トーリック多様体のミラー対称性

入谷 寛 (京都大学 数学教室)*

概 要

トーリック多様体の大同変量子コホモロジー (big equivariant quantum cohomology) のミラーをシフト作用素を使って構成する．本稿の内容は論文 [13, 14] に基づく．

1. 序

トーリック多様体に対するミラー対称性はGivental [10]やHori-Vafa [12]らによって提唱され，広く研究されてきた．特にGromov-Witten不変量についてはGivental [9] やLian-Liu-Yau [15] によるミラー定理がよく知られている．近年，Okounkov-Pandharipande [17], Braverman-Maulik-Okounkov [2] らによって同変量子コホモロジーの同変変数をシフトする「シフト作用素」なるものが導入されている．本稿ではシフト作用を用いて，同変量子コホモロジーに対するミラーの “tautological” な構成を与える．この構成においてはミラーのLandau-Ginzburg ポテンシャル，原始形式，I 関数，等がGromov-Witten不変量の言葉で記述され，ミラー対称性の証明は（ミラーが構成できれば）定義からほとんど明らかになる．また，この構成ではトーリック多様体のコンパクト性や$c_1(X)$の半正値性などの技術的仮定が必要ではないことも利点である．

2. トーリック多様体の同変ミラー

まず，トーリック多様体のGivental [9]による同変ミラーについて紹介したい．トーリック多様体XのミラーはLandau-Ginzburg 模型と呼ばれる多様体Yとその上の関数fの組(Y,f)で与えられる．fはLandau-Ginzburg ポテンシャルと呼ばれる．トーリック多様体の場合は$Y=(\mathbb{C}^\times)^n$である（ただし$n=\dim X$).

トーリック多様体は扇(fan)と呼ばれる$\mathbb{R}^n$の有理凸多面錐の集まりを使って記述されることを思い出そう．$b_1,\dots,b_n\in\mathbb{Z}^n$を$X$の扇に属する1次元錐の原始的な生成元とするとき，$X$のミラーは次の形をしている．

$$f(x)=Q^{\beta_1}x^{b_1}+Q^{\beta_2}x^{b_2}+\cdots+Q^{\beta_m}x^{b_m}.$$

ここで$b_i=(b_{i,1},\dots,b_{i,n})$，$x=(x_1,\dots,x_n)\in(\mathbb{C}^\times)^n$ とするとき$x^{b_i}=x_1^{b_{i,1}}\cdots x_n^{b_{i,n}}$とおいた．また，$\beta_1,\dots,\beta_m\in H_2(X,\mathbb{Z})$は適当な曲線のクラスであり，$Q$はNovikov変数である．係数$Q^{\beta_i}$は形式的には群環$\mathbb{C}[H_2(X,\mathbb{Z})]$の元と解釈できるが，しばらくは$Q$は$\operatorname{rank} H_2(X)$個の$\mathbb{C}^\times$ 変数と考えることにする.（すなわち環順同型$\mathbb{C}[H_2(X,\mathbb{Z})]\to\mathbb{C}^\times$をとって$Q^{\beta_i}$を複素数と見なす．）$\beta_1,\dots,\beta_m$は扇から決まる次の完全列

$$0\longrightarrow H_2(X,\mathbb{Z})\longrightarrow\mathbb{Z}^m\xrightarrow{(b_1,\dots,b_m)}\mathbb{Z}^n\longrightarrow 0$$

の分裂$(\beta_1,\dots,\beta_m)\colon\mathbb{Z}^m\to H_2(X,\mathbb{Z})$を与えるものである．分裂のとり方はたくさんあるが，互いにx座標の座標変換でつながるのでどれをとってもよい．

本研究は日本学術振興会，科学研究費25400069, 26610008, 23304002の支援を受けた．

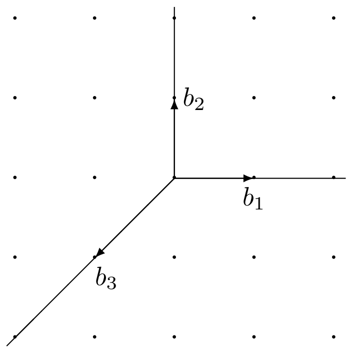
*606-8502, 京都市左京区北白川追分町
e-mail: `iritani@math.kyoto-u.ac.jp`

トーリック多様体 X には同じ次元の代数トーラス $T=(\mathbb{C}^\times)^n$ が作用している．この作用に関する同変ミラーは，同変変数を $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ として次で与えられる．

$$f_\lambda(x)=Q^{\beta_1}x^{b_1}+\cdots+Q^{\beta_m}x^{b_m}-\lambda_1\log x_1-\cdots-\lambda_n\log x_n$$

同変ミラーは座標変換を考慮しても分裂 $\beta_1,\ldots,\beta_m$ の取り方に依存するが，$f_\lambda(x)$ は Q のみに依存する定数差を除いて決まるため，以下に説明する Jacobi 環や twisted de Rham コホモロジーは分裂のとり方によらない．

例 2.1 複素射影平面 $\mathbb{CP}^2$ の扇は次である．



従って同変ミラーは

$$f(x)=x_1+x_2+\frac{Q}{x_1x_2}-\lambda_1\log x_1-\lambda_2\log x_2$$

定理 2.2 (Givental [9]) X はコンパクトトーリック多様体で $c_1(X)\geq 0$ なるものとする．適当な Q 変数のミラー変換の下で，次が成り立つ．

(1) 同変小量子コホモロジー環 $QH_T^*(X)$ と f_λ の Jacobi 環は同型である．

$$QH_T^*(X)\cong \mathrm{Jac}(f_\lambda)$$

ここで $\mathrm{Jac}(f_\lambda)=\mathbb{C}[x_1^{\pm},\ldots,x_n^{\pm}]/(\partial_1 f_\lambda,\ldots,\partial_n f_\lambda)$ は Jacobi 環．

(2) さらに同変小量子 D 加群 $QDM_T(X)$ と f_λ の twisted de Rham コホモロジーは同型である．

$$QDM_T^*(X)\cong H^n(\Omega^\bullet_{(\mathbb{C}^\times)^n}[z],zd+df_\lambda\wedge)$$

注意 2.3 (同変) 小量子コホモロジー環とは (同変) コホモロジー環を Novikov 変数 Q により変形したものであり，具体的にはベクトル空間 $H_T^*(X)$ に Q に依存する可換・結合的な量子積 $\star_Q$ を導入したものである．同変小量子 D 加群とは量子積で与えられる次の平坦接続（量子接続）のことである．

$$\nabla=d+\frac{1}{z}\sum_{i=1}^r(p_i\star_Q)\frac{dQ_i}{Q_i} \tag{1}$$

ただし $p_1,\ldots,p_r$ は Novikov 変数 $Q_1,\ldots,Q_r$ に双対な $H_T^2(X)$ の基底であり，z は $\mathbb{C}^\times$ に値をとる変数．twisted de Rham コホモロジーは Q 方向に Gauss-Manin 接続と呼ばれ

る平坦接続が入っており，(2) の同型はこの二つの平坦接続の同型である．また twisted de Rham コホモロジーの元

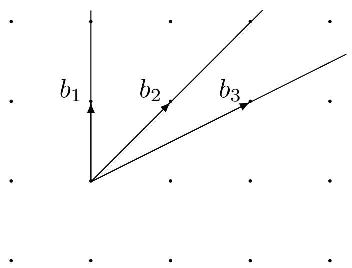
$$\left[\phi(x)\frac{dx_1\dots dx_n}{x_1\dots x_n}\right] \in H^n(\Omega^\bullet_{(\mathbb{C}^\times)^n}[z], zd + df_\lambda\wedge), \qquad \phi(x) \in \mathbb{C}[x_1^\pm, \dots, x_n^\pm]$$

は $f(x)$ の Lefschetz thimble Γ に対して次の "exponential period" を定める．

$$\int_\Gamma e^{f_\lambda(x)/z}\phi(x)\frac{dx_1\dots dx_n}{x_1\dots x_n}.$$

$e^{f_\lambda(x)/z}\phi(x)\frac{dx_1\dots dx_n}{x_1\dots x_n}$ が d-exact になるのは丁度 $\phi(x)\frac{dx_1\dots dx_n}{x_1\dots x_n}$ が $(d + z^{-1}df_\lambda\wedge)$-exact になるときであることに注意されたい．従って twisted de Rham コホモロジーはこのような exponential period を解としてもつ D 加群である．

例 2.4 コンパクトではないが，ミラー変換が必要な例を挙げておく．



ここに挙げた扇は A_1 特異点 $\mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ のクレパント解消 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$ を与える．この場合，ミラー変換後の Landau-Giznburg ポテンシャルは

$$f_\lambda(x) = x_2(1 + (1+Q)x_1 + Qx_1^2) - \lambda_1 \log x_1 - \lambda_2 \log x_2$$

で与えられる．中央の項の係数 $(1+Q)$ がミラー変換の効果である．Chan-Lau-Leung-Tseng [3] らにより，ミラー変換後のポテンシャル関数はラグランジアントーラスファイバーに境界を持つ holomorphic disc の数え上げ (open Gromov-Witten 不変量）の母関数としてあらわされることが分かっている．

ミラーの大量子コホモロジーへの拡張は Barannikov [1] や Douai-Sabbah [5] らによって考えられた．大量子コホモロジーとは Novikov 変数 Q の他にさらにコホモロジーの変数 $\tau \in H^*(X)$ がパラメータとして入る大量子積 $\star_{Q,\tau}$ によって定まる環である．彼らは Jacobi 環 $\mathrm{Jac}(f)$ の基底となる関数の代表元 $\phi_1(x), \dots, \phi_N(x)$ を選び，ミラーとして次の $f(x)$ の miniversal deformation を考えた．

$$F(x;t) = f(x) + \sum_{i=1}^N t^i\phi_i(x)$$

ミラーのパラメータ $(t^1, \dots, t^N)$ と大量子コホモロジーのパラメータ τ は非自明なミラー写像によってつながり，miniversal deformation に伴う flat structure (Frobenius manifold structure) と大量子コホモロジーの Frobenius manifold structure が同型になる（$X = \mathbb{CP}^n$ の場合など）．本稿では彼らの構成を同変な場合に拡張する．同変コホモロジーは $\mathbb{C}$ 上無限次元なので一見複雑になるように思えるが，実は同変版が理論的には最も単純な形をしている，というのが本稿における主要な観察である．

3. Seidel 表現とシフト作用素

Seidel [18] はシンプレクティック多様体 X の Hamilton 微分同相群の π_1 の元 γ に対して量子コホモロジーの可逆元 S_γ を定義した[1]．これは群順同型

$$\pi_1(\mathrm{Ham}(X,\omega)) \to QH^*(X)^\times/\langle Q^\beta : \beta \in H_2(X,\mathbb{Z})\rangle, \qquad \gamma \longmapsto S_\gamma$$

を定め，Seidel 表現と呼ばれる．また S_γ を Seidel 元と呼ぶ．$\pi_1(\mathrm{Ham}(X,\omega))$ の元が X への $\mathbb{C}^\times$ 作用から来ているときに，Seidel 表現を同変量子 D 加群に持ち上げたものがシフト作用素と呼ばれるもので，Okounkov-Pandharipande [17] や Braverman-Okounkov-Pandharipande [2] によって導入された．

X を $T \cong (\mathbb{C}^\times)^n$ 作用を持つ滑らかな代数多様体で，T 固定点を持ち，自然な写像

$$X \to \mathrm{Spec}(H^0(X,\mathcal{O}))$$

が射影的であるものとする．さらに $H^0(X,\mathcal{O})^T = \mathbb{C}$ であり，$H^0(X,\mathcal{O})$ の T 表現としての weight のなす集合は $\mathrm{Hom}(T,\mathbb{C}^\times)\otimes\mathbb{R}$ のなかである厳密に凸な錐に含まれているものとする．$k\colon \mathbb{C}^\times \to T$ を群順同型であって，k と $H^0(X,\mathcal{O})$ の任意の T-weight のペアリングが非正となるもの[2] とする．この k に対して「Seidel 空間」E_k を次のように構成する．

$$E_k := (X \times (\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}))/(x,(v_1,v_2)) \sim (s^k \cdot x, (s^{-1}v_1, s^{-1}v_2))$$

第 2 成分への射影により E_k は $\mathbb{P}^1$ 上の X 束となる．この X 束は自明な積 $X \times D^2$ を二つとり，$k(\mathbb{C}^\times)$ 作用によってねじって張り合わせることで得られるものである．つまり

$$E_k = (X \times D^2) \cup_\varphi (X \times D^2), \qquad \varphi(x, e^{\mathtt{i}\theta}) = (k(e^{\mathtt{i}\theta})\cdot x, e^{-\mathtt{i}\theta})$$

と書くことができる．Seidel は Seidel 空間の holomorphic section を数え上げることで Seidel 表現を定義した．まずシフト作用素の定義を与えよう．E_k への $\widehat{T} = T \times \mathbb{C}^\times$ 作用を次で定義する．

$$(t,u)\cdot[x,(v_1,v_2)] = [t\cdot x, (v_1, uv_2)]$$

ここで $(t,u) \in \widehat{T}$, $[x,(v_1,v_2)] \in E_k$ である．E_k の $0 = [1:0] \in \mathbb{P}^1$ でのファイバーを X_0, $\infty = [0:1] \in \mathbb{P}^1$ でのファイバーを X_∞ とおく．X_0, X_∞ への $\widehat{T}$ 作用は次で与えられる．

$$\begin{aligned} (t,u)\cdot x &= t\cdot x & x &\in X_0 \\ (t,u)\cdot x &= tu^k\cdot x & x &\in X_\infty \end{aligned}$$

従って X_∞ への $\widehat{T}$ 作用は X_0 への $\widehat{T}$ 作用より丁度 $k\colon \mathbb{C}^\times \to T$ の分だけずれていることになる．このことがシフト作用素の定義における要点である．E_k の holomorphic section の空間のコンパクト化（E_k への安定写像のモジュライを使う）を使って作用素

$$\widetilde{\mathbb{S}}_k\colon H^*_{\widehat{T}}(X_0) \to H^*_{\widehat{T}}(X_\infty)$$

[1] Seidel は monotone と呼ばれる特別な場合に定義した．その後の McDuff らによる一般化とシンプレクティックトポロジーへの応用については [16] などを参照．

[2] この条件は $\lim_{s\to 0} s^k \cdot x$ が存在することに対応する．

が定義される．より具体的には同変Gromov-Witten不変量を使って$\widetilde{\mathbb{S}}_k$は次の式で与えられる．

$$\left(\widetilde{\mathbb{S}}_k\alpha,\beta\right)=\sum_{\substack{n\geq 0,\\ \hat{d}:\text{ section class}\\ \text{of } E_k}}\frac{Q^{\hat{d}-\sigma_{\min}}}{n!}\left\langle \iota_{0*}\alpha,\hat{\tau},\ldots,\hat{\tau},\iota_{\infty*}\beta\right\rangle_{0,n+2,\hat{d}}^{E_k,\widehat{T}}$$

ここで$\tau\in H_T^*(X)$は大量子コホモロジーのパラメータであり，$\hat{\tau}\in H_{\widehat{T}}^*(E_k)$は$\hat{\tau}|_{X_0}=\tau$, $\hat{\tau}|_{X_\infty}=\Phi_k(\tau)$ なる性質で特徴づけられるτのリフトである（Φ_kについては以下を見よ）．左辺の$(\cdot,\cdot)$は$H_T^*(X)$の同変Poincaré ペアリングであり，$\sigma_{\min}$は minimal section class と呼ばれるものである（詳細は[13]を参照）．

さらにX_0とX_∞は共にXと同型であるので，自然な同型写像

$$\Phi_k\colon H_{\widehat{T}}^*(X_0)\cong H_{\widehat{T}}^*(X_\infty)$$

がある．ただしこの写像は$H_{\widehat{T}}^*(\mathrm{pt})$加群の写像にはならず，

$$\Phi_k(f(\lambda,z)\alpha)=f(\lambda+kz,z)\Phi_k(\alpha)$$

を満たす．ここで$f(\lambda,z)\in\mathbb{C}[\lambda_1,\ldots,\lambda_n,z]=H_{\widehat{T}}^*(\mathrm{pt})$であり$\lambda_i$は$T$同変変数，$z$は$\mathbb{C}^\times$同変変数である．(この$z$は量子接続 (1) に現れるものと同じである．)

最後にこのΦ_kの逆写像と$\widetilde{\mathbb{S}}_k$とを合成してシフト作用素

$$\mathbb{S}_k:=\Phi_k^{-1}\circ\widetilde{\mathbb{S}}_k\colon H_{\widehat{T}}^*(X_0)=H_T^*(X)[z]\longrightarrow H_{\widehat{T}}^*(X_0)=H_T^*(X)[z]$$

を得る．Seidel 元はこの非同変極限として定義する．

$$S_k:=\lim_{z\to 0}\mathbb{S}_k 1\in H_T^*(X).$$

注意 3.1 Xはコンパクトと仮定していないので，この$\widetilde{\mathbb{S}}_k$の定義はequivariant localizationを用いる必要がある．しかしながら，Xおよびkに対する上述の過程の下で，$\widetilde{\mathbb{S}}_k$は同変変数を局所化しないところで定義されていることが分かる．このことは証明の中で重要である．

シフト作用素の重要な性質は次の通りである．

命題 3.2 ([2, 13]) (1) $\mathbb{S}_k$は同変変数λを$-kz$だけシフトする．

$$\mathbb{S}_k\circ\lambda_i=(\lambda_i-k_iz)\circ\mathbb{S}_k$$

(2) $\mathbb{S}_k$は量子接続と可換．量子接続を$\nabla_\alpha=\partial_\alpha+z^{-1}(\alpha\star)$とおくとき

$$\nabla_\alpha\circ\mathbb{S}_k=\mathbb{S}_k\circ\nabla_\alpha$$

ただし$\alpha\in H_T^*(X)$であり，$(\alpha\star)$はパラメータ$\tau\in H_T^*(X)$に依存するαの大量子積，∂_αはτの関数$f(\tau)$に対して方向微分$(\partial_\alpha f)=\lim_{h\to 0}(f(\tau+h\alpha)-f(\tau))/h$で作用するものとする．
(3) $\mathbb{S}_k$は格子$\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^\times,T)$の作用になる．$k,l\in\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^\times,T)$に対して

$$\mathbb{S}_k\circ\mathbb{S}_l=Q^{d(k,l)}\mathbb{S}_{k+l}$$

ただし$d(k,l)\in H_2(X,\mathbb{Z})$は$k,l$に関して対称な元.

注意 3.3 以上は同変量子コホモロジー（A モデル）におけるシフト作用素であった．ミラーのBモデル側でのシフト作用素は非常に単純である．つまりexponential periodのλ変数を単純にシフトすればよい．$\lambda_i \to \lambda_i - k_i z$の下で，

$$\int_\Gamma e^{f_\lambda(x)/z}\phi(x)\frac{dx_1\cdots dx_n}{x_1\cdots x_n} \longrightarrow \int_\Gamma e^{f_\lambda(x)/z}x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}\phi(x)\frac{dx_1\cdots dx_n}{x_1\cdots x_n}$$

となるので，Bモデルにおけるシフト作用素は単項式$x^k = x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$の掛け算であることが分かる．(実際にはNovikov 変数の単項式の掛け算だけずれる.）このことは以下のミラーの構成の動機となっている．

4. 大同変ミラーの構成

Xをあるベクトル空間のGIT商として得られる滑らかなトーリック多様体とする．このようなトーリック多様体はaffinization $\mathrm{Spec}(H^0(X,\mathcal{O}))$上射影的である．また$X$には$X$と同じ次元の代数トーラス$T=(\mathbb{C}^\times)^n$が作用しているが，$X$は$T$固定点をもち，$H^0(X,\mathcal{O})^T = \mathbb{C}$で，$H^0(X,\mathcal{O})$の$T$-weight 全体の集合はある厳密に凸な錐に含まれる．(すなわち前節の条件が満たされる.)

$\mathbf{N} = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^\times, T)$とおく．$X$に対応する扇$\Sigma$はベクトル空間$\mathbf{N}\otimes\mathbb{R}$内の有理凸多面錐の集まりである．$|\Sigma| \subset \mathbf{N}_\mathbb{R}$で扇の台(support)を表す．すなわち扇に含まれる全ての錐の合併集合である．$\mathbf{N}\otimes\mathbb{C}^\times$上の次のような「普遍関数」を導入する．

$$F(x;\mathbf{y}) = \sum_{k\in\mathbf{N}\cap|\Sigma|} y_k x^k Q^{\beta(k)}$$

ここで$\mathbf{y} = \{y_k : k \in \mathbf{N}\cap|\Sigma|\}$は無限個のパラメータであり，$\beta(k)\in H_2(X,\mathbb{Z})$は2節で導入した$\beta_1,\ldots,\beta_m$を使って

$$\beta(k) = \sum_{i\in\sigma} c_i\beta_i \qquad \left(k\text{を含む}\Sigma\text{の錐}\sigma\text{を使って}k=\sum_{b_i\in\sigma}c_i b_i\text{と書くとき}\right) \tag{2}$$

により与えられる．正確にはここではNovikov 変数Qおよび$\mathbf{y}$を形式的変数とみて，$F(x;\mathbf{y})$を$\mathbb{C}[(\mathbf{N}\cap|\Sigma|)\times H_2(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{eff}}][\mathbf{y}]$の適当な完備化の元と見なす（詳細は[14]参照）．この普遍関数は次の特殊化

$$y_k = \begin{cases} 1 & k\in\{b_1,\ldots,b_m\}\text{のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

の下で2節でのミラーのポテンシャル関数$f(x)$を回復している．さらに

$$F_\lambda(x;\mathbf{y}) = F(x;\mathbf{y}) - \lambda_1\log x_1 - \cdots - \lambda_n \log x_n$$

とおく．

注意 4.1 $k\in\mathbf{N}$に対して$k\in|\Sigma|$はkと$H^0(X,\mathcal{O})$の任意のT-weightとのペアリングが非正であることと同値である．

注意 4.2 このような非常に大きな変形族 $F(x;\mathbf{y})$ を考える理由は，$\mathbf{N}\cap|\Sigma|$ の各点 k が同変コホモロジー $H_T^*(X)$ の $\mathbb{C}$ 上の基底のクラスに対応しているからである．つまり $b_1,\dots,b_m$ に対応するトーリック因子の定める同変類を $u_1,\dots,u_m\in H_T^2(X)$ と書くとき，$k\in\mathbf{N}\cap|\Sigma|$ に対して $\phi_k=\prod_{i\in\sigma}u_i^{c_i}$ とおくと（ここで (2) と同じ記号を用いた），$\{\phi_k : k\in\mathbf{N}\cap|\Sigma|\}$ は $H_T^*(X)$ の $\mathbb{C}$ 上の基底をなす．

定理 4.3 ([14]) 微分 $zd+dF_\lambda(x;\mathbf{y})\wedge$ の定める twisted de Rham コホモロジーと X の大同変量子 D 加群は同型である．

$$\Theta\colon \widehat{\Omega^n[z]}/(zd+dF_\lambda(x;\mathbf{y})\wedge)\widehat{\Omega^{n-1}[z]}\cong QDM_T(X)$$

ここで twisted de Rham cohomology のパラメータ $\mathbf{y}$ と大同変量子コホモロジーのパラメータ $\tau\in H_T^*(X)$ はある可逆な変数変換 (ミラー写像)

$$\tau=\tau(\mathbf{y})$$

で関係する．さらに次が成り立つ．

1. A モデルと B モデルのシフト作用素を関係づける．

$$\Theta\circ x^kQ^{\beta(k)}=\mathbb{S}_k\circ\Theta$$

2. Gauss-Manin 接続 ∇^{GM} と大同変量子接続 ∇^{QC} とを関係づける．

$$\Theta\circ\nabla^{\mathrm{GM}}=\nabla^{\mathrm{QC}}\circ\Theta$$

3. Θ は自然な次数付けについて斉次 (homogeneous) である．

注意 4.4 ここでは詳しく説明しないが $\widehat{\Omega^\bullet[z]}$ は Novikov 変数 Q，パラメータ $\mathbf{y}$，同変変数 λ, z が生成するある形式べき級数環上の加群であって，変数 $x_1,\dots,x_n$ についての微分形式からなるものである．詳しくは [14] を参照．

この定理における同型写像 Θ およびミラー写像 $\tau(\mathbf{y})$ の構成を簡単に説明する．実際これらの写像は定理の性質からほとんど決まってしまう．次の「普遍的」exponential form を考えよう．

$$\begin{aligned}\omega(\mathbf{y},\mathbf{y}^+)&=\exp\left(\sum_{k\in\mathbf{N}\cap|\Sigma|}\sum_{i=0}^{\infty}y_{k,i}x^kQ^{\beta(k)}z^{i-1}\right)x^{-\lambda/z}\frac{dx_1\cdots dx_n}{x_1\cdots x_n}\\&=\exp\left(\sum_{k\in\mathbf{N}\cap|\Sigma|}\sum_{i=1}^{\infty}y_{k,i}x^kQ^{\beta(k)}z^{i-1}\right)e^{F_\lambda(x;\mathbf{y})/z}\frac{dx_1\cdots dx_n}{x_1\cdots x_n}\end{aligned}$$

ここで $y_{k,0}:=y_k$ は今までのパラメータであり，

$$\mathbf{y}^+:=\{y_{k,i} : k\in\mathbf{N}\cap|\Sigma|, i\geq 1\}$$

は新しい無限個のパラメータである．$\omega(\mathbf{y},\mathbf{y}^+)$ から因子 $e^{F_\lambda(x;\mathbf{y})/z}$ を除くと $F_\lambda(x;\mathbf{y})$ に付随する twisted de Rham コホモロジーの元になるので，記号の濫用により $\omega(\mathbf{y},\mathbf{y}^+)$

を twisted de Rham コホモロジーの元と見なすことにする (注意 3.3 を見よ)．このとき，定理の条件が満たされるためには，ミラー写像 $\tau(\mathbf{y})$ および $\omega(\mathbf{y},\mathbf{y}^+)$ の Θ による像 $\Theta(\omega(\mathbf{y},\mathbf{y}^+))$ が次の微分方程式を満たさなければならないことが分かる．

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tau(\mathbf{y})}{\partial y_k} &= S_k(\tau(\mathbf{y}))\\ \frac{\partial\Theta(\omega(\mathbf{y},\mathbf{y}^+))}{\partial y_{k,i}} &= \left[z^{i-1}\mathbb{S}_k\right]_+\Theta(\omega(\mathbf{y},\mathbf{y}^+)) \qquad (i\ge 0)\end{aligned} \tag{3}$$

ここで $S_k(\tau)=\lim_{z\to 0}\mathbb{S}_k\cdot 1$ は Seidel 元であり，$[z^{i-1}\mathbb{S}_k]_+ := z^{i-1}\mathbb{S}_k-\delta_{i,0}z^{-1}(S_k\star)$ である．これらの微分方程式は

$$\bigl(\tau(\mathbf{y}),\Theta(\omega(\mathbf{y},\mathbf{y}^+))\bigr)\in H_T^*(X)\times H_{\hat{T}}^*(X)$$

上の無限個の可換なベクトル場を定めていることが，シフト作用素の一般的性質 (命題 3.2) から従う．従って $\tau(\mathbf{y})$ および $\Theta(\omega(\mathbf{y},\mathbf{y}^+))$ はこれらの微分方程式の解で適当な漸近条件を満たすものとして定めればよい．(そのような解が存在することは少し議論が必要である.)

注意 4.5 式 (3) の前半は González 氏との共同研究 [11] で ($c_1(X)\ge 0$ の場合に) 得られたものの一般化になっている．

注意 4.6 同型写像 Θ で量子コホモロジーの単位元 1 を引き戻すことで（齋藤恭司氏の意味での）原始形式

$$\zeta=\Theta^{-1}(1)$$

が得られる．同変変数 λ を含まない形に書きなおすことで，ζ は微分形式のレベルで定まっているとみなせる．この原始形式は無限個の変数 $\mathbf{y}$ でパラメトライズされているが，非同変理論における原始形式の不定性は，少なくとも，この族の中から $\dim H^*(X)$ 次元の族をとりだす方法分存在する．(実際には mod λ で 1 になるクラスを引き戻しても非同変理論での原始形式が得られるので，不定性はより多い．後で議論するように全ての不定性は x 変数の reparametrization で説明できる.)

注意 4.7 この定理から量子コホモロジーと Jacobi 環の間の同型

$$QH_T^*(X)\cong \mathrm{Jac}(F_\lambda(x;\mathbf{y}))$$

が従う．

注意 4.8 ミラー写像の逆写像 $y_k=y_k(\tau)$ によってミラーの Landau-Ginzburg ポテンシャル $F(x,\mathbf{y})$ は τ の関数と見なされる．Chan-Lau-Leung-Tseng [3] の結果からこれは Fukaya-Oh-Ohta-Ono [7, 8, 6] らによる bulk-deformed ポテンシャルになっていることが期待される．

5. Givental cone 上のベクトル場と I 関数

微分方程式 (3) は $H_T^*(X)\times H_{\hat{T}}^*(X)$ 上のベクトル場を定めているが，これは Givental による Lagrangian cone 上の線形ベクトル場と思うことができる．大同変量子接続の基

本解 $L(\tau) \in \mathrm{End}(H^*_{\hat{T}}(X)_{\mathrm{loc}})[\![Q]\!]$ を次の式で定める．

$$L(\tau)\alpha = \alpha + \sum_{d,n,i} \frac{Q^d}{n!} \left\langle \phi_i, \tau, \ldots, \tau, \frac{\alpha}{-z-\psi} \right\rangle^{X,T}_{0,n+2,d} \phi^i$$

ここで $\{\phi_i\}$, $\{\phi^i\}$ は T 同変 Poincaré ペアリングに関する双対基底である．また添え字の loc は localization を表し

$$H^*_{\hat{T}}(X)_{\mathrm{loc}} = H^*_{\hat{T}}(X) \otimes_{H^*_{\hat{T}}(\mathrm{pt})} \mathrm{Frac}(H^*_{\hat{T}}(\mathrm{pt})).$$

この基本解は任意の $\alpha, \phi \in H^*_T(X)$ に対して $\nabla_\phi(L(\tau)\alpha) = 0$ を満たす．Givental cone は

$$\mathcal{L} = \bigcup_{\tau \in H^*_T(X)} zL(\tau)^{-1} H_{\hat{T}}(X)$$

で定義される $H^*_{\hat{T}}(X)_{\mathrm{loc}}[\![Q]\!]$ 内の Lagrangian 錐[3] である．

$$H^*_T(X) \times H^*_{\hat{T}}(X) \ni (\tau, \Upsilon) \longmapsto zL(\tau)^{-1}\Upsilon \in \mathcal{L}$$

によって Givental cone は $H^*_T(X) \times H^*_{\hat{T}}(X)$ と同一視することができる．この同一視の下で微分方程式 (3) の定めるベクトル場は $\mathcal{L}$ の次の線形ベクトル場と同一視される．

$$\mathcal{L} \ni \mathbf{f} \longmapsto z^{i-1}\mathcal{S}_k \mathbf{f} \in T_{\mathbf{f}}\mathcal{L}$$

ここで $\mathcal{S}_k$ は τ に依存しない定数シフト作用素であって次の性質で特徴づけられるものである[4].

- $\mathcal{S}_k \circ \lambda_i = (\lambda_i - k_i z) \circ \mathcal{S}_k$
- $\delta_x \in H^*_T(X)_{\mathrm{loc}}$ を固定点 $x \in X^T$ のみに台 (support) をもつ同変類 ($x, y \in X^T$ に対して $\delta_x|_y = \delta_{x,y}$ となるもの) とすれば

$$\mathcal{S}_k \delta_x = Q^{\sigma_x - \sigma_{\min}} \left(\prod_{i=1}^n \frac{\prod_{c \le 0} \quad \rho_i + cz}{\prod_{c \le -\rho_i \cdot k} \rho_i + cz} \right) \delta_x$$

  ここで σ_x は $x \in X^T$ に付随する E_k の section class であり $\sigma_{\min}$ は minimal section class. また $\rho_1, \ldots, \rho_n$ は点 x での接空間 $T_x X$ の T-weights である．

Givental cone 上のベクトル場の積分曲線を求めることで，次の定理が従う．

定理 5.1 ([14]) $(\tau(\mathbf{y}), \Theta(\omega(\mathbf{y}, \mathbf{y}^+))) \in H^*_T(X) \times H^*_{\hat{T}}(X)$ の Givental cone における像は拡張 I 関数 [4] (extended I-function) $I(\mathbf{y}(z), z)$ である．すなわち拡張 I 関数は次の微分方程式を満たす．

$$\frac{\partial I(\mathbf{y}(z), z)}{\partial y_{k,i}} = z^{i-1} \mathcal{S}_k I(\mathbf{y}(z), z)$$

---

[3] $H^*_{\hat{T}}(X)_{\mathrm{loc}}[\![Q]\!]$ には次のシンプレクティック形式 Ω が定まり，$\mathcal{L}$ はこれについて Lagrangian である．

$$\Omega(f, g) = -\mathrm{Res}_{z=-\infty}(f(-z), g(z))dz$$

ただし $f, g \in H^*_{\hat{T}}(X)_{\mathrm{loc}}[\![Q]\!]$ で $(\cdot, \cdot)$ は T 同変 Poincaré pairing.

[4] 簡単のため T 固定点の集合 X^T が有限と仮定している（X がトーリック多様体のときは成立）．

この定理に現れる拡張 I 関数は無限変数の超幾何級数で与えられ，元々の Givental のミラー定理 [9] にある I 関数を拡張したものである．

注意 5.2 写像 $(\mathbf{y}, \mathbf{y}^+) \mapsto (\tau(\mathbf{y}), \Theta(\omega(\mathbf{y}, \mathbf{y}^+)) \mapsto I(\mathbf{y}(z), z)$ は Givental cone $\mathcal{L}$ の座標を与える．すなわちこの写像は $\mathcal{L}$ と $\mathrm{Spf}\,\mathbb{C}[\![Q]\!][\![\mathbf{y}, \mathbf{y}^+]\!]$ の間の formal scheme としての同型を与えている．

6. 非同変極限と reparametrization group

定理 5.1 の非同変極限 $\lambda \to 0$ をとることで Barannikov 流の大量子コホモロジーのミラーが得られる．ポテンシャル関数については逆ミラー写像 $\mathbf{y}(\tau)$ を使って $\tau \in H_T^*(X)$ でパラメトライズされる族

$$H_T^*(X) \ni \tau \mapsto F(x, \mathbf{y}(\tau))$$

を考えることができるが，ここで任意の (非線形かも知れない) section $\mathfrak{s}\colon H^*(X) \to H_T^*(X)$ をとって変形族

$$H^*(X) \ni \sigma \mapsto \mathfrak{s}^* F(x; \sigma) = F(x, \mathbf{y}(\mathfrak{s}(\sigma)))$$

を考えると $\mathfrak{s}^* F$ の定める twisted de Rham コホモロジーと X の大量子コホモロジーが同型になる [14]．

このように非同変極限のとり方には大きな不定性があるが，それらは全て x 変数の reparametrization で関係していることが分かる．同変 Givental cone を $\mathcal{L}_{\mathrm{equiv}}$ で表し，非同変版を $\mathcal{L}_{\mathrm{noneq}}$ で表そう．次の $(x_1, \ldots, x_n)$ の形式的座標変換のなす形式群 $J\mathcal{G}$ を考える．

$$x_i \mapsto x_i \exp\left(\sum_{k \in \mathbf{N} \cap |\Sigma|, j \geq 0} \epsilon_{k,i,j} x^k Q^{\beta(k)} z^j\right)$$

ここで変数 $\epsilon_{k,i,j}$ は形式群 $J\mathcal{G}$ の座標である．形式群 $J\mathcal{G}$ は exponential form $\omega(\mathbf{y}, \mathbf{y}^+)$ に座標変換で作用し，したがって同変 Givental cone $\mathcal{L}_{\mathrm{equiv}}$ に作用する．

定理 6.1 ([14]) 非同変極限 $\lambda \to 0$ によって定まる写像

$$\mathcal{L}_{\mathrm{equiv}} \to \mathcal{L}_{\mathrm{noneq}}$$

により $\mathcal{L}_{\mathrm{noneq}}$ は商空間 $\mathcal{L}_{\mathrm{equiv}}/J\mathcal{G}$ と同一視される．

参考文献

[1] Serguei Barannikov. Semi-infinite Hodge structure and mirror symmetry for projective spaces. `arXiv:math.AG/0010157`, 2001.

[2] Alexander Braverman, Davesh Maulik, and Andrei Okounkov. Quantum cohomology of the Springer resolution. *Adv. Math.*, 227(1):421–458, 2011.

[3] Kwokwai Chan, Siu-Cheong Lau, Naichung-Conan Leung, and Hsian-Hua Tseng. Open Gromov-Witten invariants, mirror maps, and Seidel representations for toric manifolds. `arXiv:1209.6119`, 2012.

[4] Tom Coates, Alessio Corti, Hiroshi Iritani, and Hsian-Hua Tseng. A mirror theorem for toric stacks. `arXiv:1310.4163 [math.AG]`, 2013.

[5] Antoine Douai and Claude Sabbah. Gauss-Manin systems, Brieskorn lattices and Frobenius structures. II. In *Frobenius manifolds*, Aspects Math., E36, pages 1–18. Vieweg, Wiesbaden, 2004.

[6] Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta, and Kaoru Ono. Lagrangian floer theory and mirror symmetry on compact toric manifolds. `arXiv:1009.1648`, 2010.

[7] Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta, and Kaoru Ono. Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds. I. *Duke Math. J.*, 151(1):23–174, 2010.

[8] Kenji Fukaya, Yong-Geun Oh, Hiroshi Ohta, and Kaoru Ono. Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds II: bulk deformations. *Selecta Math. (N.S.)*, 17(3):609–711, 2011.

[9] Alexander Givental. A mirror theorem for toric complete intersections. In *Topological field theory, primitive forms and related topics (Kyoto, 1996)*, volume 160 of *Progr. Math.*, pages 141–175. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1998.

[10] Alexander B. Givental. Homological geometry and mirror symmetry. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, pages 472–480. Birkhäuser, Basel, 1995.

[11] Eduardo González and Hiroshi Iritani. Seidel elements and mirror transformations. *Selecta Math. (N.S.)*, 18(3):557–590, 2012.

[12] Kentaro Hori and Cumrum Vafa. Mirror symmetry. `arXiv:hep-th/0002222`, 2000.

[13] Hiroshi Iritani. Shift operators and toric mirror theorem. `arXiv:1411.6840 [math.AG]`, 2014.

[14] Hiroshi Iritani. A mirror construction for the big equivariant quantum cohomology of toric manifolds. `arXiv:1503.02919 [math.AG]`, 2015.

[15] Bong H. Lian, Kefeng Liu, and Shing-Tung Yau. Mirror principle. III. *Asian J. Math.*, 3(4):771–800, 1999.

[16] Dusa McDuff and Susan Tolman. Topological properties of Hamiltonian circle actions. *IMRP Int. Math. Res. Pap.*, pages 72826, 1–77, 2006.

[17] Andrei Okounkov and Rahul Pandharipande. The quantum differential equation of the Hilbert scheme of points in the plane. *Transform. Groups*, 15(4):965–982, 2010.

[18] Paul Seidel. π_1 of symplectic automorphism groups and invertibles in quantum homology rings. *Geom. Funct. Anal.*, 7(6):1046–1095, 1997. `arXiv:dg-ga/9511011`.