2018 年度過去問

幾何学 II　期末試験解答例　2019 年 1 月 30 日

問題 1　(1) Mayer-Vietoris 完全列は次で与えられる．

$$
\begin{array}{l}
\to H^k(M) \to H^k(U) \oplus H^k(V) \to H^k(U\cap V) \to H^{k+1}(M) \to \\
\qquad \omega \longmapsto (i_U^*\omega, i_V^*\omega) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad (\alpha,\beta) \longmapsto -j_U^*\alpha + j_V^*\beta \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad [\tau] \longmapsto [d\rho_U \wedge \tau]
\end{array}
$$

ここで $i_U\colon U \to M$, $i_V\colon V \to M$, $j_U\colon U\cap V \to U$, $j_V\colon U\cap V \to V$ は包含写像で，$\{\rho_U, \rho_V\}$ は $\{U,V\}$ に付随する 1 の分割 (すなわち $\operatorname{Supp}\rho_U \subset U$, $\operatorname{Supp}\rho_V \subset V$, $\rho_U \geq 0$, $\rho_V \geq 0$, $\rho_U + \rho_V = 1$ を満たす C^∞ 級関数．)
次に Mayer-Vietoris 完全列の証明の概略を述べる．まず次の de Rham 複体の短完全列があることを示す．

$$0 \to \Omega^*(M) \xrightarrow{f} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{g} \Omega^*(U\cap V) \to 0$$

ここで写像は $f(\omega) = (i_U^*\omega, i_V^*\omega)$, $g(\alpha,\beta) = -j_U^*\alpha + j_V^*\beta$．$f$ が単射で，$\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$ が成り立つことは明らかである．g が全射であることは $\tau \in \Omega^*(U\cap V)$ に対して微分形式 $(-\rho_V\tau, \rho_U\tau) \in \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V)$ を考えればわかる．ここで $\rho_V\tau$ は U 上の滑らかな微分形式に伸びる．実際，

$$\alpha = \begin{cases} \rho_V\tau & U\cap V \text{ 上で} \\ 0 & U \setminus \operatorname{Supp}(\rho_V) \text{ 上で} \end{cases}$$

と定義すれば (共通部分で一致しているので)α は U 上の滑らかな微分形式になっていることが分かる．同様に $\rho_U\tau$ は V 上の滑らかな微分形式に伸びる．従って g は全射である．コチェイン複体の短完全列からコホモロジーの長完全列が導かれ，
Mayer-Vietoris 完全列が得られる．
最後に連結準同型が $[\tau] \mapsto [d\rho_U \wedge \tau]$ で与えられることを見よう．連結準同型による $[\tau]$ の像は $g(\alpha,\beta) = \tau$ を満たす (α,β) をとり，$(d\alpha, d\beta) = f(\omega)$ を満たす ω のクラスとして与えられる．$-d(\rho_V\tau) = -d\rho_V \wedge \tau = d\rho_U \wedge \tau = d(\rho_U\tau)$ より，

$$
\begin{tikzcd}
d\rho_U \wedge \tau \arrow[r, mapsto, "f"] & (-d(\rho_V\tau), d(\rho_U\tau)) & \\
 & (-\rho_V\tau, \rho_U\tau) \arrow[u, mapsto, "d"] \arrow[r, mapsto, "g"] & \tau
\end{tikzcd}
$$

なる対応があることが分かる．従って $[\tau]$ の連結準同型による像は $[d\rho_U \wedge \tau]$ である．
採点基準：Mayer-Vietoris の形を正しく与え，de Rham 複体の短完全列から導出していれば 5 点．そのうえで，(1) 写像 f の明示式，(2) 写像 g の明示式, (3) 連結準同

型の明示式，(4) 写像 g の全射性と連結準同型の導出，の 4 つのポイントを押さえていれば満点．連結準同型の構成は de Rham 複体のレベルで議論しなければならないが，間違ってコホモロジーのレベルで議論している人が見られた．($\rho_U\omega$ などは ω が閉形式でも閉形式にならない．)

(2) 良い開被覆の個数に関する帰納法で示す．M が一つの良い開被覆を持つとき，M は可縮であるから $H^*(M) \cong \mathbb{R}$ であり，特に有限次元である．p 個の良い開被覆を持つ場合について主張が示されたと仮定し，$p+1$ 個の良い開被覆を持つ場合について示す．M の良い開被覆を $M = U_0 \cup U_1 \cup \cdots \cup U_p$ とする．このとき $U = U_0$, $V = U_1 \cup \cdots \cup U_p$ とおくと U は一つの良い開被覆を持ち，V は p 個の良い開被覆を持ち，$U \cap V$ は

$$U \cap V = (U_0 \cap U_1) \cup \cdots \cup (U_0 \cap U_p)$$

ゆえ p 個からなる良い開被覆を持つ．従って帰納法の仮定から $U, V, U \cap V$ の de Rham コホモロジーは有限次元である．Mayer-Vietoris 完全系列より

$$\cdots \to H^{k-1}(U \cap V) \to H^k(M) \to H^k(U) \oplus H^k(V) \to \cdots$$

なる完全列があるが，k について直和をとると

$$H^*(U \cap V) \xrightarrow{f} H^*(M) \xrightarrow{g} H^*(U) \oplus H^*(V)$$

なる完全列を得る．これから

$$0 \to \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g) \to H^*(M) \to \mathrm{Im}(g) \to 0$$

は完全列となるが，$\mathrm{Im}(f), \mathrm{Im}(g)$ はともに有限次元ゆえ $H^*(M)$ は有限次元となる．
採点基準：方針はほとんどの人が分かっていた．減点方式で採点．以下の各点について 3 点ずつ減点．(1) good cover が 1 つのときの理由を書いていない．(2) $U \cap V$ に対して帰納法の仮定を使っていない．(3) Mayer-Vietoris 完全列の使い方に誤りがある．(4) 最後の有限次元性の議論が足りない．(短完全列まで落として議論していない．)

(3) X を位相空間，A, B を X の部分集合とする．A, B が切除対ならば (すなわち包含写像 $S_*(A) + S_*(B) \subset S_*(A \cup B)$ がチェインホモトピー同値ならば)，包含写像 $i\colon (A, A \cap B) \to (A \cup B, B)$ は相対ホモロジーの同型

$$i_*\colon H_k(A, A \cap B) \cong H_k(A \cup B, B)$$

を導く．これが切除同型である．
$\{A, B\}$ が切除対となる十分条件としては，$\mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B) = A \cup B$ となること，が挙げられる．ただし $\mathrm{Int}(A)$ は A の $A \cup B$ における内点の集合，$\mathrm{Int}(B)$ は B の $A \cup B$ における内点の集合を表す．
他の十分条件としては，X が CW 複体で A, B がその部分複体であること，など．
採点基準：切除同型の命題を正しく与えて 5 点，切除対に対する (意味のある) 十分条件を与えて 5 点．(もちろん,「切除対」という言葉を使わず $A \cup B = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$ などの仮定をおいて正しい命題を述べた場合でも満点．)

問題 2　(解 1) $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の次の n 次微分形式を考える

$$\omega = x_1 dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{n+1}$$

ここで $d\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n+1}$ であるから，S^n が $n+1$ 次元球体 D^{n+1} の境界であることと Stokes の定理を用いて，

$$\int_{S^n} \omega = \int_{\partial D^{n+1}} \omega = \int_{D^{n+1}} d\omega = \int_{D^{n+1}} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n+1} > 0$$

を得る．ただし S^n には D^{n+1} の境界としての向きが入っているものとした．従って ω は $H^n(S^n)$ の生成元である．写像 f の写像度は $f^*[\omega] = d[\omega]$ を満たす数 d として与えられるが，

$$f^*\omega = (-1)^{n+1}\omega$$

ゆえ写像度は $(-1)^{n+1}$ である．
(解 2) f は S^n からそれ自身への微分同相写像である．従って，
$p = (1, 0, \ldots, 0) \in S^n$ をとるとき，f の写像度は $d_p f \colon T_p S^n \to T_{-p} S^n$ が向きを保つとき 1，保たないとき -1 で与えられる．S^n には D^{n+1} の境界としての向きを入れておくことにする．$T_p S^n$ の (向きに関する) 正の基底は $(e_2, e_3, \ldots, e_{n+1})$ で与えられる．ただし e_i は $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準基底を表している．実際，点 p における外向き法ベクトルは e_1 で与えられ，$(e_1, e_2, \ldots, e_{n+1})$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の正の基底となるからである．次に $-p = (-1, 0, \ldots, 0)$ での接空間 $T_{-p} S^n$ の正の基底は $(-e_2, e_3, \ldots, e_{n+1})$ で与えられる．実際 $-p$ での外向き法ベクトルは $-e_1$ で与えられ，$(-e_1, -e_2, e_3, \ldots, e_{n+1})$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の正の基底をなしているからである．これらの基底に関して $d_p f$ を行列表示すると，$d_p f(e_i) = -e_i$ より，

$$d_p f \sim \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

となり，この行列式は $(-1)^{n-1}$ である．このことから $\deg(f) = (-1)^{n-1}$ が従う．
採点基準：向きを保つかどうか調べる方針の場合，理由を付けて接空間の正の基底を与えて 10 点，さらに正しい正の基底の組が与えらえているとき，f の微分とその符号を正しく計算できて 10 点．接空間の基底 (あるいは座標) を与えているが，それが向きと整合的になる理由を説明していない解答が多かった．
微分形式を使う方針の場合，$H^n(S^n)$ の生成元になっていない，あるいは生成元かどうか判定ができない場合は 0 点．

問題 3　まず M の 1 次と 2 次の de Rham コホモロジーを求める．$\mathbb{R}^3$ を M および次の開集合 U で覆う．

$$U = \{(x, y, z) : (x-3)^2 + y^2 < 1\} \sqcup \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < 2\}$$

ここで U は互いに交わらない可縮な開集合の和であるから，2 点とホモトピー同値．また $U \cap M$ は $S^1 \sqcup S^2$ とホモトピー同値である．開被覆 $\mathbb{R}^3 = M \cup U$ に対して Mayer-Vietoris 完全列を適用することにより，

$$\begin{aligned}
0 \to H^0(\mathbb{R}^3) \to H^0(U) \oplus H^0(M) &\to H^0(U \cap M) \\
\to \underset{=0}{H^1(\mathbb{R}^3)} \to \underset{=0}{H^1(U)} \oplus H^1(M) &\to \underset{\cong\mathbb{R}}{H^1(U \cap M)} \\
\to \underset{=0}{H^2(\mathbb{R}^3)} \to \underset{=0}{H^2(U)} \oplus H^2(M) &\to \underset{\cong\mathbb{R}}{H^2(U \cap M)} \\
\to \underset{=0}{H^3(\mathbb{R}^3)} \to \underset{=0}{H^3(U)} \oplus H^3(M) &\to \underset{=0}{H^3(U \cap M)} \to 0
\end{aligned}$$

以上より $H^1(M) \to H^1(U \cap M) \cong \mathbb{R}$ は同型，$H^2(M) \to H^2(U \cap M) \cong \mathbb{R}$ も同型である．

(1) $U \cap M$ は次の二つの連結成分 V_1, V_2 からなる．

$$V_1 = \{(x, y, z) : 0 < (x-3)^2 + y^2 < 1\}, \quad V_2 = \{(x, y, z) : 0 < x^2 + y^2 + z^2 < 2\}$$

V_1 は S^1 とホモトピー同値，V_2 は $S \cong S^2$ とホモトピー同値である．実際，S は V_2 の変位レトラクトであり，包含写像 $i \colon S \hookrightarrow V_2$ はホモトピー同値である．同型 $H^2(U \cap M) \cong \mathbb{R}$ は次のように得られる．

$$H^2(U \cap M) \xrightarrow{j_2^*} H^2(V_2) \xrightarrow{i^*} H^2(S) \xrightarrow{\int} \mathbb{R}.$$

ここで $j_2 \colon V_2 \to U \cap M$ は包含写像．同型写像 $H^2(M) \to H^2(U \cap M)$ と合成することにより，$H^2(M) \to \mathbb{R}$, $[\omega] \mapsto \int_S \omega$ は同型写像であることが従う．
採点基準：$H^2(M) \cong \mathbb{R}$ が正しく示されていれば 5 点．さらに $\int \colon H^2(S) \to \mathbb{R}$ が同型であること等を言及し，これと Mayer-Vietoris から導かれる同型と合成して結論を導いていれば満点．上にあげた解答例の他にも，$\mathbb{R}^3$ を $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ と $\mathbb{R}^3 \setminus \{(3,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$ で覆う解答，M を $\{x > 1\}$ と $\{x < 2\}$ で覆う解答などが見られた．$\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ を M と $\{(x,y,z) : (x-3)^2 + y^2 < 1\}$ で覆う方法も多かったが，この場合は連結準同型を丁寧に議論する必要がある．

(2) M は $\mathbb{R}^3$ の開集合より向き付け可能である．Poincaré 双対性から $H_c^2(M) \cong (H^1(M))^* \cong \mathbb{R}$ であり，$H^1(M)$ も $H_c^2(M)$ も共に 1 次元である．従って，$H_c^2(M)$ の生成元を与えるコンパクト台の閉微分形式 α に対して

$$\int_N \alpha \neq 0$$

を満たす閉部分多様体 N を与えれば十分である．またこのような閉微分形式 $\alpha \in \Omega_c^2(M)$ が存在すれば，α は $H_c^2(M)$ の生成元であることも分かる．実際，もし $\alpha = d\beta$，$\beta \in \Omega_c^1(M)$ であれば Stokes の定理から

$$\int_N \alpha = \int_N d\beta = \int_{\partial N} \beta = 0$$

となって矛盾である．
そこで M の閉部分多様体 N を

$$N = \{(3, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y > 0, z \in \mathbb{R}\}$$

と定め，α を $\int_{\mathbb{R}^2} f(y,z)dydz = 1$ を満たし，$\mathrm{Supp}(f) \subset \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1\}$ となる C^∞ 級関数 f を用いて

$$\alpha = \pi^*(f(y,z)dy \wedge dz)$$

とおく．ただし，$\pi\colon V_1 \to \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1\}$ は
$\pi(x,y,z) = (\sqrt{(x-3)^2 + y^2}, z)$ で与えられる写像．π は固有写像ゆえ，α は V_1 上のコンパクト台の 2 次閉微分形式である．V_1 の外で 0 で拡張することにより M 上のコンパクト台の微分形式とみなせる．$(3,y,z) \in N \cap V_1$ に対して $\pi(3,y,z) = (y,z)$ であることから，

$$\int_N \alpha = \int_{\mathbb{R}^2} f(y,z)dydz = 1$$

以上より N が与えられ，それが求める性質を持つことが示された．
採点基準：$H^1(M) \cong \mathbb{R}$ が正しく導かれていれば 10 点．そのうえで，N が正しく与えらえていれば 5 点．さらに $\eta_N \neq 0$ である理由が述べられていれば 5 点とした．
N として境界付きのものを挙げている人が多かったが，境界付き部分多様体の (コホモロジー類としての)Poincaré 双対は定義できない．(コンパクト台の exact form を積分して 0 になるとは限らないから．) また N として S や
$\{(x,y,z) : (x-3)^2 + y^2 = 1\}$ を挙げている人も多かったが，これらは M の境界付き閉部分多様体の境界になっているので，Stokes の定理からその Poincaré 双対は 0 になり，不適．

問題 4　X の胞体分割 $X = e^0 \cup e^1 \cup e^2$ を次のように与える．0 セル e^0 を ∂M の像，1 セル e^1 を $\{0\} \times (-1,1)$ の像，2 セル e^2 を $(0,1) \times (-1,1)$ の像とする．ただし 1 セルの接着写像 ϕ_1 は $D^1 \cong \{0\} \times [-1,1]$ からの自然な射影，2 セルの接着写像 ϕ_2 は $D^2 \cong [0,1] \times [-1,1]$ からの自然な射影である．このとき胞体複体の境界作用素は

$$\partial e^0 = 0, \quad \partial e^1 = 0, \quad \partial e^2 = 2e^1$$

で与えられる．X^k で X の k 切片 (0 セルから k セルまでの和) を表すとき，境界作用素は相対ホモロジーの連結準同型 $H_1(X^1, X^0) \to H_0(X^0)$,
$H_2(X^2, X^1) \to H_1(X^1, X^0)$ と同一視されていた．1 セル e^1 は特異単体
$\Delta^1 \cong \{0\} \times [-1,1] \xrightarrow{\phi_1} X$ によって代表される $H_1(X^1, X^0)$ のホモロジー類を表すから，その境界は 0 である．つまり $\partial e^1 = 0$．次に $\partial e^2 = 2e^1$ を示す．この場合の結合係数は写像

$$\partial D^2 \cong \partial([0,1] \times [-1,1]) \xrightarrow{\phi_2|_{\partial D^2}} X^1 = \{0\} \times [-1,1]/\sim$$

の写像度によって与えられるが，この写像を具体的に書くと $[0,1] \times \{-1,1\}$ 上では 1 点 e^0 への定値写像であって $\{0\} \times [-1,1]$ 上では

$$(0,x) \mapsto x,$$

$\{1\} \times [-1,1]$ 上では
$$(1,x) \mapsto -x$$
となる．各々の写像は向きを保っているから，写像度は 2 である．以上より
$\partial e^2 = 2e^1$ が示された．
従ってホモロジー群は

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}, \quad H_1(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad H_k(X) = 0 \ (k \neq 0,1)$$

となる．
(別解) ∂M は，∂M の M における開近傍 $([0,1] \times ([-1,-\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2},1]))/\sim$ の強変位レトラクトになっているので，

$$\widetilde{H}_*(X) = \widetilde{H}_*(M/\partial M) \cong H_*(M, \partial M)$$

である．そこで相対ホモロジー $H_*(M,\partial M)$ を求める．相対ホモロジーの長完全列

$$\to \widetilde{H}_k(\partial M) \to \widetilde{H}_k(M) \to H_k(M,\partial M) \to \widetilde{H}_{k-1}(\partial M) \to$$

より $k \neq 1,2$ で $H_k(M,\partial M) \cong 0$ が分かる．次数 1,2 では完全列

$$0 = \widetilde{H}_2(M) \to H_2(M,\partial M) \to \underset{\cong\mathbb{Z}}{\widetilde{H}_1(\partial M)} \to \underset{\cong\mathbb{Z}}{\widetilde{H}_1(M)} \to H_1(M,\partial M) \to \widetilde{H}_0(\partial M) = 0$$

を得る．あとは写像 $\widetilde{H}_1(\partial M) \to \widetilde{H}_1(M)$ を求めればよい．射影
$M \to S^1 \cong [0,1]/0 \sim 1$ はホモトピー同値であり，これと $\partial M \to M$ を合成することにより，写像 $S^1 \cong \partial M \to S^1$ を得る．この写像は同じ向きに 2 回巻き付く写像であるから，その写像度は 2 であり，$\widetilde{H}_1(\partial M) \to \widetilde{H}_1(M)$ は 2 倍写像．以上より
$H_1(M,\partial M) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $H_2(M,\partial M) \cong 0$．したがって

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \widetilde{H}_0(X) \cong \mathbb{Z}, \quad H_1(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad H_k(X) = 0 \ (k \neq 0,1)$$

を得る．
採点基準：$(M,\partial M)$ の相対ホモロジー完全列，あるいは完全列
$\to \widetilde{H}_*(\partial M) \to \widetilde{H}_*(M) \to \widetilde{H}_*(M/\partial M) \to \widetilde{H}_{*-1}(\partial M) \to$ が正しくかけていれば 10 点．さらに境界写像が 2 倍写像になることが分かっていれば 5 点，結果まで正しければ満点．
ホモロジー長完全列の連結準同型において次数は下がる．逆向きに書いている人が多かった (−5 点)．それ以外の写像の向きについても，反対にしている人がいた．
胞体分割を使う方法の場合，胞体分割が正しく与えらえていれば 10 点．