幾何学II　期末試験解答例　2020年2月5日

問題 1 (1) $[x] \in H^p(E^*)$ に対して $d^*([x]) \in H^{p+1}(C)$ を次のように定義する．g は全射なので $g(y) = x$ を満たす $y \in D^p$ が存在する．さらに $g(dy) = dg(y) = dx = 0$ より，$dy \in \operatorname{Ker} g$．完全性から $dy \in \operatorname{Im}(f)$ であり，$dy = f(z)$ を満たす $z \in C^{p+1}$ が存在する．$f(dz) = df(z) = d(dy) = 0$ であることと，f が単射であることから $dz = 0$．従って z はコホモロジー類 $[z] \in H^{p+1}(C)$ を定める．ここで $d^*([x]) = [z]$ と定める．

(2) 準同型 $K^p \colon C^p \to D^{p-1}$, $p \in \mathbb{Z}$ が存在して

$$f^p - g^p = d \circ K^p + K^{p+1} \circ d$$

が成立する．

(3) M を C^∞ 級多様体，$\pi \colon E \to M$ を向き付けられた階数 r の実ベクトル束とする．このときファイバーに沿った積分

$$\pi_* \colon H^*_{\mathrm{cv}}(E) \to H^{*-r}(M)$$

は同型である．ここで $H^*_{\mathrm{cv}}(E)$ はファイバー方向にコンパクト台の（“compact in the vertical direction”) de Rham コホモロジーであり，正確には複体

$$\Omega^p_{\mathrm{cv}}(E) = \{\omega \in \Omega^p \mid \pi \colon \operatorname{Supp}(\omega) \to M \text{ は proper}\}$$

によって定義されるものである．

(4) X を位相空間，$A, B \subset X$ を部分集合とする．切除同型とは次の同型のことである．$\{A, B\}$ が切除対であれば (すなわち $S_*(A)+S_*(B) \subset S_*(A+B)$ がチェインホモトピー同値であれば)，包含写像 $i \colon (A, A \cap B) \to (A \cup B, B)$ は同型 $i_* \colon H_*(A, A \cap B) \cong H_*(A \cup B, B)$ を誘導する．

$\{A, B\}$ が切除対であるための十分条件としては次が考えられる．

- $\operatorname{Int}(A) \cup \operatorname{Int}(B) = A \cup B$．ただし $\operatorname{Int}(A)$ は $A \cup B$ における A の内点の集合であり，$\operatorname{Int}(B)$ は $A \cup B$ における B の内点の集合．
- X が CW 複体で，A, B がその部分複体であること．

問題 2　(1) M を開集合 $U = \{(x, y) \in M : x < 2\}$，$V = \{(x, y) \in M : x > 1\}$ で覆う．U, V は各々 S^1 とホモトピー同値，$U \cap V$ は可縮であることに注意する．Mayer-Vietoris 完全列は

$$\begin{aligned}
0 \longrightarrow H^0(M) &\longrightarrow H^0(U) \oplus H^0(V) \longrightarrow H^0(U \cap V) \\
\longrightarrow H^1(M) &\longrightarrow H^1(U) \oplus H^1(V) \longrightarrow H^1(U \cap V) \\
\longrightarrow H^2(M) &\longrightarrow H^2(U) \oplus H^2(V) \longrightarrow H^2(U \cap V)
\end{aligned}$$

であるが，上の注意から $H^1(U \cap V) = 0$ であり，また $H^0(U) \oplus H^0(V) \to H^0(U \cap V)$, $(a, b) \mapsto a - b$ は全射となる．従って制限写像

$$H^1(M) \longrightarrow H^1(U) \oplus H^1(V)$$

は同型．$H^1(U)\oplus H^1(V)\cong H^1(S^1)\oplus H^1(S^1)\cong\mathbb{R}^2$ より結論が得られる．

(2) 閉部分多様体 R_i を $R_1=\{(0,y):y>0\}$, $R_2=\{(3,y):y>0\}$ と定め，これらの向きを y 座標が増える向きにとる．R_i のポアンカレ双対 $[\tau_i]$ が $H_1(M)$ の基底であることを示そう．$r_1=\sqrt{x^2+y^2}$ を $(0,0)$ からの距離を表す M 上の函数，$r_2=\sqrt{(x-3)^2+y^2}$ を $(3,0)$ からの距離を表す M 上の函数とする．$e(r)\in C_c^\infty((0,1))$ を開区間 $(0,1)$ 上のコンパクト台の C^∞ 級関数であって $\int_0^\infty e(r)dr=1$ を満たすものとする．$\omega_i=e(r_i)dr_i$ とおくと，ω_i は M 上のコンパクト台の閉 1 形式を与える．ここで

$$\int_M \omega_j\wedge\tau_i=\int_{R_i}\omega_j=\delta_{i,j}$$

であるからコホモロジー類 $[\tau_1],[\tau_2]$ は線形独立．実際，もし線形関係 $c_1[\tau_1]+c_2[\tau_2]=0$ が成立すれば

$$0=\int_M\omega_j\wedge(c_1\tau_1+c_2\tau_2)=c_1\int_{R_1}\omega_j+c_2\int_{R_2}\omega_j=c_j$$

となる．従って $[\tau_1]$, $[\tau_2]$ は $H^1(M)$ の基底をなす．

(3) (2) での計算から $[\omega_1],[\omega_2]\in H_c^1(M)$ が一次独立であることも従う．Poincaré 双対性定理より，$H_c^1(M)\cong H^1(M)^*$ は 2 次元であり，従って $[\omega_1],[\omega_2]$ は $H_c^1(M)$ の基底をなす．

θ_1 を $(0,0)$ を中心とした角度座標，θ_2 を $(3,0)$ を中心とした角度座標とする．(つまり $y/x=\tan\theta_1$, $y/(x-3)=\tan\theta_2$．) θ_1,θ_2 は多価関数であるが，$d\theta_1,d\theta_2$ は M 上の閉 1 次形式を定める．明示的に書くと

$$d\theta_1=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2},\quad d\theta_2=\frac{(x-3)dy-ydx}{(x-3)^2+y^2}$$

ここで

$$\int_M\omega_i\wedge d\theta_i=\int_M e(r_i)dr_i\wedge d\theta_i=2\pi$$

である．また $i\neq j$ のとき，$\operatorname{Supp}\omega_i$ 上で θ_j は 1 価関数にとれるから Stokes の定理より

$$\int_M\omega_i\wedge d\theta_j=-\int_M d(\omega_i\wedge\theta_j)=0$$

ここで $\omega_i\wedge\theta_j$ はコンパクト台の 1 形式を定めることを使っている．以上より

$$\int_M\omega_i\wedge d\theta_j=2\pi\delta_{ij}$$

一方で

$$\int_L\omega_1=1,\quad\int_L\omega_2=-1$$

であるから

$$\int_M\omega_i\wedge\frac{1}{2\pi}(d\theta_1-d\theta_2)=\int_L\omega_i$$

が従う．$[\omega_1], [\omega_2]$ は $H^1_c(M)$ の基底であることから，L の Poincaré 双対は $\frac{1}{2\pi}(d\theta_1 - d\theta_2)$ で代表されることが分かる．

(別解) : L のポアンカレ双対は，L の管状近傍の Thom 類によって与えられる．L の管状近傍として

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 3/2)^2 + y^2 < (3/2)^2\}$$

をとることにする．T の自明化は例えば

$$T \cong L \times (-1,1), \quad (x,y) \mapsto (x, y/\epsilon(x)), \qquad \epsilon(x) := \sqrt{(3/2)^2 - (x-3/2)^2}$$

で与えられる．$\rho(y) \in C^\infty_c((-1,1))$ をコンパクト台の C^∞ 級関数で $\int_{-1}^1 \rho(y)dy = 1$ なるものとする．このとき T の Thom 形式が

$$\Theta = f^*(\rho(y)dy)$$

で与えられる．ただし $f\colon T \to (-1,1)$ を $f(x,y) = y/\epsilon(x)$ とした．Θ の台は M 内で閉集合であるから，Θ は M 上の閉 1 形式に拡張され，L の Poincaré 双対を与える．

問題 3 各セルの特性写像 $\Phi_i\colon D^i \to \mathbb{RP}^3$ を

$$\begin{aligned}
\Phi_1(y) &= \left[y, \sqrt{1-y^2}, 0, 0\right] \\
\Phi_2(y_1,y_2) &= \left[y_1, y_2, \sqrt{1-y_1^2-y_2^2}, 0\right] \\
\Phi_3(y_1,y_2,y_3) &= \left[y_1, y_2, y_3, \sqrt{1-y_1^2-y_2^2-y_3^2}\right]
\end{aligned}$$

で与え，これによって各セルを向き付ける．このとき接着写像 $\varphi_i = \Phi_i|_{\partial D^i}\colon \partial D^i \to \mathbb{RP}^{i-1} \subset \mathbb{RP}^3$ は

$$\begin{aligned}
\varphi_1(y) &= [1,0,0,0] \\
\varphi_2(y_1,y_2) &= [y_1,y_2,0,0] \\
\varphi_3(y_1,y_2,y_3) &= [y_1,y_2,y_3,0]
\end{aligned}$$

なる表示を持つ．胞体チェイン複体 C_* の境界作用素 d を計算しよう．1 セル e^1 の境界は同じ 0 セルにくっつくので，$d_1\colon C_1 \to C_0$ はゼロ写像，つまり

$$d_1 e^1 = 0.$$

$i \geq 2$ に対して，胞体チェイン複体の境界作用素 $d_i\colon C_i \to C_{i-1}$ に現れる結合係数 $[e^i, e^{i-1}]$ は次の写像の写像度で与えられた．

$$f_i\colon \partial D^i \xrightarrow{\varphi_i} \mathbb{RP}^{i-1} \to \mathbb{RP}^{i-1}/\mathbb{RP}^{i-2} \xleftarrow[\cong]{\Phi_{i-1}} D^{i-1}/\partial D^{i-1}$$

$f_2\colon \partial D^2 \to D^1/\partial D^1$ は同じ向きに 2 回巻き付く写像である．実際，座標で書くと $(y_1, y_2) \in \partial D^2 = S^1$ に対して

$$f_2(y_1, y_2) = \begin{cases} y_1 & y_2 \geq 0 \\ -y_1 & y_2 \leq 0 \end{cases}$$

である．(y_1, y_2) が上半円に沿って左回りに 180 度回るとき，$y_1 = f_2(y_1, y_2)$ は単調に 1 から -1 まで動く．さらに下半円にそって左回りに 180 度回るとき $-y_1 = f_2(y_1, y_2)$ は単調に 1 から -1 まで動く．$\{1, -1\} = \partial D^1 \subset D^1$ は 1 点につぶされているので，1 と -1 は同じ点を表すことに注意したい．従って $\deg f_1 = -2$ であり

$$d_2 e^2 = -2e^1$$

最後に f_3 を考える．同様に考えて

$$f_3(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} (y_1, y_2) & y_3 \geq 0 \\ (-y_1, -y_2) & y_3 \leq 0 \end{cases}$$

$\{y_3 = 0\} \subset \partial D^3$ は f_3 によって 1 点につぶされている．$(0, 0) \in D^2/\partial D^2$ の逆像は 2 点 $(0, 0, \pm 1)$ からなり，この 2 点の近傍で f_3 は C^∞ 級である．さらにこの 2 点で f_3 の微分は同型である．$(0, 0, 1)$ で f_3 は向きを保ち，$(0, 0, -1)$ で f_3 は向きを逆にすることを示そう．∂D^3 には D^3 の境界としての向きが入っている．$y_3 > 0$ において $\frac{\partial}{\partial y_3}$ は D^3 の外向き法線ベクトルであるから，y_1, y_2 はこの領域で正の座標系をなす．($\because$ $\langle \frac{\partial}{\partial y_3}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2} \rangle$ は正の基底であるから．) また $y_3 < 0$ において $\frac{\partial}{\partial y_3}$ は D^3 の内向き法線ベクトルであるから，y_1, y_2 はこの領域で負の座標系をなす．座標 (y_1, y_2) に関するヤコビ行列 $D_{(0,0,\pm 1)} f_3$ の行列式は共に 1 なので，f_3 は $(0, 0, 1)$ で向きを保ち，f_3 は $(0, 0, -1)$ で向きを逆にすることが分かる．従って $\deg f_3 = 1 - 1 = 0$ であり，

$$d_3 e^3 = 0$$

がわかる．以上より胞体チェイン複体は

$$C_0 = \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{-2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z}$$

で与えられ，実射影空間 $\mathbb{RP}^3$ の整数係数ホモロジーは

$$H_p(\mathbb{RP}^3) = \begin{cases} \mathbb{Z} & p = 0, 3 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & p = 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

で与えられる．

お詫びと訂正 この問題と関連する演習問題 70 の解答にはいくつかミスがありました．ここにお詫びし訂正します．間違いは，特性写像 Φ の表示で $1 - |y|^2$ に根号が抜けていたこと，向きの計算が (全体の符号分) ずれていたこと，の 2 点です．上の解答ではそれらが訂正されています．境界に誘導される向きは，外向き法線ベクトルを最初におくことで決まりますが，間違って外向き法線ベクトルを最後においていました．符号は全体としてずれるだけなのでホモロジーの計算には影響しません．これらの点の間違いについては減点しません．