量子 D 加群の大域的構造

入谷　寛

Abstract. 量子 D 加群の大域的な構造をトーリック多様体の場合に調べる．量子 D 加群は Kähler モジュライ $\mathcal{M}$ 上の D 加群であるが，これを $\mathcal{M}$ の様々な極限点の周りで展開することにより異なる多様体の量子コホモロジーが現れる．ここで極限点の取り方によっては軌道体量子コホモロジーが現れることもある．Kähler モジュライ $\mathcal{M}$ の極限点ごとに平坦構造が $\mathcal{M}$ に定義され，これらの平坦構造は互いにあるシンプレクティック変換でつながっていることを見る．本稿の記述は，Alessio Corti 氏, Tom Coates 氏, Hsian-Hua Tseng 氏との共同研究に基づく．

1. 序

Gromov-Witten 不変量は滑らかな射影的多様体 X の中の正則曲線の個数を数えることにより定義される．この不変量は曲線の次数 d と種数 g および曲線上の名前つき点 (marked point) の数 n，またその名前つき点の数だけのコホモロジー類 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ をとると定まる有理数であり，つぎの形に書かれる．

$$\langle\alpha_1,\dots,\alpha_n\rangle^X_{g,n,d}, \quad \alpha_i\in H^*(X,\mathbb{Q}), \quad d\in H_2(X,\mathbb{Z})$$

これらの数一つ一つは X 内の点つき正則曲線のモジュライ空間上の積分として定義され，各々が幾何学的な意味を持っているが，これらを全て集めて次のような母函数を考えよう．

$$F_g(t;Q)=\sum_{d\in H_2(X,\mathbb{Z})}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left\langle\overbrace{t,\dots,t}^{n}\right\rangle_{g,n,d}Q^d$$

ここで，t はコホモロジー類であり，Q^d は $H_2(X,\mathbb{Z})$ の群環の元を表す．F_g はコホモロジー環の上の形式的な函数であり，種数 g の Gromov-Witten ポテンシャルと呼ばれる．本稿の主題である量子コホモロジー $QH^*(X)$ とはコホモロジー環 $H^*(X,\mathbb{Q})$ の積構造を変形したある (超) 可換代数である．コホモロジー群 $H^*(X,\mathbb{Q})$ の基底を $\phi_0,\dots,\phi_s$ とし，一般のコホモロジークラスを $t=\sum_{j=0}^s t^j\phi_j$ とあらわす．各 t^j はコホモロジー群上の線形座標とみなす．量子コホモロジーの積 $*$ は種数 0 の Gromov-Witten ポテンシャル F_0 を使って次のように定義される．

$$\phi_i*\phi_j=\sum_{k,l}\frac{\partial^3F_0}{\partial t^i\partial t^j\partial t^k}(t;Q)\eta^{kl}\phi_l$$

ここで，(η_{ij}) は基底 $\{\phi_i\}$ に関する Poincaré ペアリングの Gram 行列 $\eta_{ij}=\int_X\phi_i\cup\phi_j$，$(\eta^{ij})$ はその逆行列である．定義から $Q=0$, $t=0$ において量子積 $*$ はカップ積 $\cup$ に一致することが容易に確かめられる．

量子コホモロジーの構造定数は定義によれば Gromov-Witten 不変量を係数とする単なる形式べき級数であって，これが収束するかどうかはわからない．また収束するとして

学術振興会特別研究員 PD，東京大学数理科学研究科．

もそれを解析接続したものにどういう意味があるかは明らかではない．これを見るには，例えば F_0 に対する次のような微分方程式 (WDVV 方程式) がある．

$$\sum_{k,l} \frac{\partial^3 F_0}{\partial t^i \partial t^j \partial t^k} \eta^{kl} \frac{\partial^3 F_0}{\partial t^l \partial t^m \partial t^n} = \sum_{k,l} \frac{\partial^3 F_0}{\partial t^n \partial t^j \partial t^k} \eta^{kl} \frac{\partial^3 F_0}{\partial t^l \partial t^i \partial t^m}, \quad \forall i, j, n, m$$

この微分方程式は量子積が結合的であることと同値である．(ここでは符号の問題を避けるため，コホモロジー類は偶数次に限っている.) Dubrovin[13], Manin[27] の研究により，$X = \mathbb{P}^2$ に対する WDVV 方程式は第 6 の Painlevé 方程式に還元されることが知られている．特に $\mathbb{P}^2$ の Gromov-Witten ポテンシャルは Painlevé VI の解を与え，解析函数としても興味深いものになっている．一般には WDVV 方程式，あるいは量子コホモロジーの結合性の帰結として，量子コホモロジーの定めるコホモロジー群上の D 加群の構造がある．これは自明なベクトル束 $H^*(X) \times H^*(X) \to H^*(X)$ にパラメータ z を持つ次の平坦接続 ∇^z を与えたものであり，量子 D 加群と呼ばれる．

$$\nabla_i^z = z \frac{\partial}{\partial t^i} + (\phi_i *), \qquad [\nabla_i^z, \nabla_j^z] = 0$$

本稿の主題は，この量子 D 加群を $t = 0$ の周りの形式的近傍の上で考察するだけではなく，その大域的な構造を調べることである．具体的には，ある多様体 X の量子 D 加群を解析接続していくとある点で特異性が生じ，その近傍では X と双有理同値な別の多様体 Y の量子 D 加群と同型になる，という現象がおこる．これを X がトーリック多様体の場合に調べたい．トーリック多様体は $\mathbb{C}^N$ のトーラスによる GIT 商として書かれるが，この場合の X と Y は安定性の条件を変えることで移りあう 2 つのトーリック多様体である．別の言い方では，シンプレクティック商においてモーメント写像の値を変える (壁越え，wall-crossing) ことで移りあう多様体同士である．

多様体 X または Y は必ずしも滑らかなものとは限らず，軌道体 (orbifold) になっている場合も自然に出てくる．軌道体に対するコホモロジー理論や Gromov-Witten 理論は物理の弦理論に起源を持つが，数学的には Chen-Ruan によって開発された [9, 10, 11]．軌道体 X に対する軌道体コホモロジー $H^*_{\mathrm{orb}}(X)$ とは通常のコホモロジーに twisted sector と呼ばれる特異点からの寄与を直和して得られるもので，一般には有理数の次数付けを持つ次数つき環である．軌道体量子コホモロジー $QH^*_{\mathrm{orb}}(X)$ は通常の量子コホモロジーの場合と同様に $H^*_{\mathrm{orb}}(X)$ の積構造の変形になっている．Yongbin Ruan によるクレパント解消予想 [31] は，軌道体 X があるクレパントな特異点解消 $\pi\colon Y \to X$，$K_Y = \pi^* K_X$ を持つとき，$H^*_{\mathrm{orb}}(X)$ と $H^*(Y)$ が次数つきベクトル空間として同型になることを主張する．一般にこの主張は安田健彦によって Kontsevich の motivic 積分を用いることで示された [37]．しかし，この同型はその積構造を保つわけではない．Yongbin Ruan の予想の量子コホモロジー版は X の軌道体量子コホモロジー $QH^*_{\mathrm{orb}}(X)$ は Y の量子コホモロジー $QH^*(Y)$ の変数 Q のいくつかを 1 のべき根に特殊化したものと環として同型になる，という予想である．つまり，古典的なレベルでは環の同型はいえないが，量子的なレベルで環の同型が予想されている．われわれの大域的な量子 D 加群の描像はこの予想ときわめて整合的である．すなわち，クレパント解消 $Y \to X$ に対して，Y の量子 D 加群を解析接続すると，1 のべき根で X の量子 D 加群が現れると考えられる．また関連する Ruan の予想として，多様体 X と Y が flop で結ばれているとき，二つの量子コホモロジー $QH^*(X)$，$QH^*(Y)$ は変数変換 $Q \mapsto Q^{-1}$ で互いに移りあう，という予想がある．これは 3 次元 flop の場合 [26], 向井 flop の場合 [19], standard flop の場合 [25] などに示されている．これも大域的な量子 D 加群の枠組みで理解したい．

物理では量子 D 加群の大域的構造がミラー対称性を用いて昔から研究されてきた．ミラー対称性は，与えられた多様体 X に対して，そのミラーと呼ばれる多様体や特異点があって，X の Gromov-Witten 理論がミラーの Hodge 理論とある意味で等価であることを意味している．例えば Calabi-Yau 多様体 X の場合には，X の種数 0 の Gromov-Witten ポテンシャルはミラーである別の Calabi-Yau 多様体 $\check{X}$ の周期に対応する．周期はミラー多様体 $\check{X}$ の複素構造のモジュライ空間の上の函数である．ミラー対称性を仮定すると，モジュライ空間の 1 つの特異点の周りで，$\check{X}$ の周期を特殊な座標 (平坦座標) に関して展開した係数が X の Gromov-Witten 不変量となっている．したがって，ミラー側ではポテンシャルを大域的な函数と捉えるほうがむしろ自然であり，Gromov-Witten 不変量はそのテーラー展開係数に過ぎないことになる．

以下の本稿の構成は次の通りである．2 節では軌道体の Gromov-Witten 理論について述べる．3 節ではトーリック軌道体に対する半無限コホモロジーの構成と軌道体量子コホモロジーを決定するミラー定理について述べる．4 節では半無限 Hodge 構造を使った平坦構造の構成について述べる．5 節は今後の課題である．量子 D 加群における整数上の構造や実数上の構造，また高種数の場合に予想される量子化について述べる．

2. 軌道体 Gromov-Witten 理論

2.1. **軌道体コホモロジー**．ここでは X を射影的軌道体とする．すなわち，射影代数多様体に軌道体の構造をいれたものとする．軌道体について詳しくは，[35, 29, 28, 32, 8] などを参照されたい．軌道体は局所的には $\mathbb{C}^n$ の開集合 U を有限群 G の作用で割ったもの U/G とかかれる．このチャート $U \to U/G$ のことを局所一様化系 (local uniformizing system) とよび，G を局所群 (local group) とよぶ．軌道体 X に対し，慣性軌道体 (inertia orbifold) と呼ばれる軌道体 IX が定義される．これは局所的には

$$\{(p,g) \in U \times G \,;\, gp = p\} \Big/ (p,g) \sim (hp, hgh^{-1}), \quad h \in G$$

で定義される．すなわち，IX は軌道体の点 p とその点を固定する元 g(の共役類) の組からなる．任意の点 $p \in U$ に対し単位元 $\mathrm{id} \in G$ は p を固定し (p, id) は慣性軌道体の元となるので，X 自身は慣性軌道体の一つの成分を与える．一般に，慣性軌道体は

$$IX = X \sqcup \bigsqcup_{(g) \neq (\mathrm{id})} X_{(g)}$$

の形に書かれる．詳しい説明は省略するが，各々の (g) はどれかのチャートの局所群 G の共役類から来ている[1]．この慣性軌道体における X 以外の成分 $X_{(g)}$ を twisted sector と呼ぶ．例えば X が大域的な商として $X = U/G$ の形に書けるとき，慣性軌道体の成分 $X_{(g)}$ は G の共役類 $(g) = \{hgh^{-1} \,;\, h \in G\}$ に対して

$$X_{(g)} = U^g / C_g$$

である．ここで U^g は g の固定点集合，C_g は g の中心化群である．軌道体コホモロジーは慣性軌道体のコホモロジーの次数をずらしたものとして定義される．

$$H^k_{\mathrm{orb}}(X, \mathbb{Q}) := H^k(X, \mathbb{Q}) \oplus \bigoplus_{(g) \neq (\mathrm{id})} H^{k - 2\iota_{(g)}}(X_{(g)}, \mathbb{Q})$$

ここで，$\iota_{(g)}$ は次数ずらし数 (degree shifting number) もしくは年齢 (age) と呼ばれる有理数である．例えば，$X = U/G$ の場合には $X_{(g)} = U^g/C_g$ の次数ずらし数は次のように

[1]正確には，それらにある同値関係を入れて割っている．

定まる．U における U^g の法ベクトル束を ν_g とし，$\langle g\rangle$ を g の生成する巡回群とする．法ベクトル束 ν_g には $\langle g\rangle$ が作用し，その表現として複素直線束の直和 $\nu_g = \oplus_{i=1}^{l}\nu_g^i$ に既約分解される．(ここで (概) 複素構造を必要とする.) 元 g の位数を m とし，各直線束 ν_g^i に g が $\exp(2\pi\sqrt{-1}r_i/m)$ 倍 (ただし $0 \le r_i < m$ にとる) で作用するとすれば，$\iota_{(g)}$ は

$$\iota_{(g)} := \sum_{i=1}^{l} \frac{r_i}{m}$$

と定義される．慣性軌道体の各成分 $X_{(g)}$ に対して固定元 g の逆元をとって得られる成分 $X_{(g^{-1})}$ があり，二つは自然に同型 $X_{(g)} \cong X_{(g^{-1})}$ である．また，定義から $\dim_{\mathbb{C}} X_{(g)} + \iota_{(g)} + \iota_{(g^{-1})} = n = \dim_{\mathbb{C}} X$ であることが容易に分かるので，次の積分によるペアリングが得られる．

$$\int_{X_{(g)}} : H^{k-2\iota_{(g)}}(X_{(g)},\mathbb{Q}) \otimes H^{2n-k-2\iota_{(g^{-1})}}(X_{(g^{-1})},\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{Q}$$

このペアリングの直和として，軌道体コホモロジーに非退化なペアリングが定まる．

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : H^k_{\mathrm{orb}}(X,\mathbb{Q}) \otimes H^{2n-k}_{\mathrm{orb}}(X,\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{Q} \tag{1}$$

例 2.1. 重みつき射影空間 $X = \mathbb{P}(1,2,2,4)$ はトーリック軌道体の例である．

$$\mathbb{P}(1,2,2,4) = \mathbb{C}^4 \setminus \{0\} \Big/ (x,y,z,w) \sim (\lambda x, \lambda^2 y, \lambda^2 z, \lambda^4 w), \quad \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

この慣性軌道体は

$$IX = X \sqcup X_{(-1)} \sqcup X_{(i)} \sqcup X_{(-i)}, \quad X_{(-1)} \cong \mathbb{P}(2,2,4), \quad X_{(\pm i)} \cong \mathbb{P}(4).$$

で与えられる．次数ずらし数は $\iota_{(-1)} = 1/2$, $\iota_{(i)} = 3/4$, $\iota_{(-i)} = 7/4$ となるので，軌道体コホモロジーは

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & 0 & & 2 & & & & 4 & & 6 \\
H^*(X) & \mathbb{Q} & & \mathbb{Q} & & & & \mathbb{Q} & & \mathbb{Q} \\
 & & 1 & & & 3 & & & 5 & \\
H^*(X_{(-1)}) & & \mathbb{Q} & & & \mathbb{Q} & & & \mathbb{Q} & \\
 & & & & 5/2 & & 7/2 & & & \\
H^*(X_{(i)}) \oplus H^*(X_{(-i)}) & & & & \mathbb{Q} & & \mathbb{Q} & & &
\end{array}$$

の直和で与えられる．軌道体コホモロジーもポアンカレ双対性 $H^*_{\mathrm{orb}}(X) \cong H^{6-*}_{\mathrm{orb}}(X)$ を満たしていることが見て取れる．

2.2. **軌道体 Gromov-Witten 理論．** 軌道体 Gromov-Witten 理論では，標的となる軌道体 X だけでなく定義域の曲線 C にも商特異点を与えて軌道体とし，軌道体の間の射 (Chen-Ruan では good map と呼ばれる) $f\colon C \to X$ のモジュライ空間を考える．軌道体 Gromov-Witten 不変量は微分幾何的には Chen-Ruan [10, 11] によって，また代数幾何的には Abramovich-Graber-Vistoli [1, 2] によって定義された．詳しいことはこれらの文献に譲り，ここではごく簡単な紹介にとどめたい．

節点つきの軌道体曲線 (nodal orbicurve)C とは複素 1 次元のコンパクトで被約な[2]軌道体で局所的に次の形に書かれる節点を許すものである．

$$\{(x,y) \in \mathbb{C}^2\,;\, xy = 0\}/(x,y) \sim (\zeta x, \zeta^{-1} y), \quad \zeta = e^{2\pi\sqrt{-1}/m}$$

[2] generic な点での固定群が自明

ただし，m は 1 以上の自然数．n 点つきの節点つき軌道体曲線 $(C, x_1, \dots, x_n)$ とは節点つき軌道体曲線 C とその上の互いに異なる n 個の名前つき点 $x_1, \dots, x_n$ の組であって，各 x_i は節点の上には乗っておらず，かつ C の全ての商特異点 (節点を除く) はどれかの名前つき点 x_i になっているもののことである．n 点つき軌道体安定写像 (orbifold stable map) $f\colon (C, x_1, \dots, x_n) \to X$ とは n 点つきの節点つき軌道体曲線 $(C, x_1, \dots, x_n)$ から X への軌道体としての射 f であって，次を満たすものである．

(1) f の局所一様化系への局所的持ち上げは正則写像.
(2) C の既約成分 C_α 上で f が定数ならば，C_α の自己交差を解消した $\tilde{C}_\alpha$ の種数を g_α とおくとき，$g_\alpha = 0$ ならば $\tilde{C}_\alpha$ 上に節点または名前つき点が 2 つ以上あり，また $g_\alpha = 1$ ならば，$\tilde{C}_\alpha$ 上に節点または名前つき点が 1 つ以上ある．
(3) C の商特異点または節点 p における局所群 G_p(巡回群) から $f(p) \in X$ での局所群 $G_{f(p)}$ への群準同型は単射である．

2 つの軌道体の間の射 $f\colon X \to Y$ は，局所的には，点 $p \in X$ の周りの局所一様化系 U/G_p と点 $f(p) \in Y$ の周りの局所一様化系 $V/G_{f(p)}$ に関し，一様化系への持ち上げ $\tilde{f}\colon U \to V$ および群準同型 $\lambda\colon G_p \to G_{f(p)}$ で，$f(gv) = \lambda(g)f(v)$ を満たすものの組 $(\tilde{f}, \lambda)$ で与えられる．(これらの局所的持ち上げの張り合わせ条件については省略する.) 条件 (1) は局所持ち上げ $\tilde{f}$ の正則性であり，条件 (3) は群準同型 $\lambda\colon G_p \to G_{f(p)}$ の単射性である．条件 (2) は無限小の自己同型がないという安定性の条件に対応する．算術的種数 g，次数 $d \in H_2(X, \mathbb{Z})$, n 点つき軌道体安定写像のモジュライ空間を $\overline{M}_{g,n}(X, d)$ と書くことにする．これはコンパクトになる．i 番目の名前つき点での評価写像が慣性軌道体 IX に値を持つ写像として定まる．

$$\mathrm{ev}_i\colon \overline{M}_{g,n}(X, d) \longrightarrow IX$$

これは軌道体安定写像 $f\colon (C, x_1, \dots, x_n) \to X$ に対して，IX の元 $(f(x_i), \lambda(g))$ を対応させることで定まる．ここで，g は $x_i \in C$ での局所一様化系 $z \mapsto z^m$ の局所群 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ の生成元 $g\colon z \mapsto e^{2\pi\sqrt{-1}/m}z$ であり，$\lambda\colon G_{x_i} \to G_{f(x_i)}$ は局所群の間の準同型である．慣性軌道体の n 個の成分 $X_{(g_1)}, \dots, X_{(g_n)}$ を選んで，$\boldsymbol{x} = (X_{(g_1)}, \dots, X_{(g_n)})$ とし，

$$\overline{M}_{g,n}(X, d, \boldsymbol{x}) := \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{ev}_i^{-1}(X_{(g_i)}) \subset \overline{M}_{g,n}(X, d)$$

とおく．このモジュライ空間 $\overline{M}_{g,n}(X, d, \boldsymbol{x})$ は次の複素次元 d の仮想的基本類 (virtual fundamental class) $[\overline{M}_{g,n}(X, d, \boldsymbol{x})]^{\mathrm{vir}} \in H_{2d}(\overline{M}_{g,n}(X, d, \boldsymbol{x}), \mathbb{Q})$ を持つ[3].

$$d = (1-g)(\dim_{\mathbb{C}} X - 3) + \langle c_1(TX), d\rangle + n - \sum_{i=1}^{n} \iota_{(g_i)}.$$

$[\overline{M}_{g,n}(X, d)]^{\mathrm{vir}} = \bigoplus_{\boldsymbol{x}} [\overline{M}_{g,n}(X, d, \boldsymbol{x})]^{\mathrm{vir}}$ とおき，軌道体 Gromov-Witten 不変量を

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle_{g,n,d} := \int_{[\overline{M}_{g,n}(X,d)]^{\mathrm{vir}}} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{ev}_i^*(\alpha_i), \quad \alpha_i \in H^*_{\mathrm{orb}}(X) \cong H^*(IX),$$

と定義する．第 1 節で述べたのとまったく同様に軌道体 Gromov-Witten ポテンシャルが定まり，既に述べた $H^*_{\mathrm{orb}}(X)$ のペアリングを使って軌道体量子コホモロジーが定まる．さら

[3] d が整数でなければモジュライ空間は空集合

にこの軌道体量子コホモロジーから量子 D 加群の平坦接続が自明束 $H^*_{\mathrm{orb}}(X)\times H^*_{\mathrm{orb}}(X)\to H^*_{\mathrm{orb}}(X)$ に定まるのも同様である．

軌道体コホモロジーの classical な積構造についてはまったく述べなかったが，これは定義により軌道体量子コホモロジーの積で $Q=t=0$ とおいたものである．軌道体コホモロジーの場合は，classical な積を定義する際にも次数ゼロの軌道体安定写像のモジュライを考える必要があり，その積は単なるカップ積とは異なる (カップ積は次数付けと整合的ではない)．詳しくは [9] を見られたい．

2.3. **小量子 D 加群**. 今までに出てきた量子 D 加群はコホモロジー群 $H^*_{\mathrm{orb}}(X)$ 全体の上の D 加群であったが，これを線形部分空間 $H^2(X)\subset H^*_{\mathrm{orb}}(X)$ の上の D 加群に制限して考えることもよくある．これを小量子 D 加群という．ここで，$H^2(X)$ には twisted sector は含まれていないことに注意する．さて，1 節と同じく $H^*_{\mathrm{orb}}(X)$ の基底を $\phi_0,\dots,\phi_s$ とし，$t^0,\dots,t^s$ を双対な $H^*_{\mathrm{orb}}(X)$ の線形座標とする．ここで，$\phi_1,\dots,\phi_r$ は $H^2(X,\mathbb{Q})$ の基底とする．$\mathrm{Pic}^{\mathrm{orb}}(X)$ を軌道体複素直線束 (complex line orbibundle) の同型類のなす $\mathbb{Z}$ 加群とする．(holomorphic structure は考えていない.) 第一 Chern 類を取ることにより，$\mathrm{Pic}^{\mathrm{orb}}(X)/\mathrm{torsion}$ を $H^2(X,\mathbb{Q})$ の格子とみなす．$\mathrm{Pic}^{\mathrm{orb}}(X)/\mathrm{torsion}$ の $\mathbb{Z}$ 基底 $p_1,\dots,p_r$ であって，任意の軌道体安定写像のクラス $[C]$ に対して，$\langle p_a,[C]\rangle\ge 0$ を満たすものをとる．$Q_1,\dots,Q_r$ を $p_1,\dots,p_r$ に双対な変数として，$H_2(X,\mathbb{Z})$ の群環の元 Q^d を

$$Q^d=Q_1^{\langle p_1,d\rangle}\cdots Q_r^{\langle p_r,d\rangle} \tag{2}$$

と書くことにする．Q_a の冪は一般に有理数となる．$\phi_a=\sum_{b=1}^r c_{ab}p_a$ とおくとき，種数 0 の軌道体 Gromov-Witten ポテンシャル F_0 は次の因子公理 (divisor axiom) を満たす．

$$\frac{\partial F_0}{\partial t^a}=\sum_{b=1}^r c_{ab}Q_b\frac{\partial F_0}{\partial Q_b}+Q\text{ に依存しない }t\text{ の 2 次式}$$

t の 2 次式の部分は F_0 の 3 回微分を考えるときは消えるので量子積を考える際には無視できる．この式から，t の $H^2(X)$ 方向は本質的に $\log Q$ 方向と同一視されることが分かり，結局小量子 D 加群は次のような平坦接続で定義されるものと等価である．

$$\nabla^z_a:=zQ_a\frac{\partial}{\partial Q_a}+(p_a*)|_{t=0}$$

この平坦接続は自明束 $H^*_{\mathrm{orb}}(X)\times H^2(X,\mathbb{C}^*)\to H^2(X,\mathbb{C}^*)$ の ($Q=0$ の周りの形式的な) 接続である．ここで，$(Q_1,\dots,Q_r)$ は $H^2(X,\mathbb{C}^*)$ の座標とみなしている．以下では，小量子 D 加群は上の平坦接続で与えられる $H^2(X,\mathbb{C}^*)$ 上の D 加群と考える．また，軌道体小量子コホモロジーとは軌道体量子コホモロジーを $t=0$ に制限したもののことと約束する．

この小量子 D 加群はもともとの量子 D 加群より情報が少なくなっている．しかし，次のような場合には量子コホモロジー全体が小量子コホモロジー (ないし D 加群) から回復されることが分かっている．

- X が多様体で，$H^*(X)$ が $H^2(X)$ のカップ積で生成される場合 [23].
- (軌道体) 小量子コホモロジーが半単純で，オイラー作用素の量子積の固有値が全て互いに異なる場合 [13].
- (軌道体) 小量子コホモロジーが $H^2(X)$ の量子積で生成されている場合 [21, 30].

後に出てくる，トーリック軌道体 X の量子コホモロジーの場合は $\pi_1^{\mathrm{orb}}(X)=\{1\}$ であれば 2 番目と 3 番目が成り立っており，小量子 D 加群を考えるだけで十分である．この話

題については昨年の幾何学シンポジウムの予稿集 [22] でも述べたのでここでは深く立ち入らない．

3. 半無限コホモロジーの壁越え

この節ではトーリック多様体に対する S^1 同変な半無限コホモロジー (または S^1 同変 Floer コホモロジー) について述べ，それと量子 D 加群の関係を調べる．Givental は [15] においてシンプレクティック多様体の自由ループ空間の普遍被覆に対する仮想的な S^1 同変 Floer 理論を提唱した．ここで，S^1 作用はループの回転である．Givental は同変 Floer 理論において，次が成り立つであろう事を観察した．Q を自由ループ空間の普遍被覆 $\widetilde{LX}$ に作用する被覆変換とし，P を次で定義される $\widetilde{LX}$ の上の S^1 同変 2 次微分形式 (Duistermaat-Heckmann 形式) とする．

$$P := \int_{S^1} \mathrm{ev}_t^*(p)dt + z\mathcal{A}_p, \quad \mathcal{A}_p = \int_{D^2} g^*p.$$

ここで，p は X 上の Kähler 形式，$\mathrm{ev}_t\colon \widetilde{LX} \to X$ は点 $t \in S^1$ での評価写像，また $\mathcal{A}_p$ は作用汎関数で $g\colon D^2 \to X$ は与えられたループを境界に持つ円盤である．また，変数 z は 1 点の S^1 同変コホモロジーの 2 次の生成元である．P を Q で引き戻すと $Q^*(P) = P - z$ と振舞うので，P と Q が同変 Floer コホモロジーに作用するとすれば次の交換関係を満たすことが予想される．

$$[P, Q] = zQ$$

この観察から，Givental は同変 Floer コホモロジーが (P の作用を微分作用素とみなすことで)D 加群の構造を持ち，小量子 D 加群と同型になると予想した．講演者は [20] において，Givental の heuristic な議論に基づいてトーリック多様体 (およびその中の完全交差) に対し半無限コホモロジーを厳密に構成し，それが小量子 D 加群と同型になることを示した．ここではその構成が軌道体に対してもうまくいくことを示すと共に，壁越えを調べる場合にも有効であることを述べたい．序で述べたように，Gromov-Witten 理論は冪級数で定義され摂動論的であるのに対し，ミラーは最初から大域的に定義された非摂動論的な対象である．ここでの観点は，半無限コホモロジーを非摂動論的で大域的な対象とみなし，いわばミラーの代わりとして用いよう，ということである．

3.1. **半無限 S^1 同変コホモロジー**．トーリック軌道体は $\mathbb{C}^N$ の GIT 商 (Geometric Invariant Theory quotient) として定義され，さらにシンプレクティック商としても書くことができる．$\mathbb{C}^N$ に r 次元のトーラスが次のように作用しているとする．

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \cdot (z_1, \ldots, z_N) = (\lambda^{u_1} z_1, \ldots, \lambda^{u_r} z_r), \quad \lambda_i \in \mathbb{C}^*.$$

ここで，$u_i = (u_{i1}, \ldots, u_{ir}) \in \mathbb{Z}^r$ であり $\lambda^{u_i} = \prod_{a=1}^r \lambda_a^{u_{ia}}$ とした．トーリック軌道体は，基本的に $\mathbb{C}^N$ からいくつかの座標部分空間を抜いたものを上のトーラス作用で割ったものになる．

$$X := \mathbb{C}^N \setminus \{\text{coordinate subspaces}\} \Big/ (\mathbb{C}^*)^r$$

これはモーメント写像のレベル集合のコンパクトトーラス $(S^1)^r \subset (\mathbb{C}^*)^r$ によるシンプレクティック商としても書かれる．

$$X = \mu^{-1}(\omega)/(S^1)^r, \quad \mu\colon \mathbb{C}^N \to \mathbb{R}^r, \quad (z_1, \ldots, z_N) \mapsto \sum_{i=1}^N u_i |z_i|^2$$

ここで，$\omega \in \mathbb{R}^r$ のとり方によって X のシンプレクティック形式が決まる．モーメント写像の値の空間 $\mathbb{R}^r$ は実余次元 1 の線形部分空間で仕切られたいくつかの部屋 (chamber) にわかれ，どの部屋から ω をとるかによって (複素多様体として) 異なるトーリック多様体が得られる．部屋の選択は GIT 商においてどういう座標部分空間を抜くかという選択に対応している．この ω が 1 つの部屋からその隣の部屋に動くことを壁越え (wall-crossing) と呼ぶ．トーリック軌道体のループ空間の普遍被覆の代数的なモデル L_X を次のように構成する．

$$L_X := \mathbb{C}[t,t^{-1}]^N \setminus \{\text{coordinate subspaces}\} \Big/ (\mathbb{C}^*)^r.$$

ここで，t はループのパラメータで $\mathbb{C}[t,t^{-1}]^N$ は $\mathbb{C}^N$ へのループ空間の代数的な対応物である．$\mathbb{C}[t,t^{-1}]^N$ は無限次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間であり，上の商は無限次元のトーリック軌道体と考えることができる．L_X もシンプレクティック商として書くことができる．

$$L_X = \mu_L^{-1}(\omega)/(S^1)^r, \quad \mu_L \colon \mathbb{C}[t,t^{-1}]^N \to \mathbb{R}^r, \quad (z_1(t),\dots,z_N(t)) \mapsto \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \sum_{i=1}^N u_i |z_{i\nu}|^2$$

ここで $z_{i\nu}$ は $z_i(t) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} z_{i\nu} t^\nu$ のフーリエ展開係数である．ここで L_X を定義するときに使う $\omega \in \mathbb{R}^r$ は X を定義するときの ω と同じであることに注意されたい．さらに μ の値域 $\mathbb{R}^r$ に入る部屋割り構造 (chamber structure) と μ_L の値域 $\mathbb{R}^r$ に入る部屋割り構造はまったく同じである．したがって，X がある壁越えを経験すれば L_X も同時に壁越えをする．

以下では X はコンパクトで $\pi_1^{\mathrm{orb}}(X)$ が自明なトーリック軌道体とする[4]．L_X にはループの回転に対応する S^1-作用があるが，その固定点集合 $L_X^{S^1}$ は慣性軌道体の $\pi_2^{\mathrm{orb}}(X)$ 個のコピーである．

$$L_X^{S^1} \cong IX \times \pi_2^{\mathrm{orb}}(X)$$

これは L_X が通常のループ空間ではなく軌道体ループ空間 $L_{\mathrm{orb}}X$ の普遍被覆のモデルであることを意味している．軌道体ループ空間とは S^1 から軌道体 X への軌道体の間の射全体からなる空間であり，慣性軌道体は軌道体ループ空間の定数ループの空間と同一視される [8, 24]．$\pi_2^{\mathrm{orb}}(X) \cong \pi_1^{\mathrm{orb}}(L_{\mathrm{orb}}X)$ は普遍被覆を取っていることによる効果とみなせる．また軌道体量子コホモロジーは本来，軌道体ループ空間の上の Floer 理論とみなすべきものである．ループ回転の S^1 作用は Hamiltonian であり，Hamilton 関数

$$H(z_1(t),\dots,z_N(t)) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \sum_{i=1}^N \nu |z_{i\nu}|^2, \quad \text{ただし } (z_1(t),\dots,z_N(t)) \in \mu_L^{-1}(\omega).$$

を持つ．この Hamilton 関数 H に関するモース理論は，安定多様体による次の stratification を L_X に与える．

$$\cdots \subset L_{X_{\delta_1}}^\infty \subset L_{X_{\delta_2}}^\infty \subset L_{X_{\delta_3}}^\infty \subset \cdots \subset L_X$$

ここで，δ は $L_X^{S^1}$ の連結成分 X_δ をラベルする添え字であり，$L_{X_\delta}^\infty$ はモース流 $-\operatorname{grad} H$ に関する X_δ の安定多様体の閉包である．この stratification を用いて，半無限 S^1 同変コホモロジー $H_{S^1}^{\infty/2}(L_X)$ を

$$H_{S^1}^{\infty/2}(L_X) := \operatorname{inj}\lim_{\delta} H_{S^1}^*(L_{X_\delta}^\infty)$$

[4]これらの条件がない場合も半無限コホモロジーを構成することができるが，ここでは簡単のためこのように仮定する．

と定義する．ここで，帰納系は埋め込み $L_{X_{\delta_1}}^\infty \subset L_{X_{\delta_2}}^\infty$ による同変押し出しで定義される．この $H_{S^1}^{\infty/2}(L_X)$ には被覆変換 Q^d, $d \in \pi_2^{\mathrm{orb}}(X) \subset H_2(X,\mathbb{Z})$ が引き戻しにより作用し，$p_a \in \mathrm{Pic}^{\mathrm{orb}}(X) \subset H^2(X,\mathbb{Q})$ のループ空間への同変持ち上げ $P_a \in H_{S^1}^2(L_X,\mathbb{Q})$ がカップ積により作用する．これらの作用は次の交換関係を満たす．

$$[P_a, Q_b] = z\delta_{ab}Q_b, \quad z \in H_{S^1}^2(\mathrm{pt})$$

ここで，2.3 節でとったように Q_a は P_a に双対な変数である．この関係式から，$H_{S^1}^{\infty/2}(L_X)$ をトーラス $\mathcal{M}$

$$\mathcal{M} := \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[Q_1^\pm, \dots, Q_r^\pm] \cong H^2(X, \mathbb{C}^*)$$

の上の D 加群 (とくに層) とみなすことができる．この $\mathcal{M}$ を Kähler モジュライと呼ぶ．古典極限である $Q_1 = \cdots = Q_r = 0$ は $\mathcal{M}$ の点ではないことに注意したい．

3.2. **軌道体量子コホモロジーのミラー定理.** トーリック軌道体に対する軌道体量子コホモロジーは $H_{S^1}^{\infty/2}(X)$ を用いて次のように記述される．

Theorem 3.1. X をコンパクトで $c_1(TX) \geq 0$ を満たすトーリック軌道体とする．X の小量子 D 加群は $\mathcal{M}$ 上の D 加群 $H_{S^1}^{\infty/2}(L_X)$ を極限点 $Q=0$ の周りに確定特異点型の D 加群として標準延長したものに同型である．

ここで，$Q=0$ への標準延長についてすこし説明が必要である．正規交差因子 $Q_1Q_2\cdots Q_r = 0$ を付け加えて Kähler モジュライ $\mathcal{M}$ を部分的にコンパクト化したものを考える．このとき，$Q=0$ は実は商特異性を持つと考えるのが自然である．なぜなら，既に注意したように式 (2) における Q_a の冪は一般に有理数だからである．そこで，$1/m$ を集合 $\{\langle p_a, d\rangle\ ;\ d \in H_2(X,\mathbb{Z}), 1 \leq a \leq r\}$ の公約数にとり，被覆

$$\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[Q_1^{\pm 1/m}, \dots, Q_r^{\pm 1/m}] \longrightarrow \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[Q_1^\pm, \dots, Q_r^\pm]$$

の上に D 加群 $H_{S^1}^{\infty/2}(L_X)$ を引き戻す．引き戻された D 加群の $Q_a^{1/m}=0$ の回りのモノドロミーはべき単であることが分かる．Deligne の標準延長により $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[Q_1^{1/m}, \dots, Q_r^{1/m}]$ 上の $Q_1^{1/m}\cdots Q_r^{1/m} = 0$ に沿って対数的極を持つ D 加群が得られる．

例 3.2. 前の例 2.1 の $X = \mathbb{P}(1,2,2,4)$ の軌道体量子コホモロジーを考える．半無限コホモロジー $H_{S^1}^{\infty/2}(L_X)$ はある元 $\Delta \in H_{S^1}^{\infty/2}(L_X)$ で生成され，次の関係式により定まる．

$$\{Q - P(2P)^2(2P-z)^2 4P(4P-z)(4P-2z)(4P-3z)\}\Delta = 0$$

ここで P, Q は $[P,Q] = zQ$ なる交換関係を満たす．一方，軌道体小量子コホモロジー $QH_{\mathrm{orb}}^*(X)$ は $p = c_1(\mathcal{O}(1)) \in H^2(X)$ により生成され，基底は次で与えられる．

$$\begin{aligned}
H^*(X) &\quad 1, \quad p, \quad p^2 = p*p, \quad p^3 = p*p*p, \\
H^*(X_{(-1)}) &\quad 1_{[X_{(-1)}]} = 64Q^{-1/2}p^{*5}, \quad p.1_{[X_{(-1)}]} = 64Q^{-1/2}p^{*6}, \quad p^2.1_{[X_{(-1)}]} = 64Q^{-1/2}p^{*7}, \\
H^*(X_{(i)}) &\quad 1_{[X_{(i)}]} = 1024Q^{-3/4}p^{*8}, \\
H^*(X_{(-i)}) &\quad 1_{[X_{(-i)}]} = 16Q^{-1/4}p^{*4}.
\end{aligned}$$

ここで $\deg Q = 9$ である．全ての量子積は上と関係式 $Q = 4096p^{*9}$，量子積の結合性によって一意に定まる．上の基底に対応する量子 D 加群の元は次で与えられる．

$$\begin{array}{rl} H^*(X) & \Delta, \quad P\Delta, \quad P^2\Delta, \quad P^3\Delta, \\ H^*(X_{(-1)}) & Q^{-1/2}\Delta_{1/2}, \quad PQ^{-1/2}\Delta_{1/2}, \quad P^2Q^{-1/2}\Delta_{1/2}, \\ H^*(X_{(i)}) & Q^{-3/4}\Delta_{3/4}, \\ H^*(X_{(-i)}) & Q^{-1/4}\Delta_{1/4}. \end{array}$$

ただし，$\Delta_{1/4} = P(2P)^2(4P)\Delta$, $\Delta_{1/2} = P(2P)^2(4P)(4P-z)\Delta$, $\Delta_{3/4} = P(2P)^2(2P-z)^2(4P)(4P-z)(4P-2z)\Delta$ とおいた．

3.3. **壁越え**．トーリック軌道体 X が壁越えするとき，$H^{\infty/2}_{S^1}(L_X)$ は不変に保たれる．なぜなら，壁越えにおいて L_X は余次元が無限大の集合を除いて変化しないからである．しかし Kähler 錐の変化により，座標 $Q_1,\dots,Q_r$ の選び方が変わり，モジュライ空間 $\mathcal{M}$ の極限点 $Q=0$ は変化することになる．モーメント写像の値の空間 $\mathbb{R}^r$ の部屋割り構造が定める扇のことを二次的扇 (secondary fan) と呼ぶ．一般に Kähler モジュライ $\mathcal{M}$ はこの二次的扇が定めるトーリック軌道体にコンパクト化される．$\mathbb{R}^r$ の部屋は二次的扇の最大次元の錐であり，$\mathcal{M}$ に付け加わる極限点に対応する．したがって壁越えで互いにつながっている各々のトーリック軌道体は $\mathcal{M}$ の異なる極限点を与え，各極限点の近傍に D 加群 $H^{\infty/2}_{S^1}(L_X)$ を標準延長したものが各々の小量子 D 加群となる．ただし，前の定理にあった $c_1(TX) \ge 0$ という条件が壁越えで保たれるためには，$\mathbb{R}^r$ 内の壁が $c_1(TX)$ を含まないといけない．(ここで，$\mathbb{R}^r$ は自然に $H^2(X,\mathbb{R})$ と同一視される．)

半無限コホモロジーに双対なホモロジー理論 $H_{\infty/2}^{S^1}(L_X)$ が安定多様体を不安定多様体に取り替えることで定義される．このホモロジー理論は Poincaré 同型 $H^{\infty/2}_{S^1}(L_X) \cong H_{\infty/2}^{S^1}(L_X)$ を持ち，次のようなペアリングが幾何学的に定まる．

$$\langle \cdot,\cdot \rangle \colon H_{\infty/2}^{S^1}(L_X) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{M}}[z]} H^{\infty/2}_{S^1}(L_X) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{M}}[z]$$

これは小量子 D 加群では $H^*_{\mathrm{orb}}(X)$ に入るペアリング (1) と同一視される．

Theorem 3.3. 二つのトーリック軌道体 X と Y が $c_1(TX)$ を含む余次元 1 の壁に関する壁越えで移りあうとする．このとき，自然な同型 $H^{\infty/2}_{S^1}(L_X) \cong H^{\infty/2}_{S^1}(L_Y)$ があり上のペアリングはこの同型で保たれる．

壁が $c_1(TX)$ を含むという条件は X と Y の間の双有理写像が標準類 (canonical class) を保つ，という条件に対応しており，$c_1(TX) = c_1(TY)$ が成り立つことが分かる．上の定理はトーリックの間のクレパント解消や flop などの場合を含んでいる．ただし，ここでは複雑になるので述べなかったが，クレパント解消 $Y \to X$ の場合には軌道体 X の半無限コホモロジーの定義を多少変更する必要がある．($H^2(X)$ より $H^2(Y)$ が大きいことが原因である.)

4. 平坦構造

前節では，異なる量子 D 加群が 1 つの大域的な対象 $H^{\infty/2}_{S^1}(L_X)$ から得られることを観察した．これは量子 D 加群がお互いに変形同値 (deformation equivalent) であることを意味するが，Gromov-Witten ポテンシャルが解析接続でつながっているかどうかはより

微妙な問題である．半無限コホモロジー $H^{\infty/2}_{S^1}(L_X)$ と小量子 D 加群を同一視するためには，$H^{\infty/2}_{S^1}(L_X)$ の極限点 $Q=0$ の周りの自明化

$$H^{\infty/2}_{S^1}(L_X) \cong H^*_{\mathrm{orb}}(X) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{M}}[z]$$

が必要である．この自明化のことを平坦構造と呼ぶことにしよう．(この自明化は結局 Kähler モジュライ $\mathcal{M}$ の平坦座標を決めるからである.) 平坦構造は齋藤恭司 [33] によって孤立特異点の芽の半普遍開折の底空間の持つ構造として考えられたものであるが，ここではより一般的な意味で考える．この平坦構造を決めることは軌道体量子コホモロジーの持つ Frobenius 構造 [13] に相当する[5]．斎藤盛彦や Barannikov による平坦構造の構成 [34, 4] の要点は Hodge 構造とその opposite filtration との交わりを考えることであった．(量子コホモロジーの文脈では Coates-Givental[12], Guest[17] でループ群の Birkhoff 分解を用いて同じことが議論されている.)

以下では，記号の節約のため $E = H^{\infty/2}_{S^1}(L_X)$ を半無限コホモロジーの定める $\mathcal{M}$ 上の D 加群とおく．E に付随する半無限 Hodge 構造の変形 [4] は次のように定義できる．$\mathcal{H}$ を E の多価な平坦切断の空間とする．

$$\mathcal{H} := \{s \in E \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{M}}[z]} \mathcal{O}_{\mathcal{M}}((z^{-1}))\ ;\ P_a s = 0,\ s\colon \text{multi-valued}\}$$

この $\mathcal{H}$ は $\mathbb{C}((z^{-1}))$ ベクトル空間になっている．$\mathcal{M}^\circ \subset \mathcal{M}$ を E が局所自由になる開集合とする．平坦切断 s はその普遍被覆 $\widetilde{\mathcal{M}^\circ}$ の上に引き戻すと 1 価の切断である．各点 $q \in \widetilde{\mathcal{M}^\circ}$ に対し E のファイバー E_q は

$$E_q \ni v \longmapsto \text{flat section } s \in \mathcal{H} \text{ such that } s(q) = v$$

によって $\mathcal{H}$ に埋め込まれていると考える．E_q は $\mathbb{C}[z] = H_{S^1}(\mathrm{pt})$ 自由加群であり，固定された $\mathbb{C}((z^{-1}))$ ベクトル空間 $\mathcal{H}$ の中を動く．この族 $\{E_q \subset \mathcal{H}\}_{q \in \widetilde{\mathcal{M}^\circ}}$ が半無限 Hodge 構造の変形である．一方，Hodge 構造に opposite な部分空間とは，次を満たす自由 $\mathbb{C}[\![z^{-1}]\!]$ 加群 $\mathcal{H}_- \subset \mathcal{H}$ のこととする．

$$\mathcal{H}_-/z^{-1}\mathcal{H}_- \cong \mathcal{H}_- \cap E_q \cong E_q/zE_q.$$

ただし，上の同型は自然な写像が誘導するもの．これを用いて，ファイバー E_q の自明化 (平坦構造) が次のように与えられる．

$$E_q \cong (\mathcal{H}_- \cap E_q) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[z] \cong (\mathcal{H}_-/z^{-1}\mathcal{H}_-) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[z].$$

$\mathcal{M}$ の極限点に対応するトーリック軌道体 X ごとに，I 函数と呼ばれる D 加群 E の基本解が L_X の幾何を用いて定義される．

$$I_X\colon E = H^{\infty/2}_{S^1}(L_X) \longrightarrow H^*_{\mathrm{orb}}(X) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{M}^\circ}}((z^{-1}))$$

基本解は定義によって平坦切断を定数の切断に移すので，I_X により平坦切断の空間 $\mathcal{H}$ は $H^*_{\mathrm{orb}}(X) \otimes \mathbb{C}((z^{-1}))$ と同一視される．軌道体量子コホモロジー $QH^*_{\mathrm{orb}}(X)$ の平坦構造は上の同一視の下，次の opposite な部分空間によって与えられる．

$$\mathcal{H}^X_- := H^*_{\mathrm{orb}}(X)[\![z^{-1}]\!] \subset H^*_{\mathrm{orb}}(X) \otimes \mathbb{C}((z^{-1})) \cong \mathcal{H}.$$

[5] ここでは小量子コホモロジーを考えているので，$\mathcal{M}$ はいわゆる Frobenius 多様体ではなくその部分多様体である．2.3 節の最後も参照．

壁越えでつながる2つのトーリック軌道体 X, Y (ただし壁は $c_1(TX)=c_1(TY)$ を含むとする) をとるとき，二つの基本解はある定数の線形変換 $T(z,z^{-1})$ で結ばれる．

$$I_Y = T(z,z^{-1}) \circ I_X, \quad T(z,z^{-1})\colon H^*_{\mathrm{orb}}(X)\otimes\mathbb{C}((z^{-1})) \to H^*_{\mathrm{orb}}(Y)\otimes\mathbb{C}((z^{-1})).$$

$H^*_{\mathrm{orb}}(X)\otimes\mathbb{C}((z^{-1}))$ には次のシンプレクティック形式 Ω^X が定義できる．

$$\Omega^X(f(z),g(z)) := \mathrm{Res}_{z=0}\, dz\langle f(-z), g(z)\rangle_X, \quad f,g\in H^*_{\mathrm{orb}}(X)\otimes\mathbb{C}((z^{-1})).$$

ここで，$\langle\cdot,\cdot\rangle_X$ は軌道体コホモロジーのペアリング (1) である．ペアリングは壁越えで保たれることから，線形変換 $T(z,z^{-1})$ は (Ω^X,Ω^Y)-シンプレクティック変換であることが分かる．平坦構造の定義により $\mathcal{H}^Y_- = T(z,z^{-1})\mathcal{H}^X_-$ が成り立てば (つまり T が z の正冪を含まなければ) 二つの平坦構造は一致する．

一般に軌道体量子コホモロジーの平坦構造を定める opposite な部分空間 $\mathcal{H}_-$ は次の条件を満たすことが要請される．

- $\mathcal{H}_-$ は座標軸 $Q_a^{1/m}=0$, $1\le a\le r$ に関するモノドロミーで不変であり，モノドロミーは $\mathcal{H}_-/z^{-1}\mathcal{H}_-$ に自明に作用する．
- $\mathcal{H}_-$ は $\mathcal{H}$ のある次数付けに関し斉次なベクトル部分空間である．

これらの条件で一意に $\mathcal{H}_-$ が定まることもある．しかし一般には $\mathcal{H}_-$ には不定性があり，壁越えで $\mathcal{H}_-$ が変わる可能性もありうる[6]．ただし，変わるとしても二つの平坦構造が上記のシンプレクティック変換 $T(z,z^{-1})$ で関係していることは言える．

5. 今後の問題: 実構造・整構造・量子化

通常の Hodge 理論と同じように，半無限 Hodge 理論である量子 D 加群においても実構造や整構造を研究することが，大域的な構造の理解に役立つと考えられる．実構造は Cecotti-Vafa[7] や Dubrovin[14]，Hertling[18] によって tt^* 幾何の名前で研究されている．また実構造は高種数理論における正則異常 (holomorphic anomaly)[5] とも関係している．整構造は実構造の精密化であり，Gromov-Witten ポテンシャルの保型性とかかわると考えられる．トーリック軌道体の量子コホモロジーの場合にはミラー対称性があるので，ミラーの特異点 (Landau-Ginzburg 模型) を用いて実構造や整構造を定義することができる．一般の (軌道体) 量子コホモロジーにどのような実構造や整構造が定義されるかは現時点では不明である．われわれの壁越えの設定では，次の問題が考えられよう．

- 半無限同変コホモロジー $H^{\infty/2}_{S^1}(L_X)$ に入る整構造を記述せよ．
- 量子コホモロジーのクレパント解消予想では変数 Q を1の冪根に特殊化する必要があるが，これを実構造・整構造を使って説明できるか．
- 壁越えに際して2つの多様体の導来圏が同値になることと，量子コホモロジーが解析接続でつながることの関係を調べよ．導来圏の持つ整構造は量子コホモロジーにどうかかわるだろうか．

3番目に関連して，Kähler モジュライと Bridgeland による導来圏の安定性条件のモジュライ [6] の間の関係を調べる，という問も自然に生まれる．

高種数の理論は種数0の Hodge 理論の「量子化」とみなすことができる．例えば Witten は3次元 Calabi-Yau 多様体の B 模型において $H^3(X)$ を相空間 (phase space) と考えてその量子化を導入し，位相的弦理論の分配函数をその量子力学系の波動関数と捉えた [36]．また Givental のシンプレクティックベクトル空間 $(H^*(X)\otimes\mathbb{C}((z^{-1})),\Omega^X)$ の量子化を考え，量子コホモロジーが半単純な場合に，(descendant 付き)Gromov-Witten 分配函数を量子

[6]講演のときまでにはもう少し分かるかもしれない．

化されたシンプレクティック作用素を用いて書き下した [16]．この Givental の公式はトーリック多様体や A_n 型の旗多様体などの場合には正しいことが確かめられている．Givental の公式を見ていると，トーリック軌道体の壁越えにおいて，2 つの Gromov-Witten 分配函数 Z_X, Z_Y が量子化された作用素により関係すると予想できる．

$$Z_Y \propto \widehat{T(z, z^{-1})} Z_X$$

詳しい説明は省略するが，$\widehat{T(z, z^{-1})}$ は前節のシンプレクティック変換 $T(z, z^{-1})$ を量子化した作用素である．また壁越えとは別に，この量子化の構造と整構造とから Gromov-Witten 分配函数がある種の「量子保型性」とでもいうべき性質を満たすことが分かれば大変面白いであろう．少なくとも物理においては B 模型を使うことによりこのようなことが認識されているようである [3]．

References

1. D. Abramovich, T. Graber, A. Vistoli, *Algebraic orbifold quantum products.* Orbifolds in mathematics and physics (Madison, WI, 2001), pp.1–21, Comtemp. Math., 310, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2002. math.AG/0112004.
2. D. Abramovich, T. Graber, A. Vistoli, *Gromow-Witten theory of Deligne-Mumford stacks.* math.AG/0603151.
3. M. Aganagic, V. Bouchard, A. Klemm, lecture and private communication, June 2006, MSRI.
4. S. Barannikov, *Quantum periods –I. Semi-infinite variation of Hodge structures.* International Mathematics Research Notices Volume 2001 (2001), Issue 23, pp.1243–1264.
5. M. Bershadsky S. Cecotti, H. Ooguri, C. Vafa *Kodaira-Spence theory of gravity and exact results for quantum string amplitudes.* Commun. Math. Phys., 165 (1994) pp.311–427.
6. T. Bridgeland, *Stability conditions on triangulated categories* to appear in Ann. Maths., math.AG/0212237.
7. S. Cecotti, C. Vafa, *On classification of $N = 2$ supersymmetric theories.* Commun. Math. Phys., 158 (1993), pp.569–644. hep-th/9211097.
8. Weimin Chen, *A homotopy theory for orbispaces* math.AT/0102020.
9. Weimin Chen, Yongbin Ruan, *New cohomology theory for orbifolds.* Comm. Math. Phys. 248(2004), no.1, pp.1-31. math.AG/0004129.
10. Weimin Chen, Yongbin Ruan, *Orbifold quantum cohomology.* math.AG/0005198.
11. Weimin Chen, Yongbin Ruan, *Orbifold Gromov-Witten theory* Orbifolds in mathematics and physics (Madison, WI, 2001) Contemp. Math., 310 pp.25–85, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2002.
12. Tom Coates, A. B. Givental, *Quantum Riemann-Roch, Lefschetz and Serre.* math.AG/0110142.
13. B. Dubrovin, *Geometry of 2D quantum field theories.* In: Springer LNM, 1620 (1996), pp.120–348.
14. B. Dubrovin, *Geometry and integrability of topological-antitopological fusion.* Commun. Math. Phys. 152 (1992) pp.539–564. hep-th/9206037.
15. A. B. Givental, *Homological geometry I. Projective hypersurfaces.* Selecta Math. (N.S.) 1 (1995), no. 2, pp.325–345.
16. A. B. Givental, *Gromov-Witten invariants and quantization of quadratic hamiltonians.* Dedicated to the memory of I. G. Petrovskii on the occasion of his 100 anniversary. Mosc. Math. J. 1 (2001), no.4, pp.551–568, 645.
17. Martin Guest, *Quantum cohomology via D-modules.* Topoloby 44 (2004), no.2, pp.263-281.
18. Claus Hertling, *tt^*-geometry, Frobenius manifolds and singularities.* J. reine angew. Math. 555 (2003), pp.77–161. math.AG/0203054.
19. Jianxun Hu, Wanchuan Zhang, *Mukai flop and ruan cohomology.* Math. Ann., 330 no.3 (2004), pp.577-599. math.AG/0302022
20. Hiroshi Iritani, *Quantum D-modules and equivariant Floer theory for free loop spaces.* Mathematische Zeitschrift, 2006, vol 252, no 3, pp.577-622. math.DG/0410487.

21. Hiroshi Iritani, *Quantum D-modules and generalized mirror transformations.* Preprint: math.DG/0411111.
22. 入谷 寛 *Mirror transformations and quantum Lefschetz principle.* (Japanese) 2005 年度幾何学シンポジウム予稿集
23. M. Kontsevich, Yu. Manin, *Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry.* Commun. Math. Phys. 164 (1994), pp.525-562.
24. E. Lupercio, B. Uribe, *Loop groupoids, gerbes, and twisted sectors on orbifolds.* pp.163-184, Comtemp. Math., 310. math.AT/0110207.
25. Y.-P. Lee, H.-W. Lin, C.-L. Wang *Ordinary flops, correspondences, and invariance of quantum cohomology. (temporary title)* in preparation.
26. An-Min Li, Yongbin Ruan, *Symplectic surgery and Gromov-Witten invariants of Calabi-Yau 3-folds I.* Invent. Math. 145, no.1 (2001), pp.151–218. math.AG/9803036.
27. Yu. Manin, *Sixth Painlevé equation, universal elliptic curve, and mirror of* $\mathbb{P}^2$. AMS Transl. (2) val.186 (1998), pp.131–151. Preprint alg-geom/9605010.
28. I. Moerdijk, *Orbifolds as groupoids: an introduction.* Orbifolds in mathematics and physics (Madison, WI, 2001), pp.205-222, Contemp. Math. 310, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002. math.DG/0203100.
29. I. Moerdijk, D. Pronk, *Orbifolds, sheaves and groupoids.* K-theory, 12 (1997), no.1 pp.3–21.
30. Michael Rose, *A reconstruction theorem for genus zero Gromov-Witten invariants of stacks.* math.AG/0605776.
31. Yongbin Ruan, *Stringy geometry and topology of orbifolds* Symposium in Honor of C.H. Clemens (Salt Lake City, 2000), Contemp. Math. 312, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, pp.187-233. math.AG/0011149.
32. Yongbin Ruan, *Stringy orbifolds* In A. Adem, J. Morava, and Y. Ruan (eds.), Orbifolds in Mathematics and Physics, Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI. 310, (2002), pp.259-299. math.AG/0201123.
33. Kyoji Saito, *Period mapping associated to a primitive form.* Publ. RIMS, Kyoto Univ., 19 (1983), pp.1231-1261.
34. Morihiko Saito, *On the structure of Brieskorn lattices.* Ann. Inst. Fourier. Grenoble 39 (1989), pp.27–72.
35. Ichiro Satake, *On a generalization of the notion of a manifolds.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 42 pp.359-363, 1956.
36. E. Witten, *Quantum background independence in string theory.* Nucl. Phys. B 373, 187 (1992) hep-th.9306122.
37. Takehiko Yasuda, *Twisted jets, motivic measure and orbifold cohomology.* Compositio Math. 140 (2004), pp.396–422. math.AG/0110228.

E-mail address: `iritani@math.kyoto-u.ac.jp`