2018 年度過去問

幾何学 II　期末試験　2019 年 1 月 30 日

10:30 – 13:00

注意：持ち込み不可．机の上には筆記用具・時計以外のものを置かないでください．机の中には何も入れないでください．携帯電話の電源は切りかばんに入れ，かばんの口は閉じて床においてください．試験開始後 1 時間以内の退出は認めません．

問題 1 (1)[10 点] 多様体 M の 2 つの開集合 U, V による開被覆 $M = U \cup V$ を考える．この開被覆に付随する de Rham コホモロジーの Mayer-Vietoris 完全列とは何か説明し，その証明の概略を述べよ．Mayer-Vietoris 完全列に現れる全ての写像を明示的に与え，連結準同型がどのように得られるかを説明すること．ただしコチェイン複体の短完全列からコホモロジーの長完全列が得られることは証明しなくてよい．
(2)[10 点] 多様体 M が有限個の良い開被覆 (finite good open cover) を持つとき，de Rham コホモロジー $H^*(M) = \bigoplus_{k=0}^{\dim M} H^k(M)$ は有限次元になることを証明せよ．
(3)[10 点] 特異ホモロジーにおける切除同型 (excision isomorphism) とは何か説明せよ．ただし，説明の中で「切除対」という言葉（あるいはそれに相当する概念）を用いた場合は，切除対であるための十分条件を一つ与えること．(この問 (3) について証明は不要である．)

問題 2 [20 点] $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ を n 次元球面とする．写像 $f\colon S^n \to S^n$ を $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = (-x_1, \dots, -x_{n+1})$ で定めるとき，f の写像度を求めよ．(検算として，答えが $n = 1$ のときに正しいかどうかチェックしておこう[1]．)

問題 3 $M = \mathbb{R}^3 \setminus (\{(3, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, 0, 0)\})$ とおく．$H^*(M)$ を M の de Rham コホモロジーとする．
(1) [10 点] $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ とおく．写像
$H^2(M) \to \mathbb{R}, [\omega] \mapsto \int_S \omega$ は同型であることを示せ．
(2) [20 点] M の (向き付けられた)2 次元閉部分多様体 N であって，その Poincaré 双対 $[\eta_N]$ が $H^1(M)$ の基底となるものを与え，またそのことを示せ．ただし Poincaré 双対 $[\eta_N]$ は全てのコンパクト台の閉 2 次形式 $\alpha \in \Omega_c^2(M)$ に対して

$$\int_N \alpha = \int_M \alpha \wedge \eta_N$$

が成立するものとして特徴づけられる．

問題 4 [20 点] 閉じたメビウスの帯 M は $[0, 1] \times [-1, 1]$ を $(0, x) \sim (1, -x)$ の生成する同値関係で割って得られる位相空間である．M の境界 $\partial M = [0, 1] \times \{-1, 1\}/\sim$ を 1 点につぶして得られる位相空間 $X = M/\partial M$ について，整数係数のホモロジー群 $H_*(X; \mathbb{Z})$ を求めよ．

---

[1]ただし，この検算は採点対象ではありません．