爆発の量子コホモロジー

入谷　寛　(京都大学大学院理学研究科　数学教室)*

2024 年 7 月 25 日

概　要

量子コホモロジーは，有理曲線を数えることによって定義される滑らかな射影多様体のコホモロジー環の変形である．量子コホモロジーと双有理幾何学の関係は大きな関心を集めている．本講演では，爆発の量子コホモロジーに関する次の分解定理 [Iri23a] を説明する．滑らかな射影多様体 X の滑らかな部分多様体 Z を中心とする爆発 $\widetilde{X}$ の量子コホモロジーは，X の量子コホモロジーと Z の量子コホモロジーの $(\mathrm{codim}(Z)-1)$ 個のコピーの直和である．証明のアイデアは，Teleman 予想の D 加群版，つまり，GIT 商の量子コホモロジー D 加群が割る前の多様体の同変量子コホモロジー D 加群（に入る差分加群の構造）とフーリエ変換で関係する，という予想に基づく．

1　序：双有理幾何と量子コホモロジーの分解

Ruan のクレパント解消予想 [Rua06] に代表されるように，量子コホモロジーと双有理幾何学の間には密接な関係が期待されてきた．ここでは，[GHI+24, Section 6.1] に従って，双有理幾何から量子コホモロジーの分解がどのように自然に現れるかを説明したい．

1.1　量子コホモロジー

X を $\mathbb{C}$ 上の滑らかな射影多様体とする．X の（小）量子コホモロジー $\mathrm{QH}(X)$ は，Novikov 環

$$\mathbb{C}[\![Q]\!] = \mathbb{C}[\![\mathrm{NE}_{\mathbb{N}}(X)]\!] = \left\{ \sum_{d\in \mathrm{NE}_{\mathbb{N}}(X)} c_d Q^d : c_d \in \mathbb{C} \right\} \tag{1}$$

上の超可換環（supercommutative algebra）として定義される．ここで，$\mathrm{NE}_{\mathbb{N}}(X)$ は X の 2 次ホモロジー群 $H_2(X,\mathbb{Z})$ の部分モノイドであって，有効曲線のクラスによって生成されるものである．より正確には，$\mathrm{QH}(X)$ は $\mathbb{C}[\![Q]\!]$ ベクトル空間

$$\mathrm{QH}(X) = H^*(X) \otimes \mathbb{C}[\![Q]\!]$$

* 〒606-8502 京都府京都市左京区北白川追分町
e-mail: `iritani@math.kyoto-u.ac.jp`
web: `https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~iritani/`

本研究は科研費 (課題番号:16H06335, 20K03582, 21H04994, 23H01073) の助成を受けたものである．
2020 Mathematics Subject Classification: 14N35, 53D45
キーワード：quantum cohomology, birational geometry, equivariant quantum cohomology, shift operators, Fourier transformation

であって次の（小）量子積 $\star$（small quantum product）が与えられたものである．

$$(\alpha \star \beta, \gamma) = \sum_{d \in \mathrm{NE}_{\mathbb{N}}(X)} \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle_{0,3,d}^X Q^d \tag{2}$$

ここで，$(\alpha, \beta) = \int_X \alpha \cup \beta$ は $H^*(X)$ 上の交叉形式（Poincaré 双線形形式）であり，$\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle_{0,3,d}^X$ は種数 0, 3 点付き，次数 d の Gromov-Witten 不変量である．Gromov-Witten 不変量 $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle_{0,3,d}^X$ は大雑把に言うと，α, β, γ の Poincaré 双対サイクル A, B, C を通る種数 0 の正則曲線（有理曲線）$u \colon \mathbb{P}^1 \to X$ であって次数が $d = u_*([\mathbb{P}^1])$ となるものの数を表している．次数 $d = 0$ の曲線は定値写像しかないことから，$Q \to 0$ の極限で量子積はカップ積を復元することが分かる．

$$\lim_{Q \to 0} \star = \cup$$

式 (2) の右辺は一般には無限和でありその収束性の一般的な証明は知られていないが，$\star$ はカップ積の形式的な変形とみなせる．

注 1.1　小量子積は次の斉次性を持つ．有理曲線のモジュライ空間の形式次元を考えることで，Gromov-Witten 不変量は次元公理

$$\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle_{0,3,d}^X \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \deg \alpha + \deg \beta + \deg \gamma = 2 \dim_{\mathbb{C}} X + 2c_1(X) \cdot d$$

を満たすことが分かる．従って $\deg Q^d := 2c_1(X) \cdot d$ と定めるとき，小量子積 $\star$ は斉次性 $\deg(\alpha \star \beta) = \deg \alpha + \deg \beta$ を満たす．特に X が Fano 多様体（つまり，$c_1(X)$ が正）の場合は，式 (2) の右辺は有限和であり，$\star$ は Q の多項式環上定義されている．

例 1.2　射影空間 $X = \mathbb{P}^{n-1}$ は Fano 多様体であるから，量子コホモロジー環は多項式環 $\mathbb{C}[Q]$ 上定義されており（注 1.1 参照），次で与えられる．（$H^2(\mathbb{P}^{n-1})$ は 1 次元であるから，Q は 1 変数である．）

$$\mathrm{QH}(\mathbb{P}^{n-1}) \cong \mathbb{C}[p, Q]/(p^n - Q).$$

ここで $p = c_1(\mathcal{O}(1)) \in H^2(\mathbb{P}^{n-1})$ は超平面類である．関係式 $p^n = Q$ の古典極限 $Q \to 0$ を取ると，通常のコホモロジー環の関係式 $p^n = 0$ が出ることに注意しよう．また $p^n = Q$ という関係式は，$\mathbb{P}^{n-1}$ の相異なる 2 点を通る直線（次数 1 の有理曲線）がただ 1 つ存在する，という幾何学的事実の反映である．簡単に分かるように，Q を 0 でない複素数に特殊化するとき，$\mathrm{QH}(\mathbb{P}^{n-1})$ は環として $\mathbb{C}$ の n 個の直和と同型になる．これが以下で説明する量子コホモロジーの分解の特別な例である．

注 1.3　ここでは簡単のため小量子積のみを説明したが，一般に種数 0, n 点 Gromov-Witten 不変量を使って，コホモロジー類 $\tau \in H^*(X)$ でパラメトライズされる大量子積 $\star_\tau$ が次のように定義される．

$$(\alpha \star_\tau \beta, \gamma) = \sum_{d \in \mathrm{NE}_{\mathbb{N}}(X)} \sum_{n \geq 0} \langle \alpha, \beta, \gamma, \tau, \ldots, \tau \rangle_{0,n+3,d}^X \frac{Q^d}{n!}.$$

$\alpha \star_\tau \beta$ は τ の形式的冪級数であって，$\tau = 0$ で小量子積 $\alpha \star \beta$ と一致する．大量子積 $\star_\tau$ の定める超可換環 $(H^*(X) \otimes \mathbb{C}[\![Q]\!][\![\tau]\!], \star_\tau)$ を大量子コホモロジーという．

1.2　端収縮と量子コホモロジーの分解

量子コホモロジーは有理曲線の数え上げによって定義されるため，双有理幾何学における森理論と深い関係がある．ここで森理論における基本的な概念を復習しておこう．森錐（Mori cone）$\overline{\mathrm{NE}}(X) \subset H_2(X, \mathbb{R})$ とは有効曲線のクラスのなすモノイド $\mathrm{NE}_{\mathbb{N}}(X)$ によって生成される閉凸錐である．端射線 (extremal ray) $R = \mathbb{R}_{\geq 0} d_0 \subset \overline{\mathrm{NE}}(X)$ とは，森錐の 1 次元面（つまり辺）であって，$c_1(X) \cdot d_0 > 0$ を満たすクラス d_0 によって生成されるものである．端射線は有理曲線で生成されることが知られており，d_0 は R の原始的な整の生成元に取っておくことにする．収縮定理（contraction theorem）[KMM87, Theorem 3.1.2] により，R に付随する端収縮 (extremal contraction) $f \colon X \to Y$ が存在する．これは，X から（一般には特異点を持つ）正規射影多様体 Y への写像であって，「曲線 $C \subset X$ が一点に収縮するのは，そのホモロジー類 $[C]$ が端射線 R 上にある場合でありまたその場合に限る」という性質をもつものである．

端収縮 f を使って，f 例外（小）量子積 $\star_f$ (f-exceptional small quantum product) が次のように定義される．これは量子積の定義 (2) の右辺において，f で 1 点につぶされる曲線のみを考えたものである [*1]．

$$(\alpha \star_f \beta, \gamma) = \sum_{n \geq 0} \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle^X_{0,3,nd_0} Q^{nd_0}.$$

ここで重要なポイントは，$c_1(X) \cdot d_0 > 0$ であるため，注 1.1 に述べた斉次性から，右辺は必然的に有限和になるということである．従って $\star_f$ は $q := Q^{d_0}$ の**多項式環** $\mathbb{C}[q]$ 上定義された例外量子コホモロジー $\mathrm{QH}_{\mathrm{exc}}(X) := (H^*(X) \otimes \mathbb{C}[q], \star_f)$ を定める．例外量子コホモロジー $\mathrm{QH}_{\mathrm{exc}}(X)$ は $\mathrm{QH}(X)$ のある種の極限と解釈できる．逆に，$\mathrm{QH}(X)$ は $\mathbb{C}$ 上の有限次元代数 $\mathrm{QH}_{\mathrm{exc}}(X)|_{q=1}$ の変形 (deformation) とも考えることができる．

注 1.4　より正確には，Novikov 環 (1) の定義を少し修正して，$\mathbb{C}[\![Q]\!]$ を次数付き完備化として定義したほうが良い．つまり $\mathbb{C}[\![Q]\!]$ を Q の**斉次な**冪級数の有限和として表されるような元からなるものとしておく．このとき，端射線 R に対応する変数 $q = Q^{d_0}$ は正の次数を持っているため，Novikov 環の元は q について「多項式的」である．つまり，Novikov 変数 Q を q と「残り」の変数 Q' に分けたとき，Novikov 環は $\mathbb{C}[\![Q]\!] = \mathbb{C}[q][\![Q']\!]$ の形をしていると考えることができる．

注 1.5　ここで $\mathrm{QH}_{\mathrm{exc}}(X)$ を $q = 1$ への特殊化を考えたが，値 $q = 1$ に特に意味はない．量子積の斉次性から，任意の 0 でない複素数 z に対して $\mathrm{QH}_{\mathrm{exc}}(X)|_{q=z}$ と $\mathrm{QH}_{\mathrm{exc}}(X)|_{q=1}$ は互いに同型である．

[*1] 同様の量子積は，Ruan のクレパント解消予想の研究でも考察された [Rua06].

$\mathrm{QH}_{\mathrm{exc}}(X)|_{q=1}$ は $\mathbb{C}$ 上の有限次元代数であり，対応する 0 次元スキーム $\mathsf{Q} := \mathrm{Spec}(\mathrm{QH}^{\mathrm{ev}}_{\mathrm{exc}}(X)|_{q=1})$ は有限個の点からなる [*2]．可換 Artin 環の一般論から，有限次元代数 $\mathrm{QH}_{\mathrm{exc}}(X)|_{q=1}$ はこのスキーム Q の点 α（$\mathrm{QH}^{\mathrm{ev}}_{\mathrm{exc}}(X)|_{q=1}$ の極大イデアル）で添え字づけられる成分の直和に環として分解する．

$$\mathrm{QH}_{\mathrm{exc}}(X)|_{q=1} = \bigoplus_{\alpha\in\mathsf{Q}} A_\alpha$$

$\mathrm{QH}(X)$ は $\mathrm{QH}_{\mathrm{exc}}(X)|_{q=1}$ の変形であるから，この分解は（係数環 $\mathbb{C}[\![Q]\!]$ を適当な環 K に拡大したのち）環としての分解

$$\mathrm{QH}(X) \otimes_{\mathbb{C}[\![Q]\!]} K \cong \bigoplus_{\alpha\in\mathsf{Q}} \widetilde{A}_\alpha$$

を誘導する．ここで次の自然な疑問が生じる．

問題 1.6　各直和因子 $\widetilde{A}_\alpha$ は幾何学的な起源をもっているだろうか？具体的には，何らかの空間の (大) 量子コホモロジーと同一視できるだろうか？（大量子コホモロジーについては注 1.3 参照.）

1.3　量子コホモロジーの分解の例（toric flip, 射影束，爆発）

問題 1.6 については，いくつかの肯定的な例が知られている．以下に例を挙げるが，3 番目の例 1.9 が本稿の主題である爆発の場合である．

例 1.7（[GW19, Iri20]）　X を滑らかな toric Deligne-Mumford stack とし，$X \dashrightarrow X^+$ を toric flip (より一般的には toric GIT 商の変動から生じる discrepant transformation) とする．このとき $\mathrm{QH}(X)$ は X^+ の大量子コホモロジーを直和因子として含む.

例 1.8（[IK23]）　$V \to Y$ をランク $r \geq 2$ のベクトル束とし，$X = \mathbb{P}(V) \to Y$ を Y 上の射影束とする．自然な射影 $f\colon X \to Y$ は端収縮であり，それに付随する例外量子コホモロジーは

$$\mathrm{QH}_{\mathrm{exc}}(X) \cong H^*(Y)[p,q]/(p^r + c_1(V)p^{r-1} + \cdots + c_r(V) - q)$$

で与えられる．ここで，$p = c_1(\mathcal{O}_X(1))$ は相対超平面類（relative hyperplane class）であり，端射線に対応する Novikov 変数 q と双対である．$q = 1$ に特殊化すると，環として次の分解を持つことが容易にわかる.

$$\mathrm{QH}_{\mathrm{exc}}(X)|_{q=1} \cong \bigoplus_{i=1}^{r} H^*(Y)$$

Q を底空間 Y の Novikov 変数とする．X の大量子コホモロジーは $\mathrm{QH}(X)_{\mathrm{exc}}$ をさらにパラメータ (Q,τ) で変形したものであるが，上の分解は大量子コホモロジーの分解を引

[*2] ここでは可換環のアフィンスキームを考えるため，偶数次部分 $\mathrm{QH}^{\mathrm{ev}}_{\mathrm{exc}}(X) \subset \mathrm{QH}_{\mathrm{exc}}(X)$ をとった.

き起こし，各直和因子は底空間 Y の大量子コホモロジーと同一視されることが言える．つまりある形式的な（非線形の）同型写像 $\sigma = (\sigma_i)_{i=1}^r\colon H^*(X) \to H^*(Y)^{\oplus r}$ が存在して

$$\mathrm{QH}(X)_\tau \cong \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{QH}(Y)_{\sigma_i(\tau)}$$

が成立する．ここで $\mathrm{QH}(X)_\tau$，$\mathrm{QH}(Y)_{\sigma_i(\tau)}$ の添え字 $\tau \in H^*(X)$, $\sigma_i(\tau) \in H^*(Y)$ は大量子コホモロジーのパラメータである．Euler ベクトル場 $E^X \in \mathrm{QH}(X)_\tau$ の量子積の固有値を見ると図 1 のような分解が観察される（Euler ベクトル場については式 (3) 参照）．

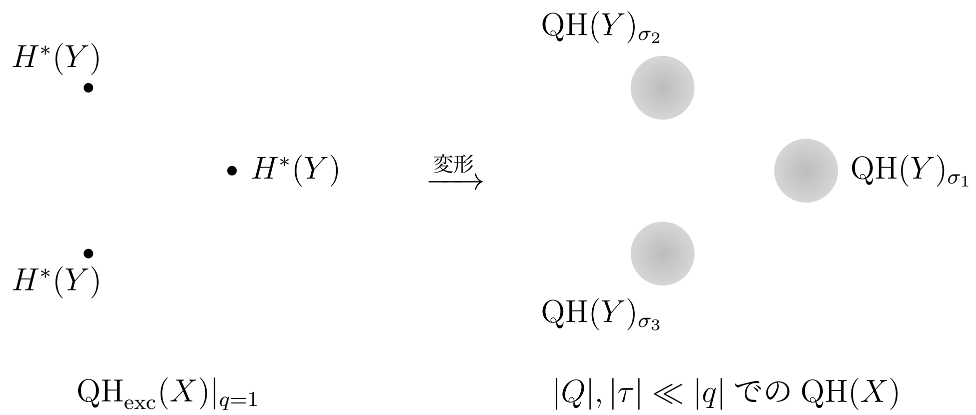

図 1　射影束 $X = \mathbb{P}(V) \to Y$ の量子コホモロジー $\mathrm{QH}(X)$ を Euler ベクトル場の積の固有値で分解した様子．図では $r = \operatorname{rank} V = 3$.

例 1.9（[Iri23a]）　X を滑らかな射影多様体，$Z \subset X$ を X 内の滑らかな部分多様体とし，Z を中心とする X の爆発（blow-up）を $\widetilde{X} = \mathrm{Bl}_Z X$ とする．また r を Z の余次元とする．通常のコホモロジー群においては次のような加法的分解が知られている [Voi07, Theorem 7.31].

$$H^*(\widetilde{X}) = \varphi^* H^*(X) \oplus \bigoplus_{k=0}^{r-2} j_*(p^k \pi^* H^*(Z)) \cong H^*(X) \oplus H^*(Z)^{\oplus(r-1)}.$$

ここで $\varphi\colon \widetilde{X} \to X$ は自然な射影であり，$j\colon D \to \widetilde{X}$ は例外因子の埋め込み，$\pi = \varphi|_D\colon D \to Z$ は射影束，$p = c_1(\mathcal{O}_D(1))$ は相対超平面類である．

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "\pi"'] & \widetilde{X} \arrow[d, "\varphi"] \\ Z \arrow[r, hook, "i"'] & X \end{tikzcd}$$

上の分解は積を保たないが，量子コホモロジーに移ると乗法的な分解ができる．射影 $\varphi\colon \widetilde{X} \to X$ は端収縮であり，それに付随して大量子コホモロジーが以下のように分解

する．

$$\mathrm{QH}(\widetilde{X})_{\tilde{\tau}} \cong \mathrm{QH}(X)_{\tau} \oplus \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathrm{QH}(Z)_{\sigma_i}$$

ここで，$\tilde{\tau} \in H^*(\widetilde{X})$，$\tau = \tau(\tilde{\tau}) \in H^*(X)$，$\sigma_i = \sigma_i(\tilde{\tau}) \in H^*(Z)$ は大量子コホモロジーのパラメータであり，$\tilde{\tau} \mapsto (\tau(\tilde{\tau}), \sigma_1(\tilde{\tau}), \ldots, \sigma_{r-1}(\tilde{\tau})), H^*(\widetilde{X}) \to H^*(X) \oplus H^*(Z)^{\oplus(r-1)}$ は形式的な（非線形の）同型写像である．$\mathrm{QH}(\widetilde{X})_{\tilde{\tau}}$ の Euler ベクトル場の量子積の固有値は,「例外量子コホモロジー極限」の近くで，図 2 のように分布している．

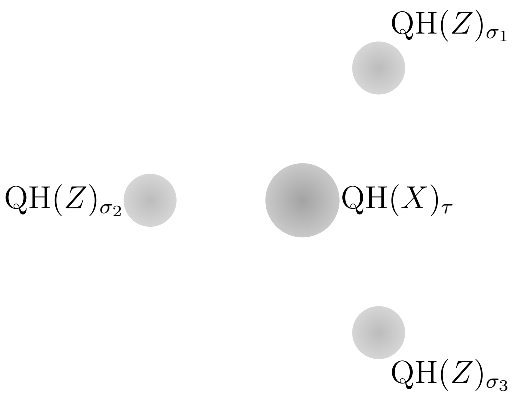

図 2　「例外量子コホモロジー極限」の近くでおこる，爆発 $\widetilde{X}$ の量子コホモロジーの分解．この図では $r = \mathrm{codim}(Z) = 4$.

例 1.10　上記の分解を局所的な 1 点での爆発の例で確かめてみよう．$X = \mathbb{C}^r$, $Z = \{0\}$ としたとき，$\widetilde{X}$ は $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r-1}}(-1)$ の全空間であって

$$\mathrm{QH}(\widetilde{X}) \cong \mathbb{C}[p, q]/(p(p^{r-1} + q))$$

となる．ここで p は例外因子 $\mathbb{P}^{r-1}$ の超平面類である．従って $\mathrm{Spec}(\mathrm{QH}(\widetilde{X}))$ は式 $p(p^{r-1} + q) = 0$ で与えられる空間で，$q = 1$ のとき原点 $p = 0$ とそれを取り囲む $r-1$ 個の点 $p = (-1)^{\frac{1}{r-1}}$ に分かれている．

2　爆発の量子 D 加群の分解

この節では量子コホモロジーを微分方程式（D 加群）に持ち上げた量子 D 加群について説明し，爆発 $\widetilde{X}$ の量子 D 加群のレベルでの分解についてより詳細な主張を述べる．

2.1　量子 D 加群

注 1.3 で紹介した大量子コホモロジー

$$(H^*(X) \otimes \mathbb{C}[\![Q, \tau]\!], \star_\tau)$$

を思い出そう．$H^*(X)$ の基底 $\{\phi_i\}_{i=0}^s$ をとり，パラメータ $\tau \in H^*(X)$ を $\tau = \sum_{i=0}^s \tau^i \phi_i$ と展開しておく．ここで $\{\tau^i\}_{i=0}^s$ は $H^*(X)$ の座標を与えている [*3]．

新しい変数 z を導入し，量子 D 加群（quantum D-module）$\mathrm{QDM}(X)$ を

$$\mathrm{QDM}(X) = H^*(X) \otimes \mathbb{C}[z][\![Q, \tau]\!]$$

とおく．$\mathrm{QDM}(X)$ は (Q, τ, z) 空間 "$\mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[z][\![Q, \tau]\!]$" 上のコホモロジーをファイバーとする自明束の切断の空間と考えることができる．このベクトル束には以下の量子接続（Dubrovin 接続とも呼ばれる）が与えられている．

$$\begin{aligned}
\nabla_{\tau^i} &= \frac{\partial}{\partial \tau^i} + \frac{1}{z}(\phi_i \star_\tau) \\
\nabla_{z\partial_z} &= z\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{z}(E^X \star_\tau) + \mu \\
\nabla_{\xi Q \partial_Q} &= \xi Q \frac{\partial}{\partial Q} + \frac{1}{z}(\xi \star_\tau) \quad \text{with } \xi \in H^2(X)
\end{aligned}$$

ここで，

$$E^X = c_1(X) + \sum_{i=0}^s (1 - \frac{\deg \phi_i}{2}) \tau^i \phi_i \tag{3}$$

は Euler ベクトル場であり，$\mu \in \mathrm{End}(H^*(X))$ は $\mu(\phi_i) = (\frac{1}{2}\deg \phi_i - \frac{n}{2})\phi_i$ で定義される次数づけ作用素である（ただし，$n = \dim_{\mathbb{C}} X$）．これらは互いに超可換な作用素

$$\nabla_{\tau^i}, \nabla_{z\partial_z}, \nabla_{\xi Q \partial_Q} \colon \mathrm{QDM}(X) \to z^{-1}\,\mathrm{QDM}(X)$$

を定めている（つまり超多様体の意味での平坦接続となる）．$z \to 0$ の極限で

$$z\nabla_{\tau^i} \longrightarrow \phi_i \star_\tau$$

となることから，量子 D 加群は量子コホモロジーのさらなる「量子化」とみなせる．量子 D 加群はまた交叉形式によって与えられる以下のペアリングを持ち，

$$P(f, g) = \int_X f(-z) \cup g(z), \qquad f, g \in \mathrm{QDM}(X)$$

このペアリング P は接続に関して平坦である．

注 2.1 Novikov 変数 Q 方向の量子接続 $\nabla_{\xi Q \partial_Q}$ は τ 変数についての $\xi \in H^2(X)$ 方向の接続 $\sum_i \xi^i \nabla_{\tau^i}$（ただし $\xi = \sum_i \xi^i \phi_i$ と展開した）と本質的に同じである．つまり，Q 方向と τ の H^2 方向は本質的に同じ役割を持っており，本稿での量子 D 加群の定義は座標を余分に用いている．z 方向の量子接続 $\nabla_{z\partial_z}$ は量子コホモロジーの斉次性（注 1.1）と関わる．つまり $\nabla_{z\partial_z} + \nabla_{E^X} + \frac{n}{2}$ は量子 D 加群の次数付け（の半分）を与えている．

[*3] 正確にはこれらの座標は超可換 $\tau^i\tau^j = (-1)^{|i||j|}\tau^j\tau^i$ であり（ただし $|i| \equiv \deg \phi_i \bmod 2$），$H^*(X)$ を超多様体（supermanifold）とみなしたときの座標をなす．また，$\mathbb{C}[\![Q, \tau]\!]$ は $\mathbb{C}[\![Q]\!][\![\tau^0, \tau^1, \ldots, \tau^s]\!]$ の略記である．

2.2 分解定理

以前と同様に，$\varphi\colon \widetilde{X} \to X$ を滑らかな射影多様体 X の滑らかな部分多様体 $Z \subset X$ に沿っての爆発とする．爆発 $\widetilde{X}$ の量子 D 加群に対する分解定理を正確に述べるために，幾つか記号を導入する．X, Z, $\widetilde{X}$ の量子コホモロジーは異なる Novikov 環上定義されているため，全ての Novikov 環を含む共通の環を導入する．Q を X の Novikov 変数とする．環 K に対して，K を係数とする冪級数環 [*4]$K[\![\mathcal{Q}]\!]$ を

$$K[\![\mathcal{Q}]\!] = K\left[\!\!\left[Q^d, xy^{-1}, Q^{\varphi_*\tilde{d}}y^{-[D]\cdot\tilde{d}} : d \in \mathrm{NE}_{\mathbb{N}}(X), \tilde{d} \in \mathrm{NE}_{\mathbb{N}}(\widetilde{X})\right]\!\!\right]$$

とおく．ここで x, y は Q と独立な新しい変数であり，$\mathcal{Q}$ は変数 Q, x, y の総称である．また $D \subset \widetilde{X}$ は爆発の例外因子を表す．

$$\mathfrak{s} = \begin{cases} r-1 & r \text{ が偶のとき} \\ 2(r-1) & r \text{ が奇のとき} \end{cases}$$

とし，X, Z, $\widetilde{X}$ の Novikov 環 $\mathbb{C}[\![Q]\!]$, $\mathbb{C}[\![Q_Z]\!]$, $\mathbb{C}[\![\widetilde{Q}]\!]$ を次のように $\mathbb{C}(\!(q^{-1/\mathfrak{s}})\!)[\![\mathcal{Q}]\!]$ に埋め込む（ここで $Q, Q_Z, \widetilde{Q}$ は各々 $X, Z, \widetilde{X}$ の Novikov 変数）．

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[\![Q]\!] &\hookrightarrow \mathbb{C}(\!(q^{-1/\mathfrak{s}})\!)[\![\mathcal{Q}]\!] & Q^d &\mapsto Q^d \\ \mathbb{C}[\![Q_Z]\!] &\to \mathbb{C}(\!(q^{-1/\mathfrak{s}})\!)[\![\mathcal{Q}]\!] & Q_Z^d &\mapsto Q^{i_*d}q^{-c_1(\mathcal{N}_{Z/X})\cdot d/(r-1)} \\ \mathbb{C}[\![\widetilde{Q}]\!] &\hookrightarrow \mathbb{C}(\!(q^{-1/\mathfrak{s}})\!)[\![\mathcal{Q}]\!] & \widetilde{Q}^{\tilde{d}} &\mapsto Q^{\varphi_*\tilde{d}}q^{-[D]\cdot\tilde{d}} \end{aligned} \tag{4}$$

ここで，q は 1.2 節に現れた端射線の生成元に対応する Novikov 変数であり，$\varphi\colon \widetilde{X} \to X$ で 1 点につぶれる例外直線に対応する [*5]．これらの環の埋め込みを使って，$\mathrm{QDM}(X)$, $\mathrm{QDM}(Z)$, $\mathrm{QDM}(\widetilde{X})$ を $\mathbb{C}[z](\!(q^{-1/\mathfrak{s}})\!)[\![\mathcal{Q}]\!]$ 上に底変換したものを $\mathrm{QDM}(X)^{\mathrm{La}}$, $\mathrm{QDM}(Z)^{\mathrm{La}}$, $\mathrm{QDM}(\widetilde{X})^{\mathrm{La}}$ で表す．

定理 2.2（[Iri23a]） $\mathbb{C}(\!(q^{-1/(r-1)})\!)[\![\mathcal{Q}]\!]$ 上の形式的な（非線形な）同型写像

$$(\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_{r-1})\colon H^*(\widetilde{X}) \to H^*(X) \oplus H^*(Z)^{\oplus(r-1)}$$

および接続とペアリングを保つ量子 D 加群の同型

$$\Psi\colon\ \mathrm{QDM}(\widetilde{X})^{\mathrm{La}} \cong \tau^*\,\mathrm{QDM}(X)^{\mathrm{La}} \oplus \bigoplus_{i=1}^{r-1} \sigma_i^*\,\mathrm{QDM}(Z)^{\mathrm{La}}$$

が存在する．

$\widetilde{X}$ の大量子コホモロジーのパラメータを $\tilde{\tau} \in H^*(\widetilde{X})$ と書くとき，上記の非線形写像 $\tilde{\tau} \mapsto (\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_{r-1})$ の各成分は冪級数

$$\tau(\tilde{\tau}) \in H^*(X) \otimes \mathbb{C}(\!(q^{-1/(r-1)})\!)[\![\mathcal{Q}, \tilde{\tau}]\!], \quad \sigma_j(\tilde{\tau}) \in H^*(Z) \otimes \mathbb{C}(\!(q^{-1/(r-1)})\!)[\![\mathcal{Q}, \tilde{\tau}]\!]$$

[*4] 正確には以下に現れる冪級数環は全て「次数付き」の完備化として定義すべきである．ただし，$\deg Q^d = 2c_1(X)\cdot d$, $\deg x = 2$, $\deg y = 2r$, $\deg q = 2(r-1)$．注 1.4 参照．

[*5] 実際，$\ell \subset D$ が例外直線であるとき，環埋め込み (4) に関する $\widetilde{Q}^{\ell}$ の像が q になっている．

で与えられ，そのヤコビ行列は $\mathbb{C}(\!(q^{-1/(r-1)})\!)[\![\mathcal{Q},\tilde{\tau}]\!]$ 上可逆であり，次を満たす．

$$\begin{aligned} &\tau(0)|_{\mathcal{Q}=0} = q^{-1}[Z] + O(q^{-2}) \\ &\sigma_j(0)|_{\mathcal{Q}=0} = -(r-1)e^{-\frac{2\pi\mathtt{i}}{r-1}(j-1+\frac{r}{2})}q^{\frac{1}{r-1}} + \frac{2\pi\mathtt{i}}{r-1}(j-\frac{1}{2})c_1(\mathcal{N}_{Z/X}) + O(q^{-\frac{1}{r-1}}). \end{aligned} \tag{5}$$

この同型写像 $(\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_{r-1})$ の微分を考えることで，例 1.9 における量子コホモロジー環の分解が得られる．

系 2.3（[Iri23a]） 写像 $(\tau, \sigma_1, \ldots, \sigma_{r-1})$ の微分は環同型 $\mathrm{QH}(\widetilde{X})_{\tilde{\tau}} \cong \mathrm{QH}(X)_{\tau(\tilde{\tau})} \oplus \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathrm{QH}(Z)_{\sigma_i(\tilde{\tau})}$ を誘導する．

注 2.4 量子 D 加群の分解およびパラメータの変数変換は Novikov 変数 q の逆（の冪根）を付け加えたところで定義されている．つまり，量子コホモロジー（D 加群）の分解は古典極限 $\widetilde{Q} = 0$ では成り立たず，変数 q についてある種の解析接続が必要である．大雑把にいうと，$\mathrm{QDM}(\widetilde{X})$ は $q = 0$ のまわりで定義され，$\mathrm{QDM}(X)$ は $q = \infty$ のまわりで定義されていると考えられる．写像 $\tau(\tilde{\tau})$ の漸近挙動 (5) から，変数 q^{-1} は $\mathrm{QDM}(X)$ にとっては X のコホモロジー類 $[Z] \in H^{2r}(X)$ に（漸近的に）双対な変形パラメータに対応することが分かる．X および $\widetilde{X}$ の量子コホモロジー D 加群はある大域的な「Kähler モジュライ空間」の異なる極限点のまわりに住んでいると考えることができる [*6]．3.2 節ではこの描像を同変量子コホモロジーを使って説明する．

注 2.5 上で導入した新しい冪級数環 $\mathbb{C}[\![\mathcal{Q}]\!]$ はある別の空間 W の Novikov 環として現れる．W は $\mathbb{C}^\times$ 作用が与えられた空間で，その GIT 商が X あるいは $\widetilde{X}$ になるものである (3.1 節参照)．純粋に $X, Z, \widetilde{X}$ の幾何の観点からは，変数 x, y は余分であり，定理 2.2 における量子 D 加群の同型は x, y によらないことが期待される．

2.3 ガンマ予想との関係

上記の分解定理 2.2 は環 $\mathbb{C}[z](\!(q^{-1/\mathfrak{s}})\!)[\![\mathcal{Q},\tilde{\tau}]\!]$ 上の量子 D 加群の分解である．冪級数環は次数付き完備化されているものを考えるので，この環は

$$\mathbb{C}[z](\!(q^{-1/\mathfrak{s}})\!)[\![\mathcal{Q},\tilde{\tau}]\!] = \mathbb{C}[q^{1/\mathfrak{s}}, q^{-1/\mathfrak{s}}][\![\mathcal{Q},\tilde{\tau}]\!][\![z]\!]$$

と書き直すことができる．仮に関係する量子コホモロジーの構造定数が全て収束したと仮定しても，分解定理の同型が全ての変数について解析的なものになることは実は期待できない．期待できるのは，$\mathcal{O}$ を変数 $q, \mathcal{Q}, \tilde{\tau}$ に関する解析的な関数の層とするとき，

- 変数変換 $\tilde{\tau} \mapsto (\tau(\tilde{\tau}), \sigma_1(\tilde{\tau}), \ldots, \sigma_{r-1}(\tilde{\tau}))$ は解析的（各成分が $\mathcal{O}$ に属する），

[*6] この描像はクレパント変換予想（Ruan の予想）の場合と似ている．クレパント（K 同値）な双有理変換でつながる多様体については，その量子 D 加群は解析接続でつながると予想されている [Rua06, Iri10]．ただし，本稿で考えている滑らかな中心に沿った爆発はクレパントではない変換であるため，$\mathrm{QDM}(X)$ と $\mathrm{QDM}(\widetilde{X})$ はランクが異なり同型にはならない．その差として $\mathrm{QDM}(Z)^{\oplus(r-1)}$ があらわれる．

- 分解定理 2.2 の同型 Ψ は $\mathcal{O}[\![z]\!]$ 上定義される，

ということまでである．実際，z 方向の量子接続は $z=0$ で不確定特異点を持つが，トーリックスタックの（重み付き）爆発の場合などに [Iri20]，$z=0$ での Stokes 構造は定理 2.2 にあるような直交分解を持たないことが分かっている．このことから分解の z についての解析化は期待できない．一方，（上記の収束性の仮定の下で）z のある角領域を固定すると，同型 Ψ の解析的な持ち上げ（Hukuhara-Turrittin の定理）をとることができる．解析的持ち上げの定める分解は（あるパラメータの値 $(q, \mathcal{Q}, \tilde{\tau})$ において），ガンマ整構造により，導来圏の半直交分解（Orlov による）

$$D^b_{\mathrm{coh}}(\widetilde{X}) \cong \left\langle D^b_{\mathrm{coh}}(X), D^b_{\mathrm{coh}}(Z)_0, \cdots, D^b_{\mathrm{coh}}(Z)_{r-2} \right\rangle$$

から誘導される，というのが予想である．これはガンマ予想 [GGI16, SS20] の一種と考えられる．この主張はトーリックスタックの重み付き爆発の場合には部分的に確かめられている [Iri20]．爆発の場合の正確な定式化については [Iri20, Iri23b] を参照．

2.4 双有理幾何への応用

Katzarkov, Kontsevich, Pantev, Yu は分解定理 2.2 の双有理幾何学への驚くべき応用を見つけており，例えば，非常に一般の（very general）4 次元の 3 次超曲面（cubic fourfold）の非有理性が示せることを発表している．彼らの議論は Hodge 構造と量子コホモロジーの分解とを組み合わせるものである．量子コホモロジーは複素構造の変形の下で変わらない一種の位相的な構造を与えている．一方で Hodge 構造は複素構造に強く依存する．また（非）有理性も複素構造に強く依存する．この二つの構造を組み合わせることで，有理性問題への応用が得られる．

また Kontsevich は講演の中で，分解定理を用いたクレパント変換予想 [Rua06] の K がネフである場合の証明（クレパント変換の下での Hodge 数の不変性を含む）についても言及している．これは McLean の結果 [McL20] の別証明を与えることが主張されている．

3 同変量子コホモロジーのフーリエ解析による分解定理の証明

証明の基本的なアイデアは爆発 $\widetilde{X} \to X$ をある $\mathbb{C}^\times$ 作用を持つ空間 W の GIT 商の変動として表すことである．また GIT 商の量子コホモロジーについての Teleman の予想 [Tel14]（の量子 D 加群版）を使う．

Teleman の予想は，W の同変量子コホモロジー $\mathrm{QH}_{\mathbb{C}^\times}(W)$ が $\mathrm{QH}(W/\!/\mathbb{C}^\times)$ に対応することを予想する．この対応の下で，$\mathrm{QH}_{\mathbb{C}^\times}(W)$ に作用するシフト作用素（Seidel 作用素）が，$\mathrm{QH}(W/\!/\mathbb{C}^\times)$ の Novikov 変数と対応し，$\mathrm{QH}_{\mathbb{C}^\times}(W)$ の同変パラメータが $\mathrm{QH}(W/\!/\mathbb{C}^\times)$ の量子接続に対応することが期待される．この予想を特別な場合に解決し，また同変量子コホモロジーの解のフーリエ変換の漸近解析を行うことにより，分解定理 2.2 が証明される．

3.1 幾何学的設定と Teleman の予想

$W = \mathrm{Bl}_{Z\times\{0\}}(X\times\mathbb{P}^1)$ を $X\times\mathbb{P}^1$ の $Z\times\{0\}$ に沿った爆発とする．W には $\mathbb{P}^1$ への $\mathbb{C}^\times$ 作用の誘導する $\mathbb{C}^\times$ 作用が入っている．この $\mathbb{C}^\times$ 作用に関して，W は二つの滑らかで非空な GIT 商を持つことが分かる．

$$W/\!/\mathbb{C}^\times = X \text{ または } \widetilde{X}$$

W への S^1 作用に関するモーメント写像 $\mu\colon W\to\mathbb{R}$ の様子は図 3 に示されている．シンプレクティック商の言葉では，上側のモーメントレベルでは商が X となり，下側では $\widetilde{X}$ となる．また W の $\mathbb{C}^\times$ 固定点集合は 3 つの成分を持ち，

$$W^{\mathbb{C}^\times} = X \sqcup \widetilde{X} \sqcup Z$$

で与えられる．

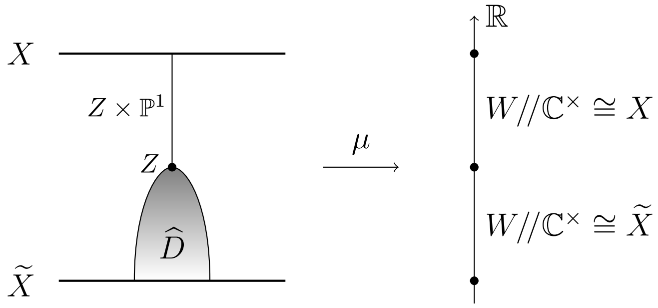

図 3　W とモーメント写像 $\mu\colon W\to\mathbb{R}$ の模式図．図の X は $X\times\{\infty\}\subset W$ を表し，$\widetilde{X}$ は $X\times\{0\}$ の strict transform である．$\widehat{D}\cong\mathbb{P}(\mathcal{N}_{Z/X}\oplus 1)$ は $W\to X\times\mathbb{P}^1$ の例外因子であり，$D=\widehat{D}\cap\widetilde{X}$ は $\widetilde{X}\to X$ の例外因子である．

大雑把に言うと，Teleman の予想の量子 D 加群版は次の同型を予言する：

$$\mathrm{QDM}_{\mathbb{C}^\times}(W) \cong \mathrm{QDM}(W/\!/\mathbb{C}^\times). \tag{6}$$

この同型の下で，

$$\begin{cases} \lambda\text{: 同変パラメータ} \\ S\text{: シフト作用素} \end{cases} \quad \text{と} \quad \begin{cases} z\nabla_{q\partial_q}\text{: } \kappa(\lambda) \text{ の方向に沿った量子接続} \\ q \end{cases}$$

とが対応すると予想される．ここで，$\kappa(\lambda)\in H^2(W/\!/\mathbb{C}^\times)$ は Kirwan map $\kappa\colon H^*_{\mathbb{C}^\times}(W)\to H^*(W/\!/\mathbb{C}^\times)$ による λ の像である．同変量子 D 加群に作用するシフト作用素は $S\circ\lambda = (\lambda - z)\circ S$ を満たし，同変パラメータ λ に関する差分方程式を与える．従ってこの同型は**差分**加群と D 加群の間のフーリエ変換とみなすことができる．

ただし，上記の同型 (6) はこのままでは正しくなく，$\mathrm{QDM}_{\mathbb{C}^\times}(W)$ の適切な完備化が必要である．実際，もしこれがそのまま正しいとすると，$\mathrm{QDM}(X)\cong\mathrm{QDM}_{\mathbb{C}^\times}(W)\cong\mathrm{QDM}(\widetilde{X})$ となって矛盾である．実際のところは，$\mathrm{QDM}(X)$ と $\mathrm{QDM}(\widetilde{X})$ は各々 $\mathrm{QDM}_{\mathbb{C}^\times}(W)$ の（別々の極限点に付随する）異なる完備化から生じている．

注 3.1　Teleman 自身は次のように予想を定式化した [Tel14, PT24]．Fano 多様体 W の $c_1^{\mathbb{C}^\times}(W)$ を安定性条件とする GIT 商（symplectic 商）$W/\!/\mathbb{C}^\times$ について，W の同変量子コホモロジーの Seidel 元 $S = 1$ のファイバー $\mathrm{QH}_{\mathbb{C}^\times}(W)/(S-1)$ が $W/\!/\mathbb{C}^\times$ の量子コホモロジー $\mathrm{QH}(W/\!/\mathbb{C}^\times)$ と同型になる．ただし Novikov 環のとり方が本稿とは異なる．Fano 多様体の場合のこの予想は（より一般の簡約群 G 作用の場合も含めて）Pomerleano-Teleman [PT24] によって解決が宣言されている．その証明はシンプレクティックコホモロジーを用いる Floer 理論的なものである．

注 3.2　Teleman の予想に対しては深谷圏とその間の Lagrangian 対応を用いたアプローチが考えられる．ハミルトン S^1 作用を持つシンプレクティック多様体 W とそのシンプレクティック簡約 $W/\!/S^1$ の間には，モーメントレベルの与える Lagrangian 対応 $\mu^{-1}(t) \hookrightarrow W \times W/\!/S^1$ があり，これが深谷圏の間の関手を与えるはずである．量子コホモロジーは深谷圏の Hochschild ホモロジーとして得られるから，量子コホモロジーの関係が得られると予想される．これに関連した仕事については，[Fuk17, LLL23] を見よ．

3.2　シフト作用素と大域的な Kähler モジュライ空間

この節では同変量子 D 加群 $\mathrm{QDM}_{\mathbb{C}^\times}(W)$ がフーリエ変換の下で Kähler モジュライ空間上の大域的な D 加群を与えることを説明する．言い換えれば $\mathrm{QDM}_{\mathbb{C}^\times}(W)$ はミラー対称性の文脈における「大域的ミラー」の代わりを務めることができる．

同変量子 D 加群におけるシフト作用素は Okounkov-Pandharipande[OP10] で導入され，[BMO11, MO12, Iri17, GMP22] などで調べられた．これは量子コホモロジーに対する Seidel 表現 [Sei97] の D 加群への持ち上げであり，一般に，トーラス $T \cong (\mathbb{C}^\times)^l$ 作用を持つ多様体の同変量子 D 加群に対して余指標格子 $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^\times, T)$ の作用を与える．

ここではシフト作用素の数学的に厳密な定義は与えないが，Floer 理論からの動機づけを簡単に説明する．X の量子コホモロジーは自由ループ空間 $\mathcal{L}X$ の半無限コホモロジー（Floer ホモロジー）とみなすことができることを思い出そう．X にトーラス T の作用があるとき，余指標 $k \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^\times, T)$ はループ空間の間に次の写像を導く．

$$k_* \colon \mathcal{L}X \to \mathcal{L}X, \quad \gamma(e^{\mathtt{i}\theta}) \mapsto k(e^{\mathtt{i}\theta}) \cdot \gamma(e^{\mathtt{i}\theta})$$

この写像が量子コホモロジー（D 加群）に導く写像が Seidel 作用素 S_k（あるいはシフト作用素）である．自由ループ空間はループを回転させる S^1 作用 $\gamma(e^{\mathtt{i}\theta}) \mapsto \gamma(z^{-1}e^{\mathtt{i}\theta})$ を持っているが，その作用している S^1 を S^1_{loop} で表そう．X の量子 D 加群 $\mathrm{QDM}(X)$ は S^1_{loop} 同変な Floer ホモロジーという解釈を持っており，そのパラメータ z は S^1_{loop} 同変パラメータである [Giv95]．上の写像 k_* の同変量子コホモロジー D 加群への作用を考えようとすると，一つ問題が生じる．それは上の写像 k_* は通常の意味で $T_{\mathbb{R}} \times S^1_{\mathrm{loop}}$ 同変ではなく，群同型

$$T_{\mathbb{R}} \times S^1_{\mathrm{loop}} \to T_{\mathbb{R}} \times S^1_{\mathrm{loop}}, \quad (t, z) \mapsto (k(z)t, z)$$

に関して同変になるということである（ここで $T_{\mathbb{R}}$ は T の極大コンパクト群を表す）．こ

の同変性のずれが同変パラメータの「シフト」の原因である．

Seidel 作用素 S_k の定義には Novikov 環の単項式 Q^d をかけるだけの不定性があることが知られている．例えば McDuff-Tolman [MT06] はその不定性を $k(\mathbb{C}^\times)$ 作用の "maximal fixed component" を用いて正規化している．論文 [Iri23a] ではこの不定性の正規化はせず，その代わりにシフト (Seidel) 表現を 2 次の同変ホモロジー群 $H_2^T(X,\mathbb{Z})$ の作用と考えた．次の完全列

$$0 \longrightarrow H_2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_2^T(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_2^T(\mathrm{pt},\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^\times, T) \longrightarrow 0$$

の下で，$H_2(X,\mathbb{Z})$ の部分は Novikov 変数の単項式の作用に対応し，それで割ったものがもともとの余指標格子 $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^\times, T)$ の作用になっている．より正確には，[Iri23a] では $H_2^T(X,\mathbb{Z})$ ではなく，次の完全列を満たす代数的な同変 1 サイクルの群 $N_1^T(X) \subset H_2^T(X,\mathbb{Z})$ の元のシフト作用を考えた．

$$0 \longrightarrow N_1(X) \longrightarrow N_1^T(X) \longrightarrow H_2^T(\mathrm{pt},\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^\times, T) \longrightarrow 0$$

各 $\beta \in N_1^T(X)$ に対して Novikov 環上線形なシフト作用素

$$S^\beta\colon \mathrm{QDM}_T(X) \to \mathrm{QDM}_T(X)[Q^{-1}]$$

が定義され，$\beta = d \in N_1(X)$ のときは，S^β は Q^d の掛け算と一致し，任意の $\beta_1, \beta_2, \beta \in N_1^T(X)$, $\lambda \in H_T^2(\mathrm{pt})$ に対して次が成立する．

$$S^{\beta_1+\beta_2} = S^{\beta_1} \circ S^{\beta_2}, \quad S^\beta \circ \lambda = (\lambda - z(\lambda\cdot\beta)) \circ S^\beta.$$

ここで，$\mathrm{QDM}_T(X)[Q^{-1}]$ は $\mathrm{QDM}_T(X)$ の Novikov 単項式 $\{Q^d : d \in \mathrm{NE}_{\mathbb{N}}(X)\}$ による局所化を意味しており，一般には S^β は格子 $\mathrm{QDM}_T(X)$ を保たない．シフト作用素の下で，$\mathrm{QDM}_T(X) \subset \mathrm{QDM}(X)[Q^{-1}]$ を保つモノイド

$$\mathrm{NE}_{\mathbb{N}}^T(X) \subset H_2^T(X,\mathbb{Z})$$

を導入することができる [Iri23a, Proposition 2.9]．これは有効曲線のモノイド $\mathrm{NE}_{\mathbb{N}}(X)$ の同変類似（「同変森モノイド」）とみなすことができる *7．シフト作用により，

$$\mathrm{QDM}_T(X) \text{ は } \mathbb{C}[\![\mathrm{NE}_{\mathbb{N}}^T(X)]\!] \text{ 上の加群の構造を持つ} \tag{7}$$

ことが分かる *8．このモノイド $\mathrm{NE}_{\mathbb{N}}^T(X)$ が生成する $H_2^T(X,\mathbb{R})$ 内の錘 $\mathrm{NE}^T(X)$（「同変森錘」）は Dogachev-Hu [DH98] および Thaddeus [Tha96] らにより考察された T 豊富錘

---

*7 T 作用が generic stabilizer を持たないとき，同変森モノイド $\mathrm{NE}_{\mathbb{N}}^T(X)$ は（定義から直ちに分かるが）$\mathrm{NE}_{\mathbb{N}}(X)$ と $c_1^T(X)\cdot\beta_j > 0$ を満たす有限個の元 $\beta_1,\dots,\beta_N \in N_1^T(X)$ で生成されている．これは「Cone Theorem」の同変類似と考えられる．

*8 これは，同変量子 D 加群 $\mathrm{QDM}_T(X)$ を差分作用素のなす環上の加群とみなすことであり，これはすなわちそのフーリエ変換を考えているということである．

$C_T(X) \subset H^2_T(X,\mathbb{R})$（$T$-ample cone）の双対錘であることが分かる．ここで $C_T(X)$ は次のように定義される．

$$C_T(X) = \left\langle c_1^T(L) : \begin{array}{l} L \to X \text{ は豊富な } T \text{ 同変直線束で} \\ L \text{ 安定な点の集合 } X_{\mathrm{st}}(L) \text{ が空でない} \end{array} \right\rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}}.$$

これは異なる GIT 安定性条件により，いくつかの部屋に分かれている．

さて，$\mathbb{C}^\times$ 作用を持つ空間 $W = \mathrm{Bl}_{Z\times\{0\}}(X \times \mathbb{P}^1)$ の場合に話を戻そう．W の同変量子 D 加群 $\mathrm{QDM}_{\mathbb{C}^\times}(W)$ には格子 $N_1^{\mathbb{C}^\times}(W) \cong N_1(W) \oplus \mathbb{Z}$ のシフト作用が定義され，そのなかのモノイド $\mathrm{NE}_{\mathbb{N}}^{\mathbb{C}^\times}(W) \subset N_1^{\mathbb{C}^\times}(W)$ の作用は Novikov 変数 Q の局所化なしに定義されている．同変森錘 $\mathrm{NE}^{\mathbb{C}^\times}(W)$ の双対錘, つまり $\mathbb{C}^\times$ 豊富錘 $\overline{C_{\mathbb{C}^\times}(W)}$ は図 3 に現れたモーメント写像の像の cone をとったものと同一視され，二つの部屋に分かれている．

$$\overline{C_{\mathbb{C}^\times}(W)} = \overline{C}_X \cup \overline{C}_{\widetilde{X}}$$

ここで各々の部屋は GIT 商 X あるいは $\widetilde{X}$ に対応する．この分割は図 4 に示したような扇（fan）の構造を与える．この扇に付随するトーリック多様体 $\mathfrak{M}$ を考えると，フーリエ変換 (7) によって $\mathrm{QDM}_{\mathbb{C}^\times}(W)$ は自然に $\mathfrak{M}$ 上の層を与えることになる．正確には，同変量子 D 加群 $\mathrm{QDM}_{\mathbb{C}^\times}(W)$ はこのトーリック多様体 $\mathfrak{M}$ のアフィン化（affinization）$\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\![\mathrm{NE}_{\mathbb{N}}^{\mathbb{C}^\times}(W)]\!]$ 上の層であるが，それを $\mathfrak{M}$ に引き戻したものを考える．トーリック多様体 $\mathfrak{M}$ は X と $\widetilde{X}$ に付随する固定点（X カスプおよび $\widetilde{X}$ カスプ）を含んでおり，「大域的 Kähler モジュライ空間」とみなすことができる．同変量子 D 加群 $\mathrm{QDM}_{\mathbb{C}^\times}(W)$ の与える層について，各々 X カスプおよび $\widetilde{X}$ カスプにおいてある小さな改変を行い（引き戻した加群の $\mathrm{QDM}_{\mathbb{C}^\times}(W)[\mathcal{Q}^{-1}]$ での像をとる操作)，そのカスプで完備化することで $\mathrm{QDM}(X)$ および $\mathrm{QDM}(\widetilde{X})$ が得られる [*9]．

3.3 同変量子コホモロジーのフーリエ解析

分解定理 2.2 の証明のあらすじは次の通りである．まず，次の 3 種類のフーリエ変換 $F_{\widetilde{X}}$, F_Z^i, F_X を構成する．（ただし $i \in \{1, 2, \ldots, r-1\}$.）

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{QDM}_{\mathbb{C}^\times}(W) \arrow[dl, "F_{\widetilde{X}}"'] \arrow[d, "F_Z^i"] \arrow[dr, "F_X"] & \\ \mathrm{QDM}(\widetilde{X}) & \mathrm{QDM}(Z) & \mathrm{QDM}(X) \end{tikzcd}$$

ここで $X, \widetilde{X}$ は W の GIT 商であり，また $X, Z, \widetilde{X}$ は W の固定点集合の成分であったことを思い出そう．一般にフーリエ変換は GIT 商，あるいは，固定点集合の成分に対して定義することができる．証明は，これらのフーリエ変換に対して次を示すことで完結する．

[*9] 正確には論文 [Iri23a] では，この主張は $\widetilde{X}$ カスプについてのみ議論されている [Iri23a, Theorem 5.2]．ただし，同様の議論は X カスプでもうまくいくはずである．

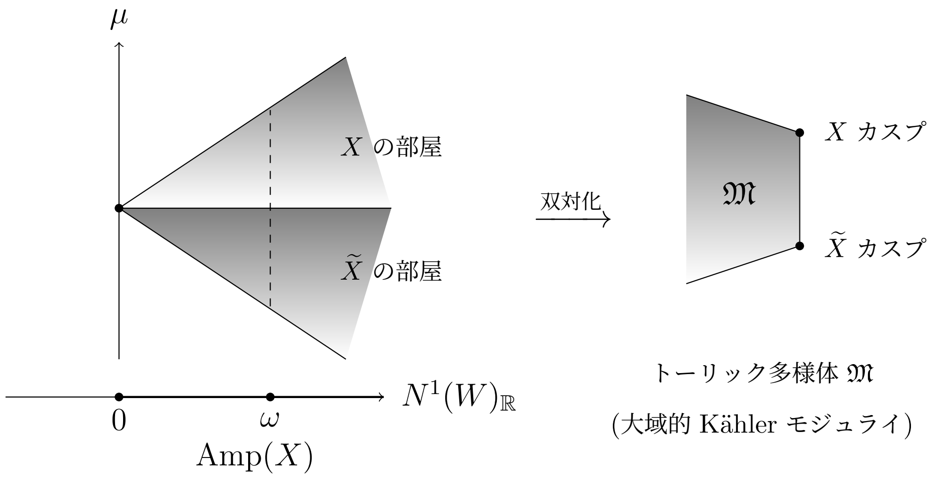

図 4　$\mathbb{C}^\times$ 豊富錘 $C_{\mathbb{C}^\times}(W)$ の持つ扇の構造とそれに付随するトーリック多様体．豊富類 $\omega \in \mathrm{Amp}(X)$ での $C_{\mathbb{C}^\times}(W) \to \mathrm{Amp}(X)$ のファイバー（図の点線部分）は，ω に関するモーメント多面体（モーメント写像の像）と同一視できる．

- フーリエ変換 $F_{\widetilde{X}}$ は $\mathrm{QDM}_{\mathbb{C}^\times}(W)$ を $\widetilde{X}$ カスプで完備化 [*10]すると同型

$$F_{\widetilde{X}}\colon\ \mathrm{QDM}_{\mathbb{C}^\times}(W)^{\wedge}_{\widetilde{X}} \xrightarrow{\cong} \mathrm{QDM}(\widetilde{X})$$

  を与える．
- フーリエ変換 $F_X \oplus F_Z^1 \oplus \cdots \oplus F_Z^{r-1}$ は完備化 $\mathrm{QDM}_{\mathbb{C}^\times}(W)^{\wedge}_{\widetilde{X}}$ に拡張し，次の同型を与える．

$$F_X \oplus F_Z^1 \oplus \cdots \oplus F_Z^{r-1}\colon\ \mathrm{QDM}_{\mathbb{C}^\times}(W)^{\wedge}_{\widetilde{X}} \xrightarrow{\cong} \mathrm{QDM}(X) \oplus \mathrm{QDM}(Z)^{\oplus(r-1)}$$

量子 D 加群は J 関数と呼ばれるコホモロジーに値をとる解をもつ．これは descendant Gromov-Witten 不変量の母関数であり，次の式で与えられる．

$$J(\tau, z) = 1 + \frac{\tau}{z} + \sum_i \sum_{d \in \mathrm{NE}_{\mathbb{N}}(X), n \geq 0} \left\langle \tau, \ldots, \tau, \frac{\phi^i}{z(z-\psi)} \right\rangle_{0,n+1,d} \frac{Q^d}{n!} \phi_i.$$

ここで $\{\phi_i\}$ と $\{\phi^i\}$ は互いに双対な $H^*(X)$ の基底である（$\int_X \phi_i \cup \phi^j = \delta_i^j$ を満たす）．以下では，J 関数（あるいはもっと一般に Givental 錘上の任意の点）のフーリエ変換の方法として 2 通りの方法とその間の関係を見る．

3.3.1　GIT 商に対するフーリエ変換

一般に GIT 商に対しては離散フーリエ変換を考えることができる．$\mathbb{C}^\times$ 多様体 W とその滑らかな GIT 商 $Y = W/\!/\mathbb{C}^\times$ に対して，J_W を W の同変 J 関数とし，$\kappa\colon H^*_{\mathbb{C}^\times}(W) \to H^*(Y)$ を Kirwan 写像とする．このとき，J_W の離散フーリエ変換が次で定義される．

$$I(q) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \kappa(\mathcal{S}^{-k} J_W) q^k.$$

[*10] 先に述べたように，単なる完備化ではなく，$\mathrm{QDM}_{\mathbb{C}^\times}(W)$ のある小さな改変が必要である．

ここで，$\mathcal{S}$ は Givental 空間 $\mathcal{H}_W^{\mathrm{rat}} = H^*_{\mathbb{C}^\times}(W) \otimes_{H^*_{\mathbb{C}^\times}(\mathrm{pt})} \mathbb{C}(\lambda, z)$ に定義される（組み合わせ論的な）シフト作用素であり，固定点集合とその法束の（同変）Chern 類から決まる．この離散フーリエ変換について，次が予想される．

予想 3.3（[Iri23a, IS]） $I(q)$ は Y の量子 D 加群の解である．（より正確には，Y の Givental 錐上の点である．ただし本稿では Givental 錐の定義は与えない．）

例 3.4 簡単な例を挙げる．$W = \mathbb{C}^r$ とし，$\mathbb{C}^\times$ のスカラー倍の作用を考える．W の同変 J 関数の $\tau = 0$ での値は，$J_W = 1$ で与えられる．$\mathcal{H}_{\mathrm{rat}}^W = \mathbb{C}(\lambda, z)$ 上のシフト作用素 $\mathcal{S}$ は次で与えられる．

$$\mathcal{S}\colon f(\lambda, z) \mapsto \lambda^r f(\lambda - z, z)$$

W の GIT 商として $\mathbb{P}^{r-1}$ を考える．Kirwan 写像 $H^*_{\mathbb{C}^\times}(\mathbb{C}^r) = \mathbb{C}[\lambda] \to H^*(\mathbb{P}^{r-1})$ は同変パラメータ λ を超平面類 $p \in H^2(\mathbb{P}^{r-1})$ に移す．このとき，$J_W = 1$ の離散フーリエ変換は

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \kappa(\mathcal{S}^{-k} J_W) q^k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \kappa\left(\frac{\prod_{c\le 0}(\lambda + cz)^r}{\prod_{c\le k}(\lambda + cz)^r}\right) q^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{\prod_{c=1}^{k}(p + cz)^r} \end{aligned}$$

で与えられる．これは良く知られた $\mathbb{P}^{r-1}$ の J 関数であり [Giv95]，$\mathrm{QDM}(\mathbb{P}^{r-1})$ の解を与える．

3.3.2 固定成分に対するフーリエ変換

$\mathbb{C}^\times$ 多様体 W の固定点集合の成分 $F \subset W^{\mathbb{C}^\times}$ をとる．この成分 F に対して，ガンマ因子 G_F を次で定義する．

$$G_F = \prod_{\varrho} \frac{1}{\sqrt{-2\pi z}} (-z)^{-\varrho/z} \Gamma(-\varrho/z)$$

ここで ϱ は F の法束 $\mathcal{N}_{F/W}$ の $\mathbb{C}^\times$ 同変 Chern 根（つまり $\prod_\varrho (1+\varrho) = c^{\mathbb{C}^\times}(\mathcal{N}_{F/W})$）全てを渡る．$G_F$ は $H^*(F)$ に値をとる λ と z の解析関数である（ここで λ は $\mathbb{C}^\times$ 同変パラメータ）．W の同変 J 関数 J_W の連続フーリエ変換を次で定義する．

$$\mathcal{I} = \int e^{\lambda \log q/z} G_F \cup J_W|_F \, d\lambda$$

これは $H^*(F)$ に値をとる関数である．$J_W|_F$ は λ の有理関数を係数とする Q, τ の冪級数であるから，Q, τ の冪ごとに項別積分することにより，（適切な積分路 [*11]を選べば）この積分に解析的な意味を持たせることができる．

[*11] 例えば，積分路は z が実のとき $c + \mathtt{i}\mathbb{R}$ の形にとれる．

法束 $\mathcal{N}=\mathcal{N}_{F/W}$ の $\mathbb{C}^\times$ 表現としての分解を $\mathcal{N}=\bigoplus_\alpha \mathcal{N}_\alpha$ とする．ここで $\mathcal{N}_\alpha$ には $\mathbb{C}^\times$ が重み $w_\alpha\in\mathbb{Z}$ で作用するものとする．$r_\alpha=\operatorname{rank}\mathcal{N}_\alpha$ とおく．停留位相近似（鞍点法）により $\mathcal{I}$ の漸近展開を（形式的に）計算することができる．Stirling の近似より，

$$e^{\lambda\log q/z}G_F\sim \mathrm{const}.e^{-\varphi(\lambda)/z},\quad \varphi(\lambda)=-\lambda\log q+\sum_\alpha r_\alpha(w_\alpha\lambda\log(w_\alpha\lambda)-w_\alpha\lambda)$$

を得る．$c_F:=\sum_\alpha r_\alpha w_\alpha\neq 0$ と仮定すると，位相関数 $\varphi(\lambda)$ は $|c_F|$ 個の臨界点

$$\lambda_{\mathrm{crit}}=\left[\left(\prod_\alpha w_\alpha^{-r_\alpha w_\alpha}\right)q\right]^{1/c_F}$$

を持つ．臨界点 λ_{crit} を一つ選ぶごとに次の形の漸近展開が得られる．

$$\mathcal{I}\sim\sqrt{2\pi z}\cdot e^{c_F\lambda_{\mathrm{crit}}/z}\mathscr{I}\quad(\text{as } z\to 0)$$

ここで $\mathscr{I}$ は $q^{-c_1(\mathcal{N}_{F/W})/(c_Fz)-(r_F-1)/(2c_F)}H^*(F)[q^{\pm1/c_F}](\!(z)\!)$ に値をとる z の漸近級数である．ただし $r_F=\operatorname{rank}\mathcal{N}_{F/W}$．Coates-Givental の量子 Riemann-Roch 定理 [CG07] を使うことにより，次の結果が得られる．

命題 3.5（[Iri23a, Proposition 4.8]） 漸近級数 $\mathscr{I}$ は F の量子 D 加群の解である．（より正確には，F の Givental 錘上の点である．）

例 3.6 例 3.4 を再び考える．$W=\mathbb{C}^r$ の固定点 $\{0\}$ に付随する $J_W=1$ の連続 Fourier 変換は

$$\int\frac{1}{(-2\pi z)^{r/2}}e^{\lambda\log q/z}(-z)^{-r\lambda/z}\Gamma(-\lambda/z)^r d\lambda$$

で与えられる．r 個の臨界点 $\lambda_{\mathrm{crit}}=q^{1/r}$ での漸近展開を考えることにより，r 個の解 $F_j\colon \mathrm{QDM}_{\mathbb{C}^\times}(\mathbb{C}^r)\to\sigma_j^*\,\mathrm{QDM}(\mathrm{pt})$, $j=1,\dots,r$ を作ることができる．例 3.4 での計算から $\mathrm{QDM}_{\mathbb{C}^\times}(\mathbb{C}^r)\cong\mathrm{QDM}(\mathbb{P}^{r-1})$ であることが分かるので，それと合わせると $\mathbb{P}^{r-1}$ の量子 D 加群の分解

$$\bigoplus_{j=1}^r F_j\colon\ \mathrm{QDM}(\mathbb{P}^{r-1})\cong\bigoplus_{j=1}^r\sigma_j^*\,\mathrm{QDM}(\mathrm{pt})$$

が得られる．これは例 1.2 で考えた $\mathbb{P}^{r-1}$ の量子コホモロジーの分解 $\mathrm{QH}(\mathbb{P}^{r-1})|_{Q=1}\cong\mathbb{C}^{\oplus r}$ の D 加群版であり，分解定理 2.2 の証明のひな型と見ることができる．また，上記の積分（Mellin-Barnes 積分と呼ばれる）を解析的に評価することで，$\mathbb{P}^{r-1}$ に対するガンマ予想を示すこともできる [GGI16, §5].

3.3.3 二つのフーリエ変換の関係

3.3.1 節の（GIT 商に対する）離散フーリエ変換と 3.3.2 節の（固定成分に対する）連続フーリエ変換の間には関係がつくことがあり，それが分解定理の証明の鍵となっている．我々の状況では，X と $\widetilde{X}$ は $W=\mathrm{Bl}_{Z\times\{0\}}(X\times\mathbb{P}^1)$ の GIT 商としても現れるし，固

定成分としても現れることを思い出そう．この場合には連続フーリエ変換を**留数定理**を使って評価することにより，実は二つのフーリエ変換が（簡単なファクターを除き）同じであることが示される．これと命題 3.5 から W の GIT 商 X, $\widetilde{X}$ に対して予想 3.3 が成立することが従う．離散フーリエ変換の表式は具体的な計算に適しており，分解定理の証明で使われる．

参考文献

[BMO11] Alexander Braverman, Davesh Maulik, and Andrei Okounkov. Quantum cohomology of the Springer resolution. *Adv. Math.*, 227(1):421–458, 2011.

[CG07] Tom Coates and Alexander Givental. Quantum Riemann-Roch, Lefschetz and Serre. *Ann. of Math. (2)*, 165(1):15–53, 2007.

[DH98] Igor V. Dolgachev and Yi Hu. Variation of geometric invariant theory quotients. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (87):5–56, 1998. With an appendix by Nicolas Ressayre.

[Fuk17] Kenji Fukaya. Unobstructed immersed Lagrangian correspondence and ieraeted a_∞ functor. `arXiv:1706.02131[math.AG]`, 2017.

[GGI16] Sergey Galkin, Vasily Golyshev, and Hiroshi Iritani. Gamma classes and quantum cohomology of Fano manifolds: gamma conjectures. *Duke Math. J.*, 165(11):2005–2077, 2016.

[GHI+24] Sergei Galkin, Jianxun Hu, Hiroshi Iritani, Ke Huazhong, Changzheng Li, and Zhitong Su. Counter-examples to Gamma conjecture I. `arXiv:2405.16979[math.AG]`, 2024.

[Giv95] Alexander B. Givental. Homological geometry. I. Projective hypersurfaces. *Selecta Math. (N.S.)*, 1(2):325–345, 1995.

[GMP22] Eduarod González, Cheuk Yu Mak, and Daniel Pomerleano. Affine nil-Hecke algebras and quantum cohomology. `arXiv:2202.05785`, 2022.

[GW19] Eduardo González and Chris T. Woodward. Quantum cohomology and toric minimal model programs. *Adv. Math.*, 353:591–646, 2019.

[IK23] Hiroshi Iritani and Yuki Koto. Quantum cohomology of projective bundles. 2023. `arXiv:2307.03696`.

[Iri10] Hiroshi Iritani. Ruan's conjecture and integral structures in quantum cohomology. In *New developments in algebraic geometry, integrable systems and mirror symmetry (RIMS, Kyoto, 2008)*, volume 59 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 111–166. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010.

[Iri17] Hiroshi Iritani. Shift operators and toric mirror theorem. *Geom. Topol.*, 21(1):315–343, 2017. `arXiv:1411.6840 [math.AG]`.

[Iri20] Hiroshi Iritani. Global mirrors and discrepant transformations for toric Deligne-Mumford stacks. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 16:Paper No. 032, 111, 2020.

[Iri23a] Hiroshi Iritani. Quantum cohomology of blowups. `arXiv:2307.13555[math.AG]`, 2023.

[Iri23b] Hiroshi Iritani. Gamma classes and quantum cohomology. In *ICM—International Congress of Mathematicians. Vol. 4. Sections 5–8*, pages 2552–2574. EMS Press, Berlin, [2023] ©2023.

[IS] Hiroshi Iritani and Fumihiko Sanda. in preparation.

[KMM87] Yujiro Kawamata, Katsumi Matsuda, and Kenji Matsuki. Introduction to the minimal model problem. In *Algebraic geometry, Sendai, 1985*, volume 10 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 283–360. North-Holland, Amsterdam, 1987.

[LLL23] Siu-Cheong Lau, Nai-Chung Conan Leung, and Yan-Lung Leon Li. Equivariant Lagrangian correspondence and a conjecture of Teleman. `arXiv:2312.13926[math.AG]`, 2023.

[McL20] Mark McLean. Birational Calabi-Yau manifolds have the same small quantum products. *Ann. of Math. (2)*, 191(2):439–579, 2020.

[MO12] Davesh Maulik and Andrei Okounkov. Quantum groups and quantum cohomology. `arXiv:1211.1287[math.AG]`, 2012.

[MT06] Dusa McDuff and Susan Tolman. Topological properties of Hamiltonian circle actions. *IMRP Int. Math. Res. Pap.*, pages 72826, 1–77, 2006.

[OP10] Andrei Okounkov and Rahul Pandharipande. The quantum differential equation of the Hilbert scheme of points in the plane. *Transform. Groups*, 15(4):965–982, 2010.

[PT24] Daniel Pomerleano and Constantin Teleman. Quantization commutes with reduction again: quantum GIT conjecture I. `arXiv:2405.20301[math.AG]`, 2024.

[Rua06] Yongbin Ruan. The cohomology ring of crepant resolutions of orbifolds. In *Gromov-Witten theory of spin curves and orbifolds*, volume 403 of *Contemp. Math.*, pages 117–126. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[Sei97] Paul Seidel. π_1 of symplectic automorphism groups and invertibles in quantum homology rings. *Geom. Funct. Anal.*, 7(6):1046–1095, 1997.

[SS20] Fumihiko Sanda and Yota Shamoto. An analogue of Dubrovin's conjecture. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 70(2):621–682, 2020. `arxiv:1705.05989 [math.AG]`.

[Tel14] Constantin Teleman. Gauge theory and mirror symmetry. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Seoul 2014. Vol. II*, pages 1309–1332. Kyung Moon Sa, Seoul, 2014.

[Tha96] Michael Thaddeus. Geometric invariant theory and flips. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(3):691–723, 1996.

[Voi07] Claire Voisin. *Hodge theory and complex algebraic geometry. I*, volume 76 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, English edition, 2007. Translated from the French by Leila Schneps.