma_l^z + 1)$$

で与えられる 1 次元の  $XX$  スピン鎖において PST が観測できることが知られている. ここで,  $\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z$  は添え字のサイトにのみ作用する Pauli 行列である. 上記のハミルトニアンは直交多項式を用いて対角化されることが知られており, 直交多項式の理論からモデルの詳細な解析が可能となっている. 例えば対称な Krawtchouk 多項式に対応するモデルが PST を導くことが明らかにされている [3].

ところが, 2 次元以上に関しては PST はおろか詳細に解析可能なモデルすら殆ど知られておらず, 現時点での課題となっているが現状である. そこで, 本発表ではまず詳細な解析が可能となるモデルを提案し, モデル内で PST の有無を理論的に観測を行う. 特に, 直交多項式と  $XX$  スピン鎖の関係に注目し, ある三角型スピン格子上での量子状態転送が観測できることを明らかにする. 詳細については [4] を参照のこと.

## 参考文献

- [1] S. Bose, Quantum communication through an unmodulated spin chain, Phys. Rev. Lett. **91** (2003), 207901
- [2] A. Kay, Perfect, efficient, state transfer and its application as a constructive tool, Int. J. Quantum Inf. **8** (2010), 641-676
- [3] R. Chakrabarti and J. Van der Jeugt, Quantum communication through a spin chain with interaction determined by a Jacobi matrix, J. Phys. A: Math. Theor. **43** (2010), 85302
- [4] H. Miki, S. Tsujimoto, L. Vinet and A. Zhedanov, Quantum-state transfer in a two-dimensional regular spin lattice of triangular shape, Phys. Rev. A **85** (2012), 062306

# 離散戸田格子の超離散化と箱玉系

前田一貴<sup>†</sup> 京都大学大学院情報学研究科 D2

キーワード : (超) 離散可積分系, 箱玉系, 直交多項式

離散戸田格子は, 戸田格子の時間・空間変数を, その可積分性を保つように離散化することで得られる離散可積分系である. 本講演では, 2つの従属変数  $q_n^{(t)}, e_n^{(t)}$  を用いて書ける次の形の離散戸田格子方程式を考える:

$$q_n^{(t+1)} + e_n^{(t+1)} = q_n^{(t)} + e_{n+1}^{(t)}, \quad q_{n-1}^{(t+1)} e_n^{(t+1)} = q_n^{(t)} e_n^{(t)}, \quad n, t \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

ここで,  $t$  は時間変数,  $n$  は空間変数である. 特に半無限格子境界条件, つまり  $n=0$  で格子が切断されて,  $n$  が非負整数の場合のみ  $q_n^{(t)}, e_n^{(t)}$  が値をとる場合を考えると, 離散戸田格子 (1) は Hankel 行列式で書ける解を持つことが知られている. また, この解は直交多項式と密接な関係がある [3].

本講演におけるもう一つの主役が箱玉系である. 箱玉系とは一列に並んだ箱の中をあるルールに従って玉が動いていく力学系であり, ソリトンと同様の振る舞いを示すセルオートマトンとしてよく知られている. その時間発展方程式は次で与えられる:

$$U_n^{(t+1)} = \min \left( 1 - U_n^{(t)}, \sum_{j=-\infty}^{n-1} (U_j^{(t)} - U_j^{(t+1)}) \right), \quad n, t \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

ここで,  $U_n^{(t)} \in \{0, 1\}$  は時刻  $t$  における  $n$  番目の箱に入っている玉の数. 具体的な時間発展の様子は, 例えば次の Web ページでアニメーションを見ることができる.

<http://www-is.amp.i.kyoto-u.ac.jp/lab/kmaeda/svg/bbs/>

なお, 上のページでは周期境界条件を課しているが, 本講演で考えるのは箱が無限に並んでいる場合である.

箱玉系がソリトンのような振る舞いをする理由は, その時間発展方程式 (2) が離散 KdV 方程式から超離散化と呼ばれるある極限操作によって導出できることにある. この操作により解を具体的に与えることができるという意味で, 箱玉系は可積分系である. さらに, 離散戸田格子 (1) に対して超離散化を考えることもでき, そうして得られた系もまた箱玉系を記述する [1, 2]. 本講演では, このような離散戸田格子と箱玉系との関係について説明する.

## 参考文献

- [1] K. Maeda and S. Tsujimoto, *Box-ball systems related to the nonautonomous ultradiscrete Toda equation on the finite lattice*, JSIAM Lett. **2** (2010), 95–98.
- [2] A. Nagai, D. Takahashi, and T. Tokihiro, *Soliton cellular automaton, Toda molecule equation and sorting algorithm*, Phys. Lett. A **255** (1999), 265–271.
- [3] V. Spiridonov and A. Zhedanov, *Discrete Darboux transformations, the discrete-time Toda lattice, and the Askey-Wilson polynomials*, Methods Appl. Anal. **2** (1995), 369–398.

<sup>†</sup>E-mail: kmaeda@amp.i.kyoto-u.ac.jp

# Chern-Simons-Dirac 方程式の適切性について

岡本 葵 京都大学大学院理学研究科数学教室 D2

キーワード：非線型偏微分方程式, 初期値問題の適切性, *Fourier* 制限ノルム

## 1 序

Chern-Simons-Dirac(CSD) 方程式の初期値問題

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho} = -\langle\alpha^\mu\psi, \psi\rangle, \quad (1)$$

$$-i\alpha^\mu\partial_\mu\psi = -m\beta\psi + A_\mu\alpha^\mu\psi, \quad (2)$$

$$\psi(0) = \psi_0 \in H^s(\mathbb{R}^2), \quad A_\mu(0) = a_\mu \in H^r(\mathbb{R}^2) \quad (3)$$

の適切性について考える. ここで,  $A_\mu : \mathbb{R}^{1+2} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\psi : \mathbb{R}^{1+2} \rightarrow \mathbb{C}$  は未知関数であり,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ,  $m \geq 0$  は定数,  $\alpha^\mu$  及び  $\beta$  は  $\alpha^\mu\alpha^\nu + \alpha^\nu\alpha^\mu = 2g_{\mu\nu}I_2$ ,  $\alpha^\mu\beta + \beta\alpha^\mu = 0$  を満たす二次 Hermite 行列,  $I_2$  は二次単位行列,  $\varepsilon^{\mu\nu\rho}$  は完全反対称テンソルを表し,  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$  とする. また, ラテン文字は  $\{1, 2\}$ , ギリシャ文字は  $\{0, 1, 2\}$  の範囲を動くものとし, 繰り返し現れる添え字に関しては, この範囲において和を取るものとする. CSD 方程式は, 超伝導体や分数量子ホール効果を記述する方程式として知られている.

CSD 方程式が持ついくつかの性質について述べる. 最初に, CSD 方程式はゲージ変換と呼ばれる変換により不変である. 即ち,  $(\psi, \{A_\mu\}_{\mu=0,1,2})$  が CSD 方程式を満たすとき,  $\square\chi = 0$  を満たす滑らかな関数  $\chi : \mathbb{R}^{1+2} \rightarrow \mathbb{R}$  に対して,

$$\psi' = \exp(i\chi)\psi, \quad A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\chi \quad (4)$$

なる  $(\psi', \{A'_\mu\}_{\mu=0,1,2})$  も CSD 方程式を満たす. このゲージ不変性により, 初期値が

$$\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1 = -|\psi_0|^2 \quad (5)$$

を満たす (1), (2) の解  $(\psi, \{A_\mu\}_{\mu=0,1,2})$  は方程式  $F_{12} = -|\psi|^2$  を満たす. つまり, (1) は,  $\{A_\mu\}_{\mu=0,1,2}$  に関する二つの条件しか表していない. そのため,  $\{A_\mu\}_{\mu=0,1,2}$  を固定するには何らかの条件を課さなければならない. そこで, 今回は Lorenz ゲージ条件

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (6)$$

を課して考える.

初期値問題 (1)-(3) については, Huh([2]) により,  $s = 5/8$ ,  $r = 1/2$  における時間局所解の存在が示されている. Huh は, 零条件を満たす非線形項が現れるようにポテンシャル  $A_\mu$  を書き直している. ここで, 零条件とは Klainerman('84) により導入された概念であり, 零形式と呼ばれる二次形式  $Q_0(f, g) = \partial_\mu f \partial^\mu g$ ,  $Q_{\alpha\beta}(f, g) = \partial_\alpha f \partial_\beta g - \partial_\alpha g \partial_\beta f$  ( $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2\}$ ) の一次結合で表される時に, 零条件を満たすという. 非線形項が零条件を満たす場合には, 特異性が強く現れる部分が相殺されるため, より低い正則性での適切性が成り立つことが期待される.

## 2 主結果

Lorenz ゲージ条件 (6) を課した場合には、ゲージポテンシャル  $A^\mu$  は次の波動方程式を満たす。

$$\square A^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \langle \alpha_\rho \psi, \psi \rangle. \quad (7)$$

但し、初期値  $A_\mu(0) = a_\mu$ ,  $\partial_t A_\mu(0) = \dot{a}_\mu$  は、次の適合条件を満たすとする。

$$\dot{a}_j = \partial_j a_0 + \varepsilon_{ij} \langle \alpha^i \psi_0, \psi_0 \rangle, \quad \dot{a}_0 = \partial_1 a_1 + \partial_2 a_2, \quad \partial_1 a_2 - \partial_2 a_1 = -|\psi_0|^2. \quad (8)$$

(7) を積分方程式に書き直し、(8) を用いることにより、

$$A^\mu = \cos(t\sqrt{-\Delta})a^\mu + \int_0^t \varepsilon^{\mu\nu\rho} K_\nu(t-s) \langle \alpha_\rho \psi, \psi \rangle(s) ds, \quad (9)$$

$$K_\nu(t) = \begin{cases} \cos(t\sqrt{-\Delta}), & \nu = 0, \\ \sin(t\sqrt{-\Delta}) \frac{\partial_j}{\sqrt{-\Delta}}, & \nu = j \in \{1, 2\} \end{cases}$$

と書き直すことが出来る。更に、ゲージ変換を用いて  $a_0 = \dot{a}_0 = 0$  とすることができるので、(8) より

$$a_0 = \dot{a}_0 = 0, \quad \Delta a_1 = \partial_2 |\psi_0|^2, \quad \Delta a_2 = -\partial_1 |\psi_0|^2, \quad \dot{a}_1 = \langle \alpha_2 \psi_0, \psi_0 \rangle, \quad \dot{a}_2 = -\langle \alpha_1 \psi_0, \psi_0 \rangle$$

となる。つまり、 $A_\mu$  の初期値はすべて  $\psi_0$  から決定される。

(9) を (2) に代入することにより、次の Dirac 方程式に対する初期値問題を考えれば良い：

$$\begin{aligned} (-i\alpha^\mu \partial_\mu + m\beta)\psi &= \cos(t\sqrt{-\Delta}) \varepsilon_{kj} \Delta^{-1} \partial^k |\psi_0|^2 \cdot \alpha_j \psi + \mathcal{N}(\psi, \psi, \psi), \\ \psi(0) &= \psi_0. \end{aligned} \quad (10)$$

但し、

$$\mathcal{N}(\psi_1, \psi_2, \psi_2) = \int_0^t \varepsilon^{\mu\nu\rho} K_\nu(t-s) \langle \alpha_\rho \psi_1, \psi_2 \rangle(s) ds \cdot \alpha_\mu \psi_3.$$

この単独 Dirac 方程式に対して次を得た。

**定理 2.1.**  $s > 1/4$  とする。このとき、初期値問題 (10) は、 $H^s(\mathbb{R}^2)$  において時間局所適切である。つまり、任意の  $\psi_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$  に対して、ある  $T > 0$  及び (10) の解  $\psi \in C((-T, T); H^s(\mathbb{R}^2))$  が存在し、 $C((-T, T); H^s(\mathbb{R}^2))$  のある部分空間において一意である。更に、この解  $\psi$  は、初期値  $\psi_0$  に連続的に依存する。

$\psi$  が求まれば、(1) から  $F_{\mu\nu}$  も定まり、Chern-Simon-Dirac 方程式の適切性が得られる。一階の方程式 (10) の非線形項は、零条件は満たさないけれども、零構造と呼ばれる零形式と似た働きをする特殊な構造が存在する。

定理 2.1 は、Fourier 制限ノルム法や零構造を用いて証明される。本講演では、Fourier 制限ノルムと零構造の関わり、零構造が証明で果たす役割などについて解説する。

## 参考文献

- [1] P. D'Ancona, D. Foschi, and S. Selberg, *Local well-posedness below the charge norm for the Dirac-Klein-Gordon system in two space dimensions*, J. Hyperbolic Differ. Equ. **4** (2007), 295-330.
- [2] H. Huh, *Cauchy problem for the Fermion field equation coupled with the Chern-Simons gauge*, Lett. Math. Phys. **79** (2007), 75-94.

# Small energy scattering for the Klein-Gordon-Zakharov system with radial symmetry

Shuxia Wang    Peking University PhD  
Zihua Guo    Peking University, Lecturer  
Kenji Nakanishi (Kyoto University, Associate Professor)

*Key words: Scattering; Normal form transform; Improved radial Strichartz estimates;  
Contraction mapping*

In this talk, we consider the scattering of the Cauchy problem for the 3D Klein-Gordon-Zakharov system

$$\begin{cases} \ddot{u} - \Delta u + u = nu, \\ \ddot{n}/\alpha^2 - \Delta n = -\Delta u^2, \end{cases} \quad (0.1)$$

with the radial initial data

$$u(0, x) = u_0, \dot{u}(0, x) = u_1, n(0, x) = n_0, \dot{n}(0, x) = n_1, \quad (0.2)$$

where  $(u, n)(t, x) : \mathbb{R}^{1+3} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,

$$(u_0, u_1, n_0, n_1) \in H_r^1(\mathbb{R}^3) \times L_r^2(\mathbb{R}^3) \times L_r^2(\mathbb{R}^3) \times \dot{H}_r^{-1}(\mathbb{R}^3). \quad (0.3)$$

and  $\alpha > 0, \alpha \neq 1$  denotes the ion sound speed.

Inspired by [1], we combine the normal form technique, which was first used in a dispersive PDE context by Shatah [2], and the improved radial Strichartz estimates to prove small energy scattering of (0.1) with radial symmetry.

Our main result is

**Theorem 1.** *If  $(u_0, u_1, n_0, n_1)$  are all radial and small enough in the norm of (0.3), then the solution  $(u, n)$  scatters in this space as  $t \rightarrow \pm\infty$ .*

The main difficulties for the proof of scattering are derivative loss and slow dispersion of the wave equation together with the quadratic nonlinearity. The loss of derivative can be overcome by the normal form transform (under the assumption  $\alpha \neq 1$ , so we have good nonlinear structures mainly due to the different propagation speed.) To handle the quadratic interaction, we have to assume radial symmetry so that we have wider class of Strichartz estimates. The following lemma (improved radial Strichartz estimates) is the other important result of this talk.

**Lemma 2.** *Assume that  $\phi(x), f(t, x)$  are spatially radially symmetric in  $\mathbb{R}^3$ . Then*

(a) *Assume  $(q, r), (\tilde{q}, \tilde{r}) \in [2, \infty]^2$  both satisfy the Schrödinger-admissible condition:*

$$\frac{2}{q} + \frac{5}{r} < \frac{5}{2} \text{ or } (q, r) = (\infty, 2)$$

and  $\tilde{q} > 2$ . Let

$$\beta(q, r) = \begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{3}{r} - \frac{1}{q}, & \frac{1}{q} + \frac{2}{r} < 1 \text{ or } (q, r) = (\infty, 2); \\ \frac{1}{r} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2}, & \frac{1}{q} + \frac{2}{r} > 1 \text{ and } \frac{2}{q} + \frac{5}{r} < \frac{5}{2}; \\ (\frac{1}{2} - \frac{1}{r})_+, & \frac{1}{q} + \frac{2}{r} = 1. \end{cases}$$

where we used the notation  $a+$  to denote  $a + \varepsilon$  for arbitrary fixed  $\varepsilon > 0$ . Then

$$\|K(t)P_{\geq 0}\phi\|_{L_t^q \dot{B}_{r,2}^{-\beta(q,r)}} \lesssim \|\phi\|_{L_x^2}, \quad (0.4)$$

$$\left\| \int_0^t K(t-s)P_{\geq 0}f(s)ds \right\|_{L_t^q \dot{B}_{r,2}^{-\beta(q,r)}} \lesssim \|P_{\geq 0}f\|_{L_t^{\tilde{q}'} \dot{B}_{\tilde{r}',2}^{\beta(\tilde{q},\tilde{r})}}, \quad (0.5)$$

$$\|K(t)P_{< 0}\phi\|_{L_t^q \dot{B}_{r,2}^{\frac{2}{q} + \frac{3}{r} - \frac{3}{2}}} \lesssim \|\phi\|_{L_x^2}, \quad (0.6)$$

$$\left\| \int_0^t K(t-s)P_{< 0}f(s)ds \right\|_{L_t^q \dot{B}_{r,2}^{\frac{2}{q} + \frac{3}{r} - \frac{3}{2}}} \lesssim \|P_{< 0}f\|_{L_t^{\tilde{q}'} \dot{B}_{\tilde{r}',2}^{\frac{3}{2} - \frac{3}{r} - \frac{2}{q}}}. \quad (0.7)$$

(b) if  $(q, r), (\tilde{q}, \tilde{r}) \in [2, \infty]^2$  both satisfy the wave-admissible condition:

$$\frac{1}{q} + \frac{2}{r} < 1 \text{ or } (q, r) = (\infty, 2)$$

and  $\tilde{q} > 2$ , then

$$\|W_\alpha(t)\phi\|_{L_t^q \dot{B}_{r,2}^{\frac{1}{q} + \frac{3}{r} - \frac{3}{2}}} \lesssim \|\phi\|_{L_x^2}, \quad (0.8)$$

$$\left\| \int_0^t W_\alpha(t-s)f(s)ds \right\|_{L_t^q \dot{B}_{r,2}^{\frac{1}{q} + \frac{3}{r} - \frac{3}{2}}} \lesssim \|f\|_{L_t^{\tilde{q}'} \dot{B}_{\tilde{r}',2}^{\frac{3}{2} - \frac{3}{r} - \frac{1}{q}}}. \quad (0.9)$$

By normal form transform, we can get the Duhamel formula of (0.1), which can overcome the derivative loss. Then, by above improved radial Strichartz estimates, we can get the contraction mapping. Scattering follows immediately.

## References

- [1] Z. Guo and K. Nakanishi, Small energy scattering for the Zakharov system with radial symmetry. arXiv:1203.3959v1 [math.AP].
- [2] J. Shatah, Normal forms and quadratic nonlinear Klein-Gordon equations. Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), 685-696.



# Transverse instability for a nonlinear Schrödinger equation

山崎 陽平 京都大学 数学教室 D1

キーワード：非線型偏微分方程式，シュレディンガー方程式，軌道安定性，定在波

本講演では以下のべき乗型の非線形項を持つ Schrödinger 方程式：

$$(NLS) \quad i\partial_t u = -\Delta u - |u|^{p-1}u, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times X,$$

の不安定性について紹介する。ここで、 $p > 1$  かつ  $X = \mathbb{R}$  or  $\mathbb{R} \times \mathbb{T}_L$  とする。ただし、 $\mathbb{R} \times \mathbb{T}_L$  は周期  $2\pi L$  の1次元トーラスとする。今回は主に  $X = \mathbb{R} \times \mathbb{T}_L$  のときの (NLS) の定在波の軌道安定性について考察する。

(NLS) には定在波と呼ばれる解が存在する。(NLS) の非自明解  $u(t, x)$  が周波数  $\omega > 0$  の定在波であるとは  $u(t, x) = e^{i\omega t}\varphi(x)$  と表せるとき言う。定在波には安定性と呼ばれる概念が存在し、多くの波動現象は安定な定在波により記述される。このため、定在波において安定性という概念は重要である。ここで、定在波  $e^{i\omega t}\varphi$  が軌道安定であるとは  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  s.t.  $\|u_0 - \varphi\|_{H^1(X)} < \delta$  となる初期値  $u_0 \in H^1(X)$  を持つ (NLS) の解  $u(t)$  が  $t \in [0, \infty)$  で存在して

$$\sup_{t>0} \inf_{\theta \in \mathbb{R}, x \in X} \|u(t, \cdot) - e^{i\omega t}\varphi(\cdot - x)\|_{H^1(X)} < \varepsilon$$

を満たすとき言う。ここで、 $\|u\|_{H^1(X)}^2 = \int_X |\nabla u|^2 + |u|^2 dx$ 。また、軌道安定でないとき軌道不安定であると言う。軌道安定性という概念は初期値が十分定在波に近い形ならば時間発展させた解もまた定在波に近い形をしていることを表している。

まず、 $X = \mathbb{R}$  のときの先行結果について紹介する。 $\omega > 0$  とし、 $\varphi_\omega$  を

$$-\partial_x^2 \varphi + \omega \varphi - |\varphi|^{p-1} \varphi = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

の正值対称解とする。このとき、 $e^{i\omega t}\varphi_\omega$  は  $X = \mathbb{R}$  上の (NLS) の定在波となる。[1, 2, 3] により、次の結果が示されている。

**Theorem 1.**  $X = \mathbb{R}$  とする。

- (i) もし  $1 < p < 5$  ならば定在波  $e^{i\omega t}\varphi_\omega$  は軌道安定である。
- (ii) もし  $5 \leq p$  ならば定在波  $e^{i\omega t}\varphi_\omega$  は軌道不安定である。

ここで、 $1 < p < 5$  のときを考える。このとき、

$$\psi_\omega(x, y) = \varphi_\omega(x), \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}_L$$

とすると、 $e^{i\omega t}\psi_\omega$  は  $X = \mathbb{R} \times \mathbb{T}_L$  上の (NLS) の定在波となる。 $e^{i\omega t}\varphi_\omega$  は  $X = \mathbb{R}$  上の (NLS) の安定な定在波であるから、 $e^{i\omega t}\psi_\omega$  は  $y \in \mathbb{T}_L$  に関して恒等的な摂動に関しては安定である。しかし、一般の摂動に関しては安定であるとは限らない。ここで、 $y \in \mathbb{T}_L$  に関して恒等的な摂動に関しては安定であるが一般の摂動に関しては不安定であるとき、Transverse instability という。

次に Rousset と Tzvetkov [4, 5] による Transverse instability の先行結果について紹介する。

**Theorem 2.**  $p = 3$ ,  $X = \mathbb{R} \times \mathbb{T}_L$  とする. このとき, もし  $L > \frac{1}{\sqrt{3\omega}}$  ならば定在波  $e^{i\omega t}\psi_\omega$  は軌道不安定である.

また,  $X = \mathbb{R}$  のときと同様な議論により,  $L < \frac{1}{\sqrt{3\omega}}$  のときは軌道安定であることが示せる.

$X = \mathbb{R} \times \mathbb{T}_L$  では  $\Delta$  に関する極限吸収原理が成立しないため,  $X = \mathbb{R}$  と同様な議論では軌道不安定性を示すことができない. そこで, 彼らはまず定在波での線形化方程式のスペクトルを計算し, 不安定方向を探した. そして, 定在波を不安定方向に摂動した解を逐次近似を用いて高次近似を行うことにより軌道不安定性を導いた.

次に主結果について紹介する.

$$L_p = \frac{2}{\sqrt{(p-1)(p+3)}}$$

とする. このとき, 以下の結果を得ることができた.

**Theorem 3.**  $1 < p < 5$ ,  $X = \mathbb{R} \times \mathbb{T}_L$ ,  $\omega > 0$  とする. このとき, 以下が成立する.

- (i) もし  $0 < L < L_p/\sqrt{\omega}$  ならば定在波  $e^{i\omega t}\psi_\omega$  は軌道安定である.
- (ii) もし  $L > L_p/\sqrt{\omega}$  ならば定在波  $e^{i\omega t}\psi_\omega$  は軌道不安定である.

$p$  が奇数でないときは非線形項  $|u|^{p-1}u$  が Fréchet 微分の意味で滑らかでないため, Rousset と Tzvetkov による議論を用いることができない. 高次近似を行うのではなく,  $\mathbb{T}_L$  に関して高い周波数のときと低い周波数のときに分解し, 不安定方向に摂動した解の高周波数部分をその低周波数部分で評価することにより, Fréchet 微分の意味で滑らかでないときの不安定性を示した.

本講演ではこれらの内容について紹介する.

## 参考文献

- [1] H. Berestycki and T. Cazenave, Instabilité des états stationnaires dans les équations de Schrödinger et de Klein-Gordon, non linéaires. C. R. Acad. Sci **293A** (1981), 489-492.
- [2] T. Cazenave and P. L. Lions, Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations, Commun. Math. Phys. **85** (1982), 549-561.
- [3] M. I. Weinstein, Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates, Comm. Math. Phys. **87** (1983), 567-576.
- [4] F. Rousset and N. Tzvetkov, Transverse nonlinear instability of solitary waves for some Hamiltonian PDE's, J. Math. Pures. Appl. **90** (2008) 550-590.
- [5] F. Rousset and N. Tzvetkov, Transverse nonlinear instability for two-dimensional dispersive models, Ann. I. Poincaré-AN **26** (2009) 477-496.

# Critical exponent for the semilinear wave equation with scale invariant damping

若杉 勇太 大阪大学大学院・理学研究科 (D2)

キーワード：消散型波動方程式, 拡散現象

次の半線形消散型波動方程式の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + b(t)u_t = |u|^p, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbf{R}^n, \\ (u, u_t)(0, x) = (u_0, u_1)(x), & x \in \mathbf{R}^n, \end{cases} \quad (\text{DW})$$

ここで,  $u = u(t, x)$  は実数値の未知関数,  $b(t)u_t$  は摩擦項と呼ばれるが, ここでは

$$b(t) = \frac{\mu}{1+t}, \quad \mu > 0$$

を考える. 非線形項の指数  $p$  は,  $1 < p \leq \frac{n}{n-2}$  ( $n \geq 3$ ),  $1 < p < \infty$  ( $n = 1, 2$ ) なる範囲をとるものとする. 初期データ  $(u_0, u_1)$  は  $H^1(\mathbf{R}^n) \times L^2(\mathbf{R}^n)$  に属し, コンパクトな台を持つと仮定する.

目標は, (DW) の臨界指数を決定することである. ここで臨界指数とは, 次のような性質を持つ非線形項の指数  $p_c$  のことをいう:  $p_c < p$  ならば, 小さい初期データに対し時間大域解が存在し, 逆に  $p \leq p_c$  ならば, 適当な条件 (大小によらない) を満たす初期データに対し, 解は有限時間で爆発する.

ここで, 消散型波動方程式の解の拡散現象について説明しておこう. 例として, 時間変数に依存する線形消散型波動方程式

$$u_{tt} - \Delta u + \mu(1+t)^{-\beta}u_t = 0 \quad (\text{DW}_\beta)$$

を考える.  $\mu > 0$  は正定数とする.  $\beta = 0$  のときは, 定数係数の消散型波動方程式であるが, この方程式の解は,  $t \rightarrow +\infty$  のとき対応する熱方程式  $-\Delta \phi + \phi_t = 0$  の解に漸近することが, 西原氏 [3] により示された. Wirth [6] はこの結果を拡張し,  $-1/3 < \beta < 1$  のとき, (DW <sub>$\beta$</sub> ) の解が対応する放物型方程式  $-\Delta \phi + \mu(1+t)^{-\beta}\phi_t = 0$  の解に漸近することを示した. 一方で, Wirth [5] は,  $\beta > 1$  のとき, (DW <sub>$\beta$</sub> ) の解は, 自由波動方程式  $w_{tt} - \Delta w = 0$  の解に漸近することを示した. これより, (DW <sub>$\beta$</sub> ) の解の挙動は,  $\beta = 1$  を境にして大きく異なることが分かる.  $\beta = 1$  の場合は, 解の挙動がより複雑になる. Wirth [4] は  $\mu > 1$  に対し以下の  $L^p - L^q$  評価を示した:

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^q} &\lesssim (1+t)^{\max\{-\frac{n-1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{\mu}{2}, -n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})\}} (\|u_0\|_{H_p^s} + \|u_1\|_{H_p^{s-1}}), \\ \|(u_t, \nabla u)(t)\|_{L^q} &\lesssim (1+t)^{\max\{-\frac{n-1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{\mu}{2}, -n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-1\}} (\|u_0\|_{H_p^{s+1}} + \|u_1\|_{H_p^s}), \end{aligned}$$

ここで,  $1 < p \leq 2$ ,  $1/p + 1/q = 1$ ,  $s = n(1/p - 1/q)$  である. この減衰率を見ると,  $\mu$  の値によって, 解の挙動が変化することが分かる. 粗く言って,  $\mu$  が大きければ, 解は対応する放物型方程式の解のように振る舞い, 逆に  $\mu$  が小さければ, 解は自由波動方程式の解のように振る舞う, と考えられる.

次に半線形項  $|u|^p$  を持った方程式を考えよう. 対応する熱方程式

$$-\Delta \phi + \mu(1+t)^{-\beta}\phi_t = |\phi|^p$$

に対しては、臨界指数が  $\beta$  の値によらず、藤田臨界指数  $p_F(n) = 1 + \frac{2}{n}$  で与えられることが知られている。また波動方程式  $w_{tt} - \Delta w = |w|^p$  に対しては、臨界指数は Strauss 臨界指数  $p_S(n)$  ( $(n-1)p^2 - (n+1) - 2 = 0$  の正根) で与えられることが知られている。線形の解の挙動から考えると、 $\beta < 1$  のときは、 $(DW_\beta)$  の臨界指数は  $p_F$  に一致し、 $\beta > 1$  では  $p_S$  に一致することが予想される。 $\beta < 1$  の場合は Lin-西原-Zhai [2] により肯定的な結果が得られているが、 $\beta > 1$  の場合は未解決である。 $\beta = 1$  の場合は、さらに  $\mu$  の値によって指数が変化することも予想されるが、これに関し以下の結果を得た。

**定理 1.**  $p > p_F$ ,  $0 < \varepsilon < 2n(p - p_F)/(p - 1)$  とする。このとき、ある定数  $\delta > 0$ ,  $\mu_0 > 1$  が存在して以下が成り立つ。 $\mu \geq \mu_0$  かつ  $\|(u_0, u_1)\|_{H^1 \times L^2}$  が十分小さいならば、ただ一つの時間大域解  $u \in C([0, \infty); H^1(\mathbf{R}^n)) \cap C^1([0, \infty); L^2(\mathbf{R}^n))$  が存在し、

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^2} &\leq C_{\mu, \varepsilon} (1+t)^{-n/2+\varepsilon}, \\ \|(u_t, \nabla u)(t)\|_{L^2} &\leq C_{\mu, \varepsilon} (1+t)^{-n/2-1+\varepsilon} \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし、 $C_{\mu, \varepsilon} > 0$  は  $\mu, \varepsilon$  と  $\|(u_0, u_1)\|_{H^1 \times L^2}$  に依存する定数である。

**注意 1.** 上の定理で、 $\mu_0$  は  $\varepsilon$  に依存して決まり、関係は

$$\mu_0 \sim \varepsilon^{-2} \sim (p - p_F)^{-2}$$

で与えられる。従って、 $p$  を  $p_F$  に近くとるには、 $\mu_0$  を十分大きく選ぶ必要がある。

解の爆発については、全ての  $\mu > 0$  に対して結果を得た：

**定理 2.** (i)  $\mu > 1$  とし、

$$1 < p \leq p_F, \quad \int_{\mathbf{R}^n} ((\mu - 1)u_0(x) + u_1(x)) dx > 0$$

と仮定する。このとき、 $(DW)$  の時間大域解は存在しない。

(ii)  $0 < \mu \leq 1$  とし、

$$1 < p \leq 1 + \frac{2}{n + (\mu - 1)}, \quad \int_{\mathbf{R}^n} u_1(x) dx > 0$$

と仮定する。このとき、 $(DW)$  の時間大域解は存在しない。

**注意 2.** 定理 1 と定理 2 (i) から、 $\mu$  が十分大きいときには、 $(DW)$  の臨界指数が  $p_F$  に一致することはほぼ確実である。実際、 $n = 1, 2$  の場合に限っては、最近 D'abbicco [1] により  $\mu \geq n+2$  で肯定的な結果が得られている。また、定理 2 (ii) に現れる指数  $1+2/(n+(\mu-1))$  は、

$$p_F(n) < 1 + \frac{2}{n + (\mu - 1)} < p_S(n)$$

となることを注意しておく。このことは、 $\mu < 1$  のとき、臨界指数は  $p_F$  よりも真に大きくなることを言っている。しかし、時間大域解に関する結果は今のところ全くなく、臨界指数が  $p_S(n)$  に一致するのか、それとも  $\mu$  に依存する値が現れるのかなども全く分かっていない。

[1] M. D'ABBICCO, (2012), arXiv:1211.0731v1.

[2] J. LIN, K. NISHIHARA, J. ZHAI, Discrete Contin. Dyn. Syst., **32** (2012), 4307-4320.

[3] K. NISHIHARA, Math. Z., **244** (2003), 631-649.

[4] J. WIRTH, Math. Meth. Appl. Sci., **27** (2004), 101-124.

[5] J. WIRTH, J. Differential Equations, **222** (2006), 487-514.

[6] J. WIRTH, J. Differential Equations **232** (2007), 74-103.

# 離散トーラス上のランダムウォークと random interlacement

白石大典 京都大学大学院理学研究科数学教室

キーワード：ランダムウォーク、vacant set、random interlacement

一辺の長さが  $N$  の離散トーラスを  $T_N = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d$  とする。 $T_N$  上のシンプルランダムウォークを  $X$  とする。本講演では  $d \geq 3$  の場合に、 $X$  をある適当な時間だけ走らせた後に  $X$  が通過していない点の集合 (vacant set) の形状が、走らせる時間と共にどのように変化していくかについて解説する。

考察するモデルは以下のようなものである。正数  $u > 0$  を取って固定する。 $X$  を時刻  $uN^d$  まで走らせて通過する点の集合を  $X[0, uN^d]$  とする。それまでに通過していない点の集合を  $\mathcal{V}_N^u = T_N \setminus X[0, uN^d]$  によって定義し、これを時刻  $uN^d$  までの vacant set と呼ぶ。 $\mathcal{V}_N^u$  は  $u$  が増大するにつれて減少していくランダムな集合であるが、Benjamini, Sznitman [1] によって十分小さい  $u > 0$  に対して次のことが成立することが証明された：

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(\mathcal{V}_N^u \text{ has a unique connected component whose cardinality } \geq O(N^d)) = 1.$$

すなわち  $u$  が小さければ  $\mathcal{V}_N^u$  は  $T_N$  のサイズと同程度の連結成分を持ち、さらにそのような大きい連結成分はただひとつに限ることが示された。その後、Teixeira, Windisch [3] によって十分大きな  $u$  に対しては  $\mathcal{V}_N^u$  のどの連結成分のサイズも  $(\log N)^{\lambda(u)}$  オーダーとなることが証明された (ここで  $\lambda(u)$  は  $u$  に依存する定数である)。このようにランダムウォークを走らせる時間をコントロールするパラメータ  $u$  に応じて、 $\mathcal{V}_N^u$  の最大連結成分のサイズは相転移を起こしている。このとき次のような問題を考察することは自然である： $\mathcal{V}_N^u$  の最大連結成分を  $O_N^u$  とする。このときある正数  $u^*$  が存在して

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} P(|O_N^u| \geq O(N^d)) &= 1, \text{ for } u < u^*, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} P(|O_N^u| \leq O((\log N)^{\lambda(u)})) &= 1, \text{ for } u > u^* \end{aligned}$$

となるか？すなわち相転移は  $u = u^*$  の前後で起こっているのかという問題である。今のところこの問題は未解決であるが、Sznitman [2] によって random interlacement と呼ばれるこの問題の解決に有効に働く対象が作られた。それはラフな言い方をすれば上記のモデルを  $N \rightarrow \infty$  としたものに対応する object である。

本講演では  $\mathcal{V}_N^u$  と random interlacement の関係について解説したい。

## 参考文献

- [1] I. Benjamini; A-S. Sznitman, *Giant Component and Vacant Set for Random Walk on a Discrete Torus*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 10 (2008), no. 1, 133-172.
- [2] A-S. Sznitman, *Vacant set of random interacements and percolation*, Ann. of Math. (2) 171 (2010), no. 3, 2039-2087.
- [3] A. Teixeira; D. Windisch, *On the fragmentation of a torus by random walk*, Comm. Pure Appl. Math. 64 (2011), no. 12, 1599-1646.

# 数理ファイナンスの理論とその非可換化

琉 佳勳 立命館大学大学院 理工学研究科 基礎理工学専攻 修士2回生

キーワード：正值性, 半正定値

数理ファイナンスは確率論の一分野であるが, その概念の中には経済的な由来を持つものも多い. その中でも重要なものとして裁定取引と呼ばれる概念がある. ラフに言えば, 裁定取引とは必ず儲けられる取引戦略のことを指す. 当然ながら, 数理ファイナンスの中では, この裁定取引という概念が数学の言葉で定義されており, また, 裁定取引が存在しないことを無裁定と定めている. 特に, 無裁定の概念は重要であり, いくつかの同値な条件に言い換えられている.

数理ファイナンスの理論におけるモデルの一例としては, 一度だけ取引が行われ, 証券の種類が  $N$  個あって, 在り得る証券の状態数  $S$  が有限である株式市場のモデルが挙げられる. このモデルでは,

$$\mathbb{R}^N \ni q : \text{a price vector, } M(S, N, \mathbb{R}) \ni D : \text{a dividend matrix, } (q, D) : \text{a market;}$$
$$\mathbb{R}^N \ni \theta : \text{an arbitrage} \iff (-\langle q, \theta \rangle, D\theta) > 0$$

と定義される. このとき, 数理ファイナンスの基本定理と呼ばれる, 次のことが成り立つ.

$$(q, D) : \text{no arbitrage} \iff \mathbb{R}^S \ni \exists \psi \gg 0 \text{ s.t. } q = D^\top \psi.$$

ただし,  $x \in \mathbb{R}^m$  に対し,

$$x > 0 \iff \forall i \in \{1, \dots, m\}, x_i \geq 0 \text{ and } x \neq 0;$$
$$x \gg 0 \iff \forall i \in \{1, \dots, m\}, x_i > 0.$$

上記における半順序関係を半正定値から定まるものに置き換えれば, 様々な違いが生じることが予想される. 現状では数学的玩具に過ぎないが, 上のモデルでいえば,

$$\text{Sym}(N, \mathbb{R}) \ni Q : \text{a price matrix, } M(S, N, \mathbb{R}) \ni D : \text{a dividend matrix, } (Q, D) : \text{a market;}$$
$$\text{Sym}(N, \mathbb{R}) \ni \Theta : \text{an arbitrage} \iff \begin{pmatrix} -\langle Q, \Theta \rangle & 0 \\ 0 & D\Theta D^\top \end{pmatrix} \in \text{Sym}_+(S+1, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$$

としたとき,

$$(Q, D) : \text{no arbitrage} \iff \exists \Psi \in \text{Sym}_{++}(S, \mathbb{R}) \text{ s.t. } Q = D^\top \Psi D$$

が成り立つ.

発表では, 取引の回数が有限回である様なモデルについて説明したい.

## 参考文献

- [1] 津野 義道, (1999), ファイナンスの数学的基礎-離散モデル-, 共立出版.
- [2] D. Williams, (1991), *Probability with Martingales*, Cambridge University Press.

# 対称化法によるバリアーオプション価格の数値計算

今村 悠里 立命館大理工学部

キーワード：バリアーオプション，数値計算，put-call 対称

$X = (X_t)_{t \geq 0}$  を次の確率微分方程式の解（拡散過程）；

$$dX_t = \sigma(X_t) dW_t + \mu(X_t) dt, \quad (1)$$

とする．ここで， $\sigma : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$ ， $\mu : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$  は区分的に連続な線形成長関数であり， $\sigma\sigma^* > \epsilon$  を満たすとし， $W$  は  $d$ -次元標準ブラウン運動とする．この時 (1) は弱い意味で唯一つの解を持つ ([2])  $D \subset \mathbf{R}^d$  に対し，退出時間を  $\tau = \inf\{t > 0 : X_t \notin D\}$  とする．本研究では有界可測関数  $f$ ， $T > 0$  に対し， $C = \mathbf{E}[f(X_T)I_{\{\tau > T\}}]$  の評価を考える．数理ファイナンスにおいて， $C$  はバリアーオプションの価格評価を与えている．ここで， $X$  は株価過程， $T$  はオプション満期であり，バリアーオプションとは時刻 0 から  $T$  まで株価  $(X)_{0 \leq t \leq T}$  が常に  $K$  を上回るとき満期  $T$  にペイオフ  $f(X_T)$  が支払われるオプション（権利）である．

$X$  が幾何ブラウン運動に従うとき， $C$  の値は求めることができるが，一般の拡散過程に対して  $C$  を具体的に計算できることは期待できない． $\tau$  はマリアバンの意味で一回の微分可能性しか持たないためマリアバン解析を直接応用することもできない．そこで， $C$  の評価として数値計算を用いることが一般的である． $C$  の数値計算として最も単純な手法は Euler-Maruyama 近似による Monte-Carlo シミュレーションである． $[0, T]$  の時間分割  $\{\frac{Tk}{N} : k = 0, \dots, N-1\}$  ( $N \in \mathbf{N}$ ) に対し， $X$  の離散化パスとして，

$$\begin{aligned} X_0^N &= X_0, \\ X_t^N &= X_{\frac{Tk}{N}}^N + \sigma(X_{\frac{Tk}{N}}^N)Z_t + \frac{1}{N}\mu(X_{\frac{Tk}{N}}^N) \quad \left(\frac{Tk}{N} < t \leq \frac{T(k+1)}{N}, k = 1, \dots, N-1\right), \end{aligned}$$

とする．ここで， $(Z_t)_{1 \leq t \leq N-1}$  は正規分布  $\mathcal{N}(0, \frac{1}{N})$  に従う独立同分布列とする．また，離散退出時間を  $\tau^N = \inf\{t > 0 : X_t^N \notin D\}$  とおく． $(X^N)$  に従うサンプルパス  $(X^N(\omega_i))_{i=1}^M$  に対し， $\mathbf{E}[f(X_T^N)I_{\tau^N > T}]$  の近似値は  $\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M f(X_T^N(\omega_i))I_{\tau^N(\omega_i) > T}$  によって与えられる ([6])． $\mathbf{E}[f(X_T)]$  に対する Euler-Maruyama 近似の収束オーダーは  $\frac{T}{N}$  である一方，ロックアウト条件を加えた場合の  $C$  への収束オーダーは  $\sqrt{\frac{T}{N}}$  と，悪くなることが知られている ([3])．この主な原因は時間を離散化したことにより，退出時間に関する多くの情報を見逃してしまったことにある．この問題の一つの解決策として，私は拡散過程の対称化法による数値計算手法を提案した．

$\alpha \in \mathbf{R}^d$ ， $k \in \mathbf{R}$  に対し，超平面  $H_{\alpha,k}^+ = \{x \in \mathbf{R}^d | \langle \alpha, x \rangle = k\}$  に対する鏡像作用素  $s_{\alpha,k}$  を  $s_{\alpha,k}(x) = x - \frac{2\alpha}{|\alpha|^2}(\langle x, \alpha \rangle - k)$  によって定義する． $H_{\alpha,k}^+ = \{x \in \mathbf{R}^d | \langle \alpha, x \rangle - k > 0\}$ ， $\Sigma_\Phi = \bigcap_{(\alpha,k) \in \Phi} H_{\alpha,k}^+$ ， $\tau_{\Sigma_\Phi} := \inf\{t > 0 : X_t \notin \Sigma_\Phi\} = \min_{(\alpha,k) \in \Phi} \tau_{\alpha,k}$  とおき， $\mathbf{E}[f(X_t)1_{\{\tau_{\Sigma_\Phi} > t\}}]$  の数値計算手法を与える．

**Definition 1.**  $\mathbf{R}^d$  上の拡散過程  $X$  が任意の  $t > 0$  に対し， $X_t 1_{\{\tau_{\alpha,k} \leq t\}} \stackrel{d}{=} s_{\alpha,k}(X_t) 1_{\{\tau_{\alpha,k} \leq t\}}$  を満たすとき， $X$  は超平面  $H_{\alpha,k}$  に関して put-call 対称性を持つという．ここで  $\tau_{\alpha,k} = \inf\{t > 0 : X_t = H_{\alpha,k}\}$  とする．

この時， $\{x \in \mathbf{R}^d | \pm(\langle \alpha, x \rangle - k) > 0\}$  に定義域を持つ任意の有界可測関数  $f$  と任意の  $t > 0$  に対して  $\mathbf{E}[f(X_t)1_{\{\tau_{\alpha,k} > t\}}] = \mathbf{E}[f(X_t)] - \mathbf{E}[f(s_{\alpha,k}(X_t))]$  が成り立つ．

**Lemma 2.**  $G$  を  $\{s_{\alpha,k} : (\alpha,k) \in \Phi\}$  によって生成された高々加算な群とし,  $X$  を  $(H_{\alpha,k})_{(\alpha,k) \in \Phi}$  に関する *put-call* 対称性を持つ  $\mathbb{R}^d$  上の拡散過程とする. 次の (i)–(ii) の条件を仮定する: (i)  $g \neq g' \in G$  に対し  $g\Sigma_\Phi \cap g'\Sigma_\Phi = \emptyset$ , (ii) 群準同型写像  $\eta : G \rightarrow \mathbb{C}$  (*character*) で, 任意の  $(\alpha,k) \in \Phi$  に対して  $\eta(s_{\alpha,k}) = -1$  が成り立つものが存在する. このとき,  $\Sigma_\Phi$  上の任意のボレル集合  $A$ ,  $x \in \Sigma_\Phi$ ,  $t > 0$  に対し,  $\sum_{g \in G} \eta(g) P_x(X_t \in gA : \tau_{\Sigma_\Phi} \leq t) = 0$ . が成り立つ.

**Lemma 3.**

$$E[f(X_t)1_{\{\tau_{\Sigma_\Phi} > t\}}] = \sum_{g \in G} \eta(g) E[f(g^{-1}(X_t))],$$

が成り立つ.

よって, (1) の解として与えられる拡散過程に関して, 次のように対称化過程を与える.

**Theorem 4.** 鏡像作用素  $g$  に対して  $T_g$  を鏡像部分に対応する直交行列,  $x \mapsto U_x \in O(d)$  を区分的に連続な写像とする.  $\tilde{\sigma}(x) = \sum_{g \in G} T_g \sigma(g^{-1}x) 1_{\{x \in g\Sigma_\Phi\}} U_x$ ,  $\tilde{\mu}(x) = \sum_{g \in G} T_g \mu(g^{-1}x) 1_{\{x \in g\Sigma_\Phi\}}$ , とし,  $\tilde{X}$  を  $SDE( d\tilde{X}_t = \tilde{\sigma}(\tilde{X}_t) dW_t + \tilde{\mu}(\tilde{X}_t) dt)$  の解とする. このとき

$$E[f(X_t)1_{\{\tau_{\Sigma_\Phi} > t\}}] = \sum_{g \in G} \eta(g) E[f(g^{-1}(\tilde{X}_t))], \quad (2)$$

が成り立つ.

(2) において, 左辺は  $1_{\{\tau_{\Sigma_\Phi} > t\}}$  を含む期待値であるが, 右辺は  $\tilde{X}_t$  のみの関数となっている. この右辺に関する Euler-Maruyama 近似によって  $C$  の数値計算手法が与えられる.

## 参考文献

- [1] Akahori, J., and Y. Imamura, On a Symmetrization of Diffusion Processes, arXiv:1206.5983, (2012).
- [2] Engelbert, H., and W. Schmidt, On one-dimensional stochastic differential equations with generalized drift, *Stochastic Differential Systems Filtering and Control*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, **69** (1985), 143-155.
- [3] Gobet, E., Weak approximation of killed diffusion using Euler schemes, *Stochastic Processes and their Applications*, **87** (2000), 167-197.
- [4] Imamura, Y., Y. Ishigaki, T. Kawagow and T. Okumura, Some Simulation Results of the Put-Call Symmetry Method Applied to Stochastic Volatility Models, *The Proceedings of 43rd ISCIE International Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications*, Shiga, Japan, (2012), 242-245.
- [5] Imamura, Y., Y. Ishigaki, T. Kawagow and T. Okumura, A Numerical Scheme Based on Semi-Static Hedging Strategy, arXiv, 1206.2934, (2012).
- [6] Yan, L., The Euler Scheme with Irregular Coefficients, *The Annals of Probability*, **30** (2002), 1172-1194.



# 作用素値積分論と量子測定

岡村 和弥 京都大学数理解析研究所 D2

キーワード：富田竹崎理論, セクター理論, Fourier-Pontryagin 双対性, 大偏差原理

量子測定理論はここ 30 年ほどの間に急速に進展し, 考察している量子系に対する実験の考察および物理的理解 (解釈) のために避けて通れない量子論の一分野となっている。最近の話題としては小澤の不等式 [1] の実験的検証実験 [2] や今年度のノーベル賞に関わる重要な成果が挙げられる。

量子論の成立当初から量子測定理論の理論的研究は始まっており, [3] において (物理の理論を建設する立場からはいかなる記述はあるが) 位置・運動量の測定過程に対し具体的に測定相互作用を書き下す等の記述しており, 現在の量子測定理論に着実につながる基礎 (の第一歩) が当時から既に築かれていた。しかしながら, この理論の進展には数学的基盤の形成が不可欠であり, 関数解析及び作用素環の進歩によってここ 40 年で量子測定理論が数学的に非常に一般的に定式化されるにいたった。特筆すべきなのが E.B. Davies と J.T. Lewis によるインストゥルメント (instrument) の概念の導入 [4] で, 測定器のメーターの出力と量子系の (状態もしくは物理量) 変化を関係づけられるようになった。しかしながら, 認識論的・数学的意義は理解できるが物理過程として測定過程の測定相互作用による記述との関連は不明瞭であった。その状況を変えたのが [5] で, インストゥルメントに完全正值性 (complete positivity) を加えることで測定過程 (の統計的同値類) との対応関係を示した:

**定義 1** ([5]).  $\mathcal{M}$  を Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  上の von Neumann 代数  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  の  $*$ -部分代数で  $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$  を満たすもの) ととする。  $\mathcal{M}$  に対して線型な写像  $\mathcal{I} : \mathcal{B}(S) \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  は次の条件を満たすとき,  $(\mathcal{M}, S)$  に対する完全正インストゥルメントと呼ぶ:

(i)  $\Delta \in \mathcal{B}(S)$  に対し,  $\mathcal{I}(\Delta)$  は単位的 (unital) かつ完全正 (completely positive) である, すなわち,  $\mathcal{I}(S)1 = 1$  及び次を満たす: 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対し, 任意の  $A_j \in \mathcal{A}$  と  $\xi_j \in \mathcal{H}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) に対し,

$$\sum_{i,j} \langle \xi_i | \mathcal{I}(\Delta)(A_i^* A_j) \xi_j \rangle \geq 0. \quad (1)$$

(ii) 任意の互いに疎な可算列  $\{\Delta_j\} \subset \mathcal{B}(S)$  に対し,

$$\mathcal{I}(\cup_j \Delta_j) = \sum_j \mathcal{I}(\Delta_j), \quad (\text{強収束}).$$

上で定義された完全正インストゥルメントは Ozawa-Naimark-Stunespring(ONS) dilation と呼ばれる, 表現すなわち積構造を保つ準同型写像と等長作用素を用いた, 元の Hilbert 空間を含むより大きい空間での表現論的表示が必ず存在する:

**定理 1** ([5]).  $(\mathcal{M}, S)$  に対する完全正インストゥルメント  $\mathcal{I}$  に対し, Hilbert 空間  $\mathcal{H}_0$ , スペクトル測度  $E : \mathcal{B}(S) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ , 非退化正規  $*$ -表現  $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ , そして等長作用素  $V : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_0$  が存在して, 任意の  $\Delta \in \mathcal{B}(S)$  と  $A \in \mathcal{M}$  に対し次が成立する:

$$\mathcal{I}(\Delta)A = V^* E(\Delta) \pi(A) V, \quad E(\Delta) \pi(A) = \pi(A) E(\Delta). \quad (2)$$

証明のカギは完全正值性にある。そして,  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  という特殊な場合には次の特別な表示が存在する:

系 1 ([5]).  $(\mathbf{B}(\mathcal{H}), \mathbb{R})$  に対する完全正インストゥルメント  $\mathcal{I}$  に対し, 測定過程  $(\mathcal{K}, \mathcal{U}, \sigma, M)$  で次を満たすものが存在する: 任意の  $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  に対し,

$$\mathcal{I}(\Delta)A = \text{Tr}_{\mathcal{K}}[U^*(A \otimes E^M(\Delta))U(1 \otimes \sigma)], \quad A \in \mathcal{M}. \quad (3)$$

ここで, 測定過程  $(\mathcal{K}, \mathcal{U}, \sigma, M)$  とは, Hilbert 空間  $\mathcal{K}$ ,  $U \in \mathbf{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ ,  $\sigma \in \mathbf{T}(\mathcal{K})_{+,1}$ , そして  $M$  は  $\mathcal{K}$  上の自己共役作用素の 4 つ組のことである。

系 1 はとてもきれいな結果であるけれども,  $\mathbf{B}(\mathcal{H})$  という特殊な場合にしか成立しない。それ故, 一般の von Neumann 代数においても成立する定理 1 および証明をより代数的な観点から利用して完全正インストゥルメントによる状態の積分分解の理論を構築する [7]。[6] では示されていない形の新しい結果を紹介する。時間的余裕があれば完全正インストゥルメントを導出する物理的背景にあたるセクター理論 [6] について紹介を行う。

## 参考文献

- [1] M. Ozawa. Universally valid reformulation of the Heisenberg uncertainty principle on noise and disturbance in measurement. *Phys. Rev. A*, **67**:042105 (1-6), 2003; M. Ozawa. Physical content of Heisenberg's uncertainty relation: limitation and reformulation. *Phys. Lett. A*, **318**:21-29, 2003.
- [2] J. Erhart, S. Sponar, G. Sulyok, G. Badurek, M. Ozawa, and Y. Hasegawa, *Nature Physics* **8**, 185-189 (2012) doi:10.1038/nphys2194.
- [3] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, (Springer, Berlin, 1932).
- [4] E.B. Davies and J.T. Lewis, An operational approach to quantum probability, *Commun. Math. Phys.* **17**, 239 (1970).
- [5] M. Ozawa, Quantum measuring processes of continuous observables, *J. Math. Phys.* **25**, 79-87 (1984); M. Ozawa, Conditional probability and a posteriori states in quantum mechanics, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **21**, 279-295 (1985); M. Ozawa, Concepts of conditional expectations in quantum theory, *J. Math. Phys.* **26**, 1948-1955 (1985).
- [6] I. Ojima, "Micro-Macro Duality in Quantum Physics", pp.143-161 in *Proc. Intern. Conf. on Stochastic Analysis, Classical and Quantum* (World Scientific, 2005), arXiv:math-ph/0502038; I. Ojima and K. Okamura, Large Deviation Strategy for Inverse Problem II, *Open Sys. Inform. Dyn.* **19** (2012), 1250022.
- [7] K. Okamura, in preparation.

# 古典確率論と自由確率論

長谷部 高広 京都大学大学院理学研究科

キーワード：自由確率論、中心極限定理、無限分解可能分布

80年代中頃に Voiculescu は自由群から作られるフォンノイマン環を研究するため、自由確率論という分野を考え出した。大まかに言うと、自由確率論とは確率論で基本的な「独立性」の概念を「自由独立性」というもので置き換えることによって得られる理論である。さらに 91 年に Voiculescu によってランダム行列のサイズを大きくした極限で自由独立性が現れることが証明された [6].

確率論で基本的な目標は独立な確率変数の和を調べることであって、ランダムウォークや中心極限定理といったものがよく研究されている。自由確率論においても自由独立な確率変数の和を調べることが基本となるが、これは独立な大きいランダム行列の和を調べることと同じことになる。自由中心極限定理を考えると、その極限分布は Wigner の半円則

$$w(dx) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} dx, \quad |x| < 2$$

に収束することが知られている。

中心極限定理の一般化も確率論でよく研究されている。一般的な形の極限定理を考えると、無限分解可能分布というクラスが現れる。確率測度  $\mu$  が無限分解可能であるとは、独立同分布な確率変数列  $X_1^{(n)}, \dots, X_n^{(n)}$  が存在して、

$$X_1^{(n)} + \dots + X_n^{(n)} \text{ の分布 } \rightarrow \mu$$

となることである。cf: 中心極限定理は以下のように述べられる。独立同分布な  $(X_k)_{k \geq 1}$  という列で  $E(X_k) = 0, E(X_k^2) = 1$  となるものに対して、 $\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} = \frac{X_1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{X_n}{\sqrt{n}}$  の確率分布がガウス分布  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$  に収束する。この場合は  $X_i^{(n)} = \frac{X_i}{\sqrt{n}}$  となっている。

無限分解可能分布の例として知られている確率分布は数多くあるが、いくつか列挙すると、ガウス分布、ポアソン分布、指数分布  $e^{-x} dx, x > 0$ 、ガンマ分布  $\frac{1}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-x} dx, x > 0$ 、コーシー分布  $\frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} dx, x \in \mathbb{R}$ 、パレート分布  $\frac{r}{(1+x)^r} dx, x > 0$  がある。また確率分布が無限分解可能になるための使いやすい十分条件もいくつか知られている。

自由確率論においても自由無限分解可能分布というクラスを考えることができる。その一般論は 90 年代から整備されてきたが、どのような確率分布が自由無限分解可能になるか、あまり多くの例が知られていなかった。そこで、筆者はいろいろな例を見つけることを 1 つの目標にして研究を行ってきた。

本講演では最近の研究結果のまとめとして、いくつかの自由無限分解可能な確率分布を紹介する。主なものは以下の通りである。

1.  $X$  を Wigner の半円則  $w_1$  に従う確率変数とする。このとき  $X^2, X^4$  も自由無限分解可能分布に従う。 [2]
2.  $0 < a < 1$  としてベータ分布  $\beta_{1-a, 1+a}(dx) = \frac{\sin a\pi}{a\pi} x^{-a} (1-x)^a dx$  ( $0 < x < 1$ ) を考えると、これは  $\frac{1}{2} \leq a$  の場合に限り自由無限分解可能。 [1]
3. 自由度 1 のカイ二乗分布は自由無限分解可能。 [2]

4. 奇数自由度の t 分布は自由無限分解可能. [5]
5. F 分布  $F(1, 2n - 1)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) は自由無限分解可能. [5]
6. 確率分布

$$\nu_\alpha = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \frac{x^{\alpha-1}}{x^{2\alpha} + 2(\cos \alpha\pi)x^\alpha + 1}, \quad x > 0$$

は  $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$  の場合に限り自由無限分解可能.

また先行研究で, Gauss 分布が自由無限分解可能であることも知られている [4]. 上記の確率分布の中で, Gauss 分布, カイ二乗分布, t 分布, F 分布,  $\nu_\alpha$  は古典的な意味でも無限分解可能になっている<sup>1</sup>. これまでは「自由」の世界と「古典」の世界はやや分断されていたような面があったが, 共通部分に住んでいる確率分布が最近になって色々見つかってきている.

## 参考文献

- [1] O. Arizmendi and T. Hasebe, On a class of explicit Cauchy-Stieltjes transforms related to monotone stable and free Poisson laws, Bernoulli, to appear.
- [2] O. Arizmendi, T. Hasebe and N. Sakuma, Free regular infinite divisibility and squares of random variables with  $\boxplus$ -infinitely divisible distributions, arXiv:1201.0311v1.
- [3] O. Arizmendi and T. Hasebe, On Boolean stable laws, arXiv:1205.1575v1.
- [4] S.T. Belinschi, M. Bożejko, F. Lehner and R. Speicher, The normal distribution is  $\boxplus$ -infinitely divisible, Adv. Math. **226**, No. 4 (2011), 3677–3698.
- [5] T. Hasebe, Free infinite divisibility of measures with rational function densities, preprint.
- [6] D. Voiculescu, Limit laws for random matrices and free products, Invent. Math. **104**, No. 1 (1991), 201–220.

---

<sup>1</sup>自由確率論は非可換な確率変数を扱うのに対して, 確率論では可換な確率変数を扱う. この2つを区別するために後者を「古典確率論」と呼ぶことがあるが, 「古典」という言葉は量子力学で用いられる専門用語である.

# フェルミ場が相互作用する系の本質的スペクトルについて

高江洲 俊光 神戸大学理学研究科

キーワード：ヒルベルト空間上の線形作用素論、フォック空間、場の量子論。

For a mathematical research of quantum physics, the state spaces are defined by a Hilbert space and Hamiltonians are given by self-adjoint operators on the Hilbert space. For systems of quantum mechanics, its spectral analysis and scattering theory has been analyzed. In particular, for the analysis of essential spectrum, there is the HVZ theorem by which the essential spectrum of Schrödinger operator is exactly analyzed (See e.g. [3]). In this paper, an abstract interacting system of fermionic quantum field is investigated. The state space is given by a tensor product of an Hilbert space and fermion Fock space. In the main theorem, we investigate the location of the essential spectrum of the Hamiltonian. This research is a fermionic version obtained by Arai in [2] where an abstract bosonic field system are analyzed and the location of the essential spectrum the Hamiltonian is investigated.

Let us introduce the abstract interacting system of fermionic field. The state space is given by  $\mathcal{H} = \mathcal{F}_f(\mathcal{K}) \otimes \mathcal{T}$  where  $\mathcal{F}_f(\mathcal{K})$  is a fermion Fock space on a Hilbert space  $\mathcal{K}$  and  $\mathcal{T}$  is a Hilbert space. The free Hamiltonian is given by

$$H_0 = d\Gamma(K) \otimes I + I \otimes T, \quad (1)$$

where  $d\Gamma(K)$  is a second quantization of the self-adjoint and non-negative operator  $K$ , and  $T$  is a self-adjoint operator on  $\mathcal{T}$  with bounded from below. It is seen that  $H_0$  is a self-adjoint and bounded from below. Here the domain of  $H_0$  is set by  $\mathcal{D}(H_0) = \mathcal{D}(d\Gamma(K) \otimes I) \cap \mathcal{D}(I \otimes T)$ . The total Hamiltonian is given by

$$H = H_0 + H_1, \quad (2)$$

where  $H_1$  is a symmetric operator on  $\mathcal{H}$ .

We imposed some conditions of the weak commutator. The definition of the weak commutator is as follows. Let  $X$  and  $Y$  be a densely defined linear operator on a Hilbert space  $\mathcal{X}$ . Assume that there exists a linear operator  $Z$  and a dense subspace  $\mathcal{M}$  such that  $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}(Z) \cap \mathcal{D}(X) \cap \mathcal{D}(X^*) \cap \mathcal{D}(Y) \cap \mathcal{D}(Y^*)$  and for  $\Phi, \Psi \in \mathcal{M}$ ,  $(X^*\Phi, Y\Psi) - (Y^*\Phi, X\Psi) = (\Phi, Z\Psi)$ . Then the restriction  $Z$  to  $\mathcal{M}$  is called a weak commutator of  $X$  and  $Y$  on  $\mathcal{M}$  and it is denoted by  $[X, Y]_{\mathcal{M}}^0 = Z|_{\mathcal{M}}$ .

Here we assume the following conditions :

**(A.1)**  $H$  is self-adjoint on  $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(H_0) \cap \mathcal{D}(H_1)$ .

**(A.2)** For all  $h \in \mathcal{D}(K)$ ,  $[H_1, B(h) \otimes I]_{\mathcal{D}(H)}^0$  and  $[H_1, B^*(h) \otimes I]_{\mathcal{D}(H)}^0$  exist where  $B(h)$  and  $B^*(h)$  denotes the annihilation operator and the creation operator,

respectively. For any sequence  $\{h_n\}_{n=1}^\infty$  of  $\mathcal{D}(K)$  satisfying  $w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$  and  $\|h_n\| = 1, n \geq 1$ , it follows that for all  $\Psi \in \mathcal{D}(H)$ ,

$$\begin{aligned} s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} [H_1, B(h_n) \otimes I]_{\mathcal{D}(H)}^0 \Psi &= 0, \\ s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} [H_1, B^*(h_n) \otimes I]_{\mathcal{D}(H)}^0 \Psi &= 0. \end{aligned}$$

The main theorem in this paper is as follows.

**Theorem** Assume **(A.1)** and **(A.2)**. Then

$$\overline{\{E_0(H) + \lambda \mid \lambda \in \sigma_{\text{ess}}(K) \setminus \{0\}\}} \subset \sigma_{\text{ess}}(H), \quad (3)$$

where  $\bar{J}$  denotes the closure of the subset  $J \subset \mathbf{R}$ .

We prove the above theorem by same strategy considered in [2], which is explained below. Let  $X$  be a self-adjoint operator on a Hilbert space  $\mathcal{X}$  and  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Then a sequence  $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$  of  $\mathcal{X}$  is called the Weyl sequence for  $X$  and  $\lambda$ , if **(i)**  $\psi_n \in \mathcal{D}(X)$  and  $\|\psi_n\| = 1$  for all  $n \in \mathbf{N}$ , **(ii)**  $w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = 0$  and **(iii)**  $s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} (X - \lambda)\psi_n = 0$ . For  $\lambda \in \mathbf{R}$ , For a fundamental fact of the essential spectrum, there is a Weyl's criteria. Weyl's criteria says that  $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(X)$  if and only if there exists a Weyl sequence for  $X$  and  $\lambda$ . To prove the main theorem, we directly construct the Weyl sequence for  $H$  and  $E_0(H) + \lambda$  from the Weyl sequence for  $K$  and  $\lambda$  where  $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(K) \setminus \{0\}$ .

For an application of the theorem, the essential spectrum of the Yukawa model, which is a interacting system of Dirac field and Klein-Gordon field, is also investigated (See [5])

## 参考文献

- [1] 新井朝雄、フォック空間と量子場 (上、下), 日本評論社 (2000).
- [2] A. Arai, Essential spectrum of a self-adjoint operator on an abstract Hilbert of Fock type and applications to quantum field Hamiltonians, *Jour. Math. Anal. Appl.* **246** (2000) 189-216.
- [3] H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch and B. Simon, *Schroödinger operator : with applications to quantum mechanics and global geometry*, Springer, 1987.
- [4] T. Takaesu, Ground states of Yukawa models with cutoffs, *Inf. Dim. Anal. Quantum Prob. Related Topics*, **14** (2011) 225-235.
- [5] T. Takaesu, Essential spectrum of fermionic quantum field model, (preprint).