幾何学II　レポート問題　2019年12月25日

以下の問題1・2を全て解き，理学部3号館数学教室事務室に**2020年1月17日(金)17:00**までに提出してください．提出されたレポートは返却しません．

問題1　S^{2n+1} を以下のように $\mathbb{C}^{n+1}$ の中の単位球面とみなし，$j\colon S^{2n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ を包含写像とする．

$$S^{2n+1} = \{(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} : |z_1|^2 + \cdots + |z_{n+1}|^2 = 1\}.$$

また $\pi\colon S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ を自然な射影とする．

$$\pi(z_1, \ldots, z_{n+1}) = [z_1, \ldots, z_{n+1}].$$

以下では $\mathbb{C}^{n+1}$ の標準的なエルミート内積 $(z, w) = \sum_{i=1}^{n+1} z_i \overline{w_i}$ を固定する．

(1) $\mathbb{CP}^n$ の点 ℓ を $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の1次元部分空間とみなす．$\ell^\perp$ をエルミート内積に関する $\ell \subset \mathbb{C}^{n+1}$ の直交補空間とする．$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\ell, \ell^\perp)$ の元 φ に対して $\mathbb{CP}^n$ 内の曲線 $\mathbb{R} \ni t \mapsto c_\varphi(t) \in \mathbb{CP}^n$ を

$$c_\varphi(t) = \{v + t\varphi(v) : v \in \ell\}$$

と定める．ここで右辺は $\mathbb{C}^{n+1}$ の1次元部分空間である．明らかに $c_\varphi(0) = \ell$ である．この曲線の $t = 0$ での速度ベクトルを対応させる写像

$$\varphi \longmapsto \left. \frac{d}{dt} c_\varphi(t) \right|_{t=0}$$

は同型写像 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\ell, \ell^\perp) \to T_\ell \mathbb{CP}^n$ を定めることを示せ．

(2) ℓ を $\mathbb{CP}^n$ の点，$v \in \ell$ を長さが1のベクトルとする．$\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\ell, \ell^\perp)$ に対して実数 $\sigma(\varphi, \psi)$ を

$$\sigma(\varphi, \psi) = -\Im(\varphi(v), \psi(v))$$

と定める．ここで右辺の $(\cdot, \cdot)$ はエルミート内積であり，$\Im z$ は複素数 z の虚部を表す．この定義が長さ1のベクトル v の取り方によらないことを確かめ，σ が $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\ell, \ell^\perp)$ 上の反対称な $\mathbb{R}$ 双線形形式を定めることを示せ．

(3) (1) の同型 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\ell, \ell^\perp) \cong T_\ell \mathbb{CP}^n$ により σ は $\bigwedge^2 T_\ell^* \mathbb{CP}^n$ の元を定め，$\mathbb{CP}^n$ 上の2次微分形式とみなせる．$\bigwedge^{2n} T_\ell^* \mathbb{CP}^n$ の元として，次が成り立つことを示せ．

$$\overbrace{\sigma \wedge \cdots \wedge \sigma}^{n\text{ 個}} \neq 0.$$

(4) $\mathbb{C}^{n+1}$ 上の反対称な $\mathbb{R}$ 双線形形式 ω を $\omega(z, w) = -\Im(z, w)$ で定義する．$\mathbb{C}^{n+1}$ の各点での接空間は自然に $\mathbb{C}^{n+1}$ と同一視されるため，ω は $\mathbb{C}^{n+1}$ 上の2次微分形式を定める．このとき，$j^*\omega = \pi^*\sigma$ を示せ．ただし，j と π は問題の最初に与えた写像である．

(5) $\mathbb{CP}^n$ 上の 2 次微分形式として，σ は閉形式 ($d\sigma = 0$) であることを示せ．また (3) を用いて，σ の de Rham コホモロジー類 $[\sigma]$ はゼロではないことを示せ．(ここで与えた σ は Fubini-Study 計量と呼ばれている．)

問題 2　整数 $n \geq 0$ に対して，多様体 X_n を次で定める．

$$X_n = \left\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in (\mathbb{C}^\times)^{n+1} : x_1 + \cdots + x_{n+1} + 1 = 0\right\}$$

ただし，$\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とおいた．

(1) $n \geq 1$ とし，写像 $p_n \colon (\mathbb{C}^\times)^n \to \mathbb{C}$ を

$$p_n(x_1, \ldots, x_n) = -1 - x_1 - \cdots - x_n$$

と定める．この写像を $p_n^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{-1\})$ に制限したものは X_{n-1} をファイバーとする自明ファイバー束であることを示せ．つまり，次の図式を可換にする微分同相写像 $\phi \colon p_n^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{-1\}) \cong (\mathbb{C} \setminus \{-1\}) \times X_{n-1}$ が存在することを示せ．

$$\begin{tikzcd} p_n^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{-1\}) \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "p_n"'] & & (\mathbb{C} \setminus \{-1\}) \times X_{n-1} \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & \mathbb{C} \setminus \{-1\} & \end{tikzcd}$$

ここで π_1 は第一成分への射影である．

(2) X_n の de Rham コホモロジー群 $H^*(X_n)$ を計算せよ．さらに包含写像 $i \colon X_n \to (\mathbb{C}^\times)^{n+1}$ に関する引き戻し

$$i^* \colon H^k((\mathbb{C}^\times)^{n+1}) \to H^k(X_n)$$

は任意の k に対して全射で，$0 \leq k \leq n$ に対して同型，さらに $k > n$ に対してはゼロ写像であることを示せ．

(ヒント：$p_n^{-1}(\mathbb{C}^\times) \cong X_n$ に注意する．もし一般の n について解くのが難しければ，$n = 1, 2$ の場合を考察してもよい．)

(3) 部分集合 $I \subset \{1, 2, \ldots, n+1\}$ に対して $(\mathbb{C}^\times)^{n+1}$ の閉部分多様体 R_I を

$$R_I = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in (\mathbb{C}^\times)^{n+1} : x_i \in \mathbb{R}_{>0} \text{ for all } i \in I\}$$

で定める．ただし $\mathbb{R}_{>0}$ は正の実数全体の集合である．また $I = \emptyset$ のとき，$R_\emptyset = (\mathbb{C}^\times)^{n+1}$ である．$(\mathbb{C}^\times)^{n+1}$, X_n, R_I には適当に向きを定めておくことにする．次の問いに答えよ．

(3-a) I が $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ のすべての部分集合にわたって動くとき，R_I の Poincaré 双対は $H^*((\mathbb{C}^\times)^{n+1})$ の基底をなすことを示せ．

(3-b) I が $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ のすべての**真**部分集合 (つまり $I \subsetneq \{1, 2, \ldots, n+1\}$ なる部分集合) にわたって動くとき，$R_I \cap X_n$ の Poincaré 双対は $H^*(X_n)$ の基底をなすことを示せ．