幾何学II　期末試験　2020年2月5日

10:30 – 12:30

注意：持ち込み不可．机の上においてよいのは筆記用具と時計のみ．机の中は空にすること．携帯電話の電源は切って鞄に入れ，鞄の口は閉じること．試験開始1時間以内の退出は認めない．

問題 1 (1) [5点] $(C^*, d), (D^*, d), (E^*, d)$ をコチェイン複体とする．授業で説明したようにコチェイン複体の短完全列 $0 \to C^* \xrightarrow{f} D^* \xrightarrow{g} E^* \to 0$ からコホモロジーの長完全列 $\to H^p(C^*) \to H^p(D^*) \to H^p(E^*) \to H^{p+1}(C^*) \to \cdots$ が得られる．長完全列における連結準同型 $d^* \colon H^p(E^*) \to H^{p+1}(C^*)$ を定義せよ．(well-defined であることの証明は不要．)

(2) [5点] コチェイン複体 $(C^*, d), (D^*, d)$ の間の2つのチェイン写像 $f, g \colon C^* \to D^*$ がチェインホモトピックであることの定義を与えよ．

(3) [10点] de Rham コホモロジーにおける Thom 同型定理の主張を述べよ．証明は不要．

(4) [10点] 特異ホモロジーにおける切除同型 (excision isomorphism) とは何かを説明せよ．ただし，説明の中で「切除対」という言葉（あるいはそれに相当する概念）を用いた場合は，切除対であるための十分条件を一つ与えること．証明は不要．

問題 2 $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0), (3,0)\}$ とおく．以下では M には $\mathbb{R}^2$ の標準的な向きから誘導される向きを入れておく．

(1) [10点] M の1次の de Rham コホモロジー $H^1(M)$ は2次元であることを示せ．

(2) [20点] M の向き付けられた1次元閉部分多様体 R_1, R_2 であって，その Poincaré 双対が $H^1(M)$ の基底になるものを与えよ．ただし R_i の Poincaré 双対 $[\tau_i] \in H^1(M)$ とは，任意のコンパクト台の閉1次微分形式 ω に対して

$$\int_{R_i} \omega = \int_M \omega \wedge \tau_i$$

が成立するもののことである．

(3) [10点] M の閉部分多様体 $L = \{(x, 0) : 0 < x < 3\}$ の Poincaré 双対を代表する閉1次微分形式を明示的に与えよ．ただし L は x 軸の正方向に向き付ける．

問題 3 [30点] $\mathbb{RP}^3$ の胞体分割を次のように与える．

$$\begin{aligned}
e^0 &= \{[1,0,0,0]\} \\
e^1 &= \{[x,1,0,0] : x \in \mathbb{R}\} \\
e^2 &= \{[x,y,1,0] : x, y \in \mathbb{R}\} \\
e^3 &= \{[x,y,z,1] : x, y, z \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

この胞体分割に付随する胞体チェイン複体 C_* の境界作用素 $d_p \colon C_p \to C_{p-1}$ を決定し，それにより $\mathbb{RP}^3$ の整数係数のホモロジー群を求めよ．