幾何学 II　レポート問題解答　2020 年 1 月 22 日

問題 1　(1) $v \in \mathbb{C}^{n+1}$ を ℓ の基底で長さが 1 のものとする．ℓ の周りの $\mathbb{CP}^n$ の座標近傍 (U, ϕ) として

$$U = \{[z] \in \mathbb{CP}^n : z \notin \ell^\perp\},$$
$$\phi\colon U \to \ell^\perp, \quad v + \phi([z]) = \text{直線}\, \mathbb{C}z \text{ と超平面 } v + \ell^\perp \text{ との交点}$$

で与えられるものがとれる．式で書くと

$$\phi([z]) = \frac{z - (z, v)v}{(z, v)}.$$

この座標に関して $c_\varphi(t) = \mathbb{C}(v + t\varphi(v))$ を座標表示すると，

$$\phi(c_\varphi(t)) = t\varphi(v)$$

であり，$t = 0$ での速度ベクトルはこの座標の下で $\varphi(v)$ である．従って対応 $\varphi \mapsto \frac{d}{dt}c_\varphi(t)|_{t=0}$ は同型である．

注意 上記の ϕ が座標を与えることは明らかであろうが，念のため説明しておく．まず，$\tilde{U} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} : z \notin \ell^\perp\} = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \ell^\perp$ は開集合であり，したがって U も開集合である．さらに ϕ の定義式から可換図式

$$\begin{tikzcd} \tilde{U} \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\tilde{\phi}"] & \\ U \arrow[r, "\phi"'] & \ell^\perp \end{tikzcd}$$

を満たす $\tilde{\phi}$ は連続であり，従って ϕ も連続．さらに ϕ の逆写像が

$$\phi^{-1}(w) = [v + w], \qquad w \in \ell^\perp$$

で与えられ，明らかに連続である．以上より $\phi\colon U \to \ell^\perp$ は同相写像である．最後に，標準的な座標 $(U_i, \phi_i\colon U_i \to \mathbb{C}^n)$, $i = 1, \dots, n+1$ を

$$U_i = \{[z_1, \dots, z_{n+1}] : z_i \neq 0\}, \quad \phi_i([z_1, \dots, z_{n+1}]) = \left(\frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_{n+1}}{z_i}\right)$$

で導入するとき，(U, ϕ) と (U_i, ϕ_i) との座標変換 $\phi \circ \phi_i^{-1}$, $\phi_i \circ \phi^{-1}$ が C^∞ 級であることを確認すればよいが，これは容易である．

(2) $v' \in \ell$ を別の長さ 1 のベクトルとすると，$v' = \lambda v$，$\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ と書ける．このとき

$$-\Im(\varphi(v'), \psi(v')) = -\Im(\lambda\varphi(v), \lambda\psi(v)) = -\Im(|\lambda|^2(\varphi(v), \psi(v))) = -\Im(\varphi(v), \psi(v))$$

従って $\sigma(\varphi,\psi)$ は v の取り方によらない．また $(z,w)=\overline{(w,z)}$ を用いると，

$$\sigma(\psi,\varphi)=-\Im(\psi(v),\varphi(v))=\Im(\varphi(v),\psi(v))=-\sigma(\varphi,\psi)$$

ゆえ，σ は反対称の $\mathbb{R}$ 双線形形式である．

(3) 1 次元部分空間 ℓ の長さ 1 の生成元 v をとり，それを $\mathbb{C}^{n+1}$ の正規直交基底 $(v_0=v,v_1,\dots,v_n)$ に拡張する．このとき $v_1,\dots,v_n$ は $\ell^\perp$ の基底であり，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\ell,\ell^\perp)$ の $\mathbb{C}$ 上の基底 $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ が次で定義される．

$$\varphi_i(v)=v_i,\quad 1\le i\le n.$$

また $\psi_i=\sqrt{-1}\varphi_i$ とおくと，$\varphi_1,\dots,\varphi_n,\psi_1,\dots,\psi_n$ は $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\ell,\ell^\perp)$ の $\mathbb{R}$ 上の基底をなす．$x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\ell,\ell^\perp),\mathbb{R})$ をこの基底の双対基底とするとき，

$$\sigma=\sum_{i=1}^n x_i\wedge y_i$$

であることを示そう．実際，σ の定義から

$$\begin{aligned}\sigma(\varphi_i,\psi_j)&=-\Im(v_i,\sqrt{-1}v_j)=\delta_{ij}\\ \sigma(\varphi_i,\varphi_j)&=-\Im(v_i,v_j)=0\\ \sigma(\psi_i,\psi_j)&=-\Im(\sqrt{-1}v_i,\sqrt{-1}v_j)=0\end{aligned}$$

であるから結論が従う．従って

$$\sigma^n=n!\,x_1\wedge y_1\wedge\cdots\wedge x_n\wedge y_n\neq 0$$

となり，示された．

(4) $j^*\omega=\pi^*\sigma$ を S^{2n+1} の各点 v ごとに示せばよい．$\ell=\pi(v)=\mathbb{C}v$ とする．埋め込み $j\colon S^{2n+1}\to\mathbb{C}^{n+1}$ の微分によって，点 v での S^{2n+1} の接空間は $(\mathbb{R}v)^{\perp_{\mathbb{R}}}\subset\mathbb{C}^{n+1}$ と同一視される．ただし $(\mathbb{R}v)^{\perp_{\mathbb{R}}}$ は標準的な実内積に関する直交補空間を表す．この同一視の下で，$w\in(\mathbb{R}v)^{\perp_{\mathbb{R}}}$ は S^{2n+1} の曲線

$$\tilde{c}_w(t)=\frac{v+tw}{\|v+tw\|}$$

の $t=0$ での速度ベクトルに対応する．ここで

$$\pi(\tilde{c}_w(t))=[v+tw]$$

であり，この座標は ((1) で導入した座標系について)

$$\phi(\pi(\tilde{c}_w(t))=\frac{t}{1+t(v,w)}(w-(w,v)v).$$

($w \in (\mathbb{R}v)^{\perp_{\mathbb{R}}}$ より $(v,w) \in \sqrt{-1}\mathbb{R}$ であるから，$1+t(v,w) \neq 0$ であることに注意する．）この曲線の $t=0$ での速度ベクトルは $w-(w,v)v$ であるから，π の接写像 $d_v\pi\colon T_vS^{2n+1} \cong (\mathbb{R}v)^{\perp_{\mathbb{R}}} \to T_\ell\mathbb{CP}^n \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\ell,\ell^\perp)$ は

$$d_v\pi(w) = \varphi_w, \quad \varphi_w \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\ell,\ell^\perp)\text{ は }\varphi_w(v) = w-(w,v)v\text{ を満たす}$$

で与えられる．以上より $w_1, w_2 \in T_vS^{2n+1} \cong (\mathbb{R}v)^{\perp_{\mathbb{R}}}$ に対して，

$$\begin{aligned}
\pi^*\sigma(w_1,w_2) &= \sigma(d_v\pi(w_1), d_v\pi(w_2)) \\
&= -\Im(\varphi_{w_1}(v), \varphi_{w_2}(v)) \\
&= -\Im(w_1-(w_1,v)v, w_2-(w_2,v)v) \\
&= -\Im\left((w_1,w_2)-(w_1,v)(v,w_2)-\overline{(w_2,v)}(w_1,v)+(w_1,v)\overline{(w_2,v)}\right) \\
&= -\Im\left((w_1,w_2)-(w_1,v)(v,w_2)\right) \\
&= -\Im(w_1,w_2) = j^*\omega(w_1,w_2)
\end{aligned}$$

ただし，最後の行で $(w_i,v) \in \sqrt{-1}\mathbb{R}$ を用いた．従って $\pi^*\sigma = j^*\omega$.

(5) $\mathbb{C}^{n+1}$ の座標を $z_j = x_j + \sqrt{-1}y_j$ とおくと，(3) と同様の議論によって

$$\omega = \sum_{j=1}^{n+1} dx_j \wedge dy_j$$

であることが分かる．したがって ω は閉形式である．(4) で示したことから，

$$\pi^*(d\sigma) = d\pi^*\sigma = dj^*\omega = j^*d\omega = 0$$

一方，各点 $v \in S^{2n+1}$ に対して $d_v\pi$ は全射であることを示そう．$\ell = \pi(v) = \mathbb{C}v \in \mathbb{CP}^n$ とする．$\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\ell,\ell^\perp) \cong T_\ell\mathbb{CP}^n$ に対して，$\varphi(v) \in \ell^\perp$ である．$\ell^\perp \subset (\mathbb{R}v)^{\perp_{\mathbb{R}}}$ であることから，$\varphi(v) \in (\mathbb{R}v)^{\perp_{\mathbb{R}}} \cong T_vS^{2n+1}$ でもある．(4) での計算から $d_v\pi(\varphi(v)) = \varphi$ である．従って $d_v\pi$ は全射．このことと $\pi^*(d\sigma)=0$ より，$d\sigma = 0$ が従う．すなわち σ は閉形式である．

次に de Rham コホモロジー類 $[\sigma]$ がゼロでないことを示す．σ^n は (3) から $\mathbb{CP}^n$ に向きを定める．この向きに関して

$$\int_{\mathbb{CP}^n} \sigma^n > 0$$

である．従って Stokes の定理から σ^n は完全形式ではない．すなわち $[\sigma^n] \neq 0$. $[\sigma^n] = [\sigma]^n$ より $[\sigma]$ もゼロではない．

問題 2　(1) 写像 $\phi\colon p_n^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{-1\}) \to (\mathbb{C}\setminus\{-1\}) \times X_{n-1}$ を

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \left(p_n(x), \left(\frac{x_1}{p_n(x)+1}, \ldots, \frac{x_n}{p_n(x)+1}\right)\right)$$

と定める．ここで $p_n(x) = -1 - x_1 - \cdots - x_n$ である．$p_n(x) \neq -1$ であるから，定義に現れる式の分母はゼロにならない．また右辺の第二成分が X_{n-1} に含まれることも容易に検証できる．ϕ は明らかに C^∞ 級である．ϕ の逆写像は

$$\phi^{-1}(\lambda, (x_1, \ldots, x_n)) = ((\lambda+1)x_1, \ldots, (\lambda+1)x_n)$$

で与えられ，これも明らかに C^∞ 級である．以上より ϕ は C^∞ 級同相写像．また $\pi_1 \circ \phi = p$ であることも明らか．

(2) $(\mathbb{C}^\times)^{n+1} \cong (S^1)^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ は $(S^1)^{n+1}$ とホモトピー同値であるから，Künneth の定理より $H^k((\mathbb{C}^\times)^{n+1}) \cong H^k((S^1)^{n+1}) \cong \mathbb{R}^{\binom{n+1}{k}}$ であることに注意しておく．n についての帰納法で次を示す．

> $i^*\colon H^k((\mathbb{C}^\times)^{n+1}) \to H^k(X_n)$ は任意の k について全射であり，$0 \leq k \leq n$ のとき同型，$k > n$ についてはゼロ写像である．特に
>
> $$\dim H^k(X_n) = \begin{cases} \binom{n+1}{k} & 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

$n = 0$ のとき，$X_0 = \{-1\} \subset \mathbb{C}^\times$ であるから明らかにこの主張は成り立っている．以下，$n-1$ まで正しいとして，n のときに示そう．

まず，次のことに注意する．$f\colon X \to Y$ を C^∞ 級写像とし，$Y = U \cup V$ を Y の開被覆とする．このとき X に開被覆 $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ が誘導されるが，対応する Mayer-Vietoris 完全列の間に次の可換図式が成立する．

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H^*(Y) \arrow[r] \arrow[d] & H^*(U) \oplus H^*(V) \arrow[r] \arrow[d] & H^*(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d] & H^{*+1}(Y) \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
{} \arrow[r] & H^*(X) \arrow[r] & H^*(f^{-1}(U)) \oplus H^*(f^{-1}(V)) \arrow[r] & H^*(f^{-1}(U \cap V)) \arrow[r] & H^{*+1}(X) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

ここで縦の写像は全て f^* で与えられる．実際，最初の二つの四角の可換性は明らかであり，三つ目の四角の可換性は ρ_U, ρ_V を $\{U, V\}$ に付随する 1 の分割とするとき，$f^*\rho_U, f^*\rho_V$ が $\{f^{-1}(U), f^{-1}(V)\}$ に付随する 1 の分割となることを使って，次のように示される．

$$\begin{tikzcd}
{[\omega]} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & {[d\rho_U \wedge \omega]} \arrow[d, mapsto] \\
{[f^*\omega]} \arrow[r, mapsto] & {[d(f^*\rho_U) \wedge f^*\omega]}
\end{tikzcd}$$

$X = (\mathbb{C}^\times)^n$，$Y = (\mathbb{C}^\times)^n \times \mathbb{C}$ とし，$f\colon X \to Y$ を

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, p(x_1, \ldots, x_n))$$

ととる．さらに $U = (\mathbb{C}^\times)^n \times (\mathbb{C} \setminus \{-1\})$, $V = (\mathbb{C}^\times)^n \times \mathbb{C}^\times$ とおくとき，$\{U, V\}$ は Y の開被覆で，$f^{-1}(U) = p_n^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{-1\})$, $f^{-1}(V) = p_n^{-1}(\mathbb{C}^\times) \cong X_n$ である．上で注

意した事実から，
$(\star)$

$$\begin{array}{ccccccc}
H^*((\mathbb{C}^\times)^n\times\mathbb{C}) & \xrightarrow{g_1} & H^*(U)\oplus H^*(V) & \xrightarrow{h_1} & H^*(U\cap V) & \xrightarrow{d_1^*} & H^{*+1}((\mathbb{C}^\times)^n\times\mathbb{C}) \\
\downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} \\
H^*((\mathbb{C}^\times)^n) & \xrightarrow{g_2} & H^*(p_n^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{-1\}))\oplus H^*(X_n) & \xrightarrow{h_2} & H^*(p_n^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{-1,0\})) & \xrightarrow{d_2^*} & H^{*+1}((\mathbb{C}^\times)^n)
\end{array}$$

まず第一行について調べる．これは $\mathbb{C}$ の開被覆 $\mathbb{C}=(\mathbb{C}\setminus\{-1\})\cup\mathbb{C}^\times$ に付随する Mayer-Vietoris 完全列に $H^*((\mathbb{C}^\times)^n)$ をテンソルして得られる (この事実は Künneth の定理の証明中で示した)．Mayer-Vietoris 完全列

$$(\star\star)\qquad \to H^*(\mathbb{C})\to H^*(\mathbb{C}\setminus\{-1\})\oplus H^*(\mathbb{C}^\times)\to H^*(\mathbb{C}\setminus\{-1,0\})\xrightarrow{d^*}H^{*+1}(\mathbb{C})\to$$

の連結準同型 d^* は消えているので ($*=-1$ のときのみ $H^{*+1}(\mathbb{C})$ が消えないことから明らか)，式 $(\star)$ の上の行の連結準同型 d_1^* はゼロ写像であることが分かる．次に $\gamma=f^*\colon H^*(U\cap V)\to H^*(p_n^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{-1,0\}))$ が全射であることを示そう．次の可換図式を用いる．

$$\begin{array}{ccc}
p_n^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{-1,0\}) & \xrightarrow{f} & U\cap V=(\mathbb{C}^\times)^n\times(\mathbb{C}\setminus\{-1,0\}) \\
\cong\downarrow{\scriptstyle\phi} & & \cong\downarrow{\scriptstyle\Phi} \\
(\mathbb{C}\setminus\{-1,0\})\times X_{n-1} & \xrightarrow{\mathrm{id}\times i} & (\mathbb{C}\setminus\{-1,0\})\times(\mathbb{C}^\times)^n
\end{array}$$

ここで左の縦の写像は (1) で示した微分同相写像であり，右の微分同相写像 Φ は

$$\Phi((x_1,\ldots,x_n),\lambda)=\left(\lambda,\left(\frac{x_1}{1+\lambda},\ldots,\frac{x_n}{1+\lambda}\right)\right)$$

で与えられる．また，$i\colon X_{n-1}\to(\mathbb{C}^\times)^n$ は包含写像．可換性 $\Phi\circ f=(\mathrm{id}\times i)\circ\phi$ は容易に検証できる．帰納法の仮定から $i^*\colon H^*((\mathbb{C}^\times)^n)\to H^*(X_{n-1})$ は全射であり，Künneth の定理から上記の $\mathrm{id}\times i$ による引き戻しは全射．このことと上の可換図式から $\gamma=f^*$ は全射である．このことと $d_1^*=0$ とを合わせると，$(\star)$ の下の行の連結準同型も消えている ($d_2^*=0$) ことが分かる．

以上から $(\star)$ は 2 つの短完全列からなる可換図式を与える．
$(\star\star\star)$

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & H^*((\mathbb{C}^\times)^n\times\mathbb{C}) & \xrightarrow{g_1} & H^*(U)\oplus H^*(V) & \xrightarrow{h_1} & H^*(U\cap V) & \to & 0 \\
& & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\
0 & \to & H^*((\mathbb{C}^\times)^n) & \xrightarrow{g_2} & H^*(p_n^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{-1\}))\oplus H^*(X_n) & \xrightarrow{h_2} & H^*(p_n^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{-1,0\})) & \to & 0
\end{array}$$

ここで，写像 $\alpha=f^*$ は同型である．実際 $f\colon(\mathbb{C}^\times)^n\to(\mathbb{C}^\times)^n\times\mathbb{C}$ は

$$(\mathbb{C}^\times)^n\to(\mathbb{C}^\times)^n\times\mathbb{C},\quad (x_1,\ldots,x_n)\mapsto(x_1,\ldots,x_n,0)$$

とホモトピックであり，Poincaré の補題から $\alpha=f^*$ は同型である．この可換図式を 3 つの cochain 複体の間の完全列とみて，対応するコホモロジー長完全列を書くと (snake lemma)，

$$0\to\operatorname{Ker}\beta\to\operatorname{Ker}\gamma\to\operatorname{Cok}\alpha=0\to\operatorname{Cok}\beta\to\operatorname{Cok}\gamma\to 0$$

γは全射であったから，$\mathrm{Cok}\,\gamma = 0$．従って$\mathrm{Cok}\,\beta = 0$．特に$i^*\colon H^*(V) = H^*((\mathbb{C}^\times)^{n+1}) \to H^*(X_n)$は全射であることが分かった．最後に次元を調べる．(1) の結果と Künneth の定理を用いて，

$$\begin{aligned} H^k((\mathbb{C}^\times)^n) &\cong \mathbb{R}^{\binom{n}{k}} \\ H^k(p_n^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{-1\})) &\cong H^k((\mathbb{C}\setminus\{-1\})\times X_{n-1}) \cong H^k(X_{n-1}) \oplus H^{k-1}(X_{n-1}) \\ H^k(p_n^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{-1,0\})) &\cong H^k((\mathbb{C}\setminus\{-1,0\})\times X_{n-1}) \cong H^k(X_{n-1}) \oplus H^{k-1}(X_{n-1}) \otimes \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

である．($H^*(\mathbb{C}\setminus\{-1,0\})$ については上記の Mayer-Vietoris 完全列 ($\star\star$) からわかる．) 従って，($\star\star\star$) の下の行の完全性から

$$\begin{aligned} \dim H^k(X_n) &= \dim H^k((\mathbb{C}^\times)^n) + \dim H^k(p_n^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{-1,0\})) - \dim H^k(p_n^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{-1\})) \\ &= \binom{n}{k} + \dim H^{k-1}(X_{n-1}) \end{aligned}$$

このことと帰納法の仮定から結論が得られる．

(3-a) $(\mathbb{C}^\times)^{n+1}$ のコンパクト台コホモロジーは $(\mathbb{C}^\times)^{n+1} \cong (S^1)^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ および Poincaré の補題より

$$H_c^{2n+2-k}((\mathbb{C}^\times)^{n+1}) \cong H^{n+1-k}((S^1)^{n+1}) \cong \mathbb{R}^{\binom{n+1}{n+1-k}}$$

で与えられる．これは $0 \le k \le n+1$ の範囲でのみ消えない．$(\mathbb{C}^\times)^{n+1}$ の座標 $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ に対して $r_i = |x_i|, \theta_i = \arg(x_i)$ とおく．Poincaré の補題の同型の作り方から，$e(r) \in C_c^\infty((0,\infty))$ を $\int_0^\infty e(r)dr = 1$ を満たす関数とするとき，$H_c^{2n+2-k}((\mathbb{C}^\times)^{n+1})$ の基底は次の微分形式で与えられる．

$$\alpha_I = \frac{1}{(2\pi)^{n-k}} e(r_1)\cdots e(r_{n+1}) dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_{n+1} \wedge \bigwedge_{i\notin I} d\theta_i$$

ただし $I \subset \{1, \ldots, n+1\}$ は位数 k の部分集合にわたって動く．ここで

$$\int_{R_I} \alpha_J = \pm\delta_{I,J}$$

であるから，R_I の Poincaré 双対類 $\eta_I \in H^*((\mathbb{C}^\times)^{n+1})$ たちは（符号を除き）$\{\alpha_I\} \subset H_c^*((\mathbb{C}^\times)^{n+1})$ の双対基底をなすことが分かる．

(3-b) $i^*\colon H^k((\mathbb{C}^\times)^{n+1}) \to H^k(X_n)$ は $0 \le k \le n$ で同型であったから，$0 \le |I| \le n$ に対して $i^*\eta_I$ が $R_I \cap X_n$ の Poincaré 双対類であることを示せば十分である．授業で示した定理から，R_I が X_n と横断的に交わることを示せばよい．実の座標 a_i, b_i を用いて $x_i = a_i + \sqrt{-1}b_i$ とおく．$X_n \subset (\mathbb{C}^\times)^{n+1}$ は方程式

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1 + \cdots + a_{n+1} + 1 \\ f_2 &= b_1 + \cdots + b_{n+1} \end{aligned}$$

の共通ゼロ点として与えられた．従って $R_I \cap X_n$ の各点で $df_1(v) \neq 0, df_2(v) = 0$, $df_1(w) = 0, df_2(w) \neq 0$ を満たす R_I の接ベクトル v, w が存在すればよい．実際

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{\partial}{\partial a_1} + \cdots + \frac{\partial}{\partial a_{n+1}} \\
w &= \sum_{i \in \{1,\ldots,n+1\} \setminus I} \frac{\partial}{\partial b_i}
\end{aligned}
$$

とおけば，v, w は R_I に接しており，$df_1(v) = n+1$, $df_2(v) = 0$, $df_1(w) = 0$, $df_2(w) = n+1-|I| \neq 0$．以上より示された．