幾何学 II　演習問題解答 No.9　 2019 年 12 月 11 日

問題 39　Bott-Tu の Lemma 6.12 を参照.

問題 40　Bott-Tu の Proposition 6.14.1 を参照.

問題 41　局所座標をとって示す．$(U; x_1, \dots, x_m)$ を M の座標近傍で $E|_U \cong U \times \mathbb{R}^r$ を (E の向きに関して) 正の局所自明化とする．$U \times \mathbb{R}^r$ の座標を $(x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_r)$ とおく．また $f^{-1}(U) \subset M$ に含まれる座標近傍 $(V; y_1, \dots, y_n)$ をとっておく．写像 f を V 上で

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto (x_1(y_1, \dots, y_n), \dots, x_m(y_1, \dots, y_n))$$

の形に表示する．与えられた等式を V 上で示そう．$E|_U$ 上で

$$\omega = \sum_{I,J} c_{I,J}(x,t) dx_I \wedge dt_J$$

と座標表示する[1]．このとき定義により

$$\pi_* \omega = \sum_I dx_I \int_{\mathbb{R}^r} c_{I,\{1,\dots,r\}}(x,t) dt_1 \cdots dt_r$$

一方 $E|_U$ の自明化は $f^{-1}E|_V$ の自明化 $f^{-1}E|_V \cong V \times \mathbb{R}^r$ を誘導する．$V \times \mathbb{R}^r$ 上の座標 $(y_1, \dots, y_n, t_1, \dots, t_r)$ によって写像 $\tilde{f}\colon f^{-1}E|_V \to E|_U$ は

$$(y_1, \dots, y_n, t_1, \dots, t_r) \mapsto (x_1(y_1, \dots, y_n), \dots, x_m(y_1, \dots, y_n), t_1, \dots, t_r)$$

の形に表示される．したがって

$$\tilde{f}^* \omega = \sum_{I,J} c_{I,J}(x(y), t) dx(y)_I \wedge dt_J = \sum_{H,I,J} c_{I,J}(x(y), t) g_{H,I}(y) dy_H \wedge dt_J$$

ただし $f^* dx_I = dx(y)_I = \sum_H g_{H,I}(y) dy_H$ とおいた．従って

$$\begin{aligned}
\pi'_* \tilde{f}^* \omega &= \sum_{H,I} dy_H \int_{\mathbb{R}^r} c_{I,\{1,\dots,r\}}(x(y), t) g_{H,I}(y) dt_1 \cdots dt_r \\
&= \sum_I (f^* dx_I) \int_{\mathbb{R}^r} c_{I,\{1,\dots,r\}}(x(y), t) dt_1 \cdots dt_r \\
&= f^* \pi_* \omega.
\end{aligned}$$

問題 42　(1) $M = \bigcup U_\alpha$ を正の向きの座標近傍 $(U_\alpha; x_1, \dots, x_m)$ による M の開被覆とする．必要なら細分をとり，$E|_{U_\alpha}$ は (正の向きの) 自明化 $E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ を持つとしてよい．$\{\rho_\alpha\}$ を $\{U_\alpha\}$ に従属する 1 の分割とする．積分の定義から

$$\int_E \omega = \sum_\alpha \int_{E|_{U_\alpha}} (\pi^* \rho_\alpha) \omega = \sum_\alpha \int_{U_\alpha \times \mathbb{R}^n} \rho_\alpha(x) \sum_{I,J} c^\alpha_{I,J}(x,t) dx_I dt_J$$

[1] いつものように，I, J は multi-index を表し，$I = \{i_1 < \cdots < i_k\}$ に対して $dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ などとしている．

ただし $E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ の座標を $(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_r)$ とし，ω の局所表示を

$$\omega = \sum_{I,J} c^\alpha_{I,J}(x,t) dx_I \wedge dt_J$$

とした．Fubini の定理より，

$$\begin{aligned}
\int_E \omega &= \sum_\alpha \sum_I \int_{U_\alpha} dx_I \rho_\alpha(x) \left(\int_{\mathbb{R}^r} c^\alpha_{I,\{1,\ldots,r\}}(x,t) dt_1 \cdots dt_r \right) \\
&= \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha(x) \cdot \pi_* \omega \\
&= \int_M \pi_* \omega.
\end{aligned}$$

(2) は (1) を $\pi^*\tau \wedge \omega \in \Omega^*_c(E)$ に適用し，projection formula を使って得られる．つまり

$$\int_E \pi^*\tau \wedge \omega = \int_M \pi_*(\pi^*\tau \wedge \omega) = \int_M \tau \wedge \pi_* \omega.$$

問題 43 $s_0 \colon M \to E$ をゼロ切断とする．$s_0 \circ \pi$ は id_E とホモトピックである．実際 $H(e,t) = (1-t)s_0(\pi(e)) + te$ がホモトピー $H \colon E \times [0,1] \to E$ を与える．ベクトル束に対するホモトピー性質により

$$V \cong (s_0 \circ \pi)^{-1} V = \pi^{-1}(s_0^{-1} V)$$

すなわち $F = s_0^{-1} V$ に対して主張が成立することが分かる．

問題 44 仮定から任意の点 $x \in M$ に対して $\int_{E_x} \Theta \neq 0$ である．各点 $x \in M$ に対してファイバー E_x の向きを $\int_{E_x} \Theta > 0$ となるように定める．このとき E_x の向きが x について局所的に一定 (連続的に変化する) であることを示せばよい．

このことは明らかかもしれないが，一応丁寧に示しておく．局所自明化 $E|_U \cong U \times \mathbb{R}^r$ をとる．この局所自明化の誘導する写像 $\varphi_x \colon E_x \cong \mathbb{R}^r$ がある点 $x = x_0 \in U$ で向きを保つならば，その点の近傍でも向きを保つことを示せばよい．$\pi \colon E|_U \cong U \times \mathbb{R}^r \to U$ を射影とする．($\mathbb{R}^r$ の向きに関する) ファイバーに沿った積分 π_* を考えると，$\pi_*\Theta$ は U 上の閉 0-form であるから，局所定数関数[2]である (Θ は閉形式で，d と π_* は可換であることを思い出そう)．従って $\pi_*\Theta$ は x_0 を含む連結成分上で正の定数関数となる．よって同型 φ_x は $x = x_0$ の近傍で向きを保つ．

[2]そこまで言わなくても $\pi_*\Theta$ が連続関数であることに注意すれば十分である．