幾何学II　演習問題解答 No.8　 2019年12月4日

問題 33　$s_0\colon M \to E$ をゼロ切断とする．(つまり，$s_0(x) = 0 \in E_x \subset E$．) p と s_0 が互いにホモトピー逆写像であることを示そう．$p \circ s_0 = 1_M$ であるので，$s_0 \circ p$ と 1_E の間のホモトピーを作ればよい．

$$h\colon E \times [0,1] \to E, \qquad h(v,t) = t \cdot v$$

とおく．ここで $t \cdot v$ は $v \in E_{p(v)}$ のスカラー倍を表す．この写像は (局所自明化を使って容易にわかるように) C^∞ 級であり，$h(v,0) = (s_0 \circ p)(v)$, $h(v,1) = 1_E$ を満たす．

問題 34　メビウスの帯を $M = S^1 \times \mathbb{R}/(z,v) \sim (-z,-v)$ と考える．ただし S^1 を絶対値 1 の複素数全体の集合と同一視した．このとき写像

$$i\colon M \to \mathbb{RP}^2, \quad i([z,v]) = [\Re(z), \Im(z), v]$$

の像は無限遠の開近傍 $U = \{[x,y,z] \in \mathbb{RP}^2 : (x,y) \neq (0,0)\}$ であり，i は M と U の間の微分同相写像を与える．(詳細は略．2 つの chart で覆って示す．)

$\mathbb{RP}^2$ の無限遠の補集合は $\mathbb{R}^2 = \{[x,y,1]\}$ と同一視できる．Mayer-Vietoris 完全列を開被覆 $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{R}^2 \cup U$ に対して適用すると，

$$\begin{aligned}
0 &\to H^0(\mathbb{RP}^2) \to H^0(\mathbb{R}^2) \oplus H^0(U) \to H^0(U \cap \mathbb{R}^2) \\
&\to H^1(\mathbb{RP}^2) \to H^1(\mathbb{R}^2) \oplus H^1(U) \to H^1(U \cap \mathbb{R}^2) \\
&\to H^2(\mathbb{RP}^2) \to H^2(\mathbb{R}^2) \oplus H^2(U) \to H^2(U \cap \mathbb{R}^2) \to 0
\end{aligned}$$

ここで，U はメビウスの帯と同相であったから，S^1 とホモトピー同値である．また $U \cap \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \cong S^1 \times \mathbb{R}$ である．特に $U \cap \mathbb{R}^2$ は連結で $H^0(\mathbb{R}^2) \oplus H^0(U) \to H^0(U \cap \mathbb{R}^2)$ は全射となる．従って (Poincaré の補題等を使うと) 完全列

$$0 \to H^1(\mathbb{RP}^2) \to 0 \oplus \mathbb{R} \cong H^1(U) \xrightarrow{\iota^*} \mathbb{R} \cong H^1(U \cap \mathbb{R}^2) \to H^2(\mathbb{RP}^2) \to 0 \oplus 0$$

を得る．ただし，$\iota\colon U \cap \mathbb{R}^2 \hookrightarrow U$ は包含写像．写像 $\iota^*\colon H^1(U) \to H^1(U \cap \mathbb{R}^2)$ を求めよう．$p\colon U \cong M \to S^1$ を射影 (M を S^1 上の直線束と思ったときの射影)，$j\colon S^1 \to U \cap \mathbb{R}^2$ を埋め込みとする．このとき $p^*\colon H^1(S^1) \to H^1(U)$, $j^*\colon H^1(U \cap \mathbb{R}^2) \to H^1(S^1)$ は同型である．(p, j は各々ホモトピー同値写像であるから．) これらの写像の合成

$$H^1(S^1) \overset{p^*}{\cong} H^*(U) \xrightarrow{\iota^*} H^*(U \cap \mathbb{R}^2) \overset{j^*}{\cong} H^*(S^1)$$

は $p \circ \iota \circ j\colon S^1 \to S^1$ によって誘導される．この写像を具体的に計算すると，

$$p \circ \iota \circ j(z) = p([\Re(z), \Im(z), 1]) = z^2$$

であり，この写像は $H^1(S^1)$ の間の同型 (2 倍写像) を誘導する．以上より

$$H^q(\mathbb{RP}^2) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & q = 0 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

問題 35　(1) $\phi_\alpha\colon E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ を自明化とする．$\phi_\alpha(x)\colon E_x \cong \mathbb{R}^n$ を ϕ_α の E_x への制限とする．変換関数は

$$g_{\alpha\beta}(x) = \phi_\alpha(x) \circ \phi_\beta(x)^{-1}$$

で与えられていた．$\phi_\alpha(x)$ の双対写像は同型 ${}^t\phi_\alpha(x)\colon (\mathbb{R}^n)^* \cong E_x^*$ を誘導し，これにより E^* が自明化される．対応する自明化は ${}^t\phi_\alpha(x)^{-1}\colon E_x^* \to (\mathbb{R}^n)^*$ で与えられ，従ってこの自明化に対応する変換関数は

$${}^t\phi_\alpha(x)^{-1} \circ {}^t\phi_\beta(x)^{-1} = {}^t(\phi_\alpha(x) \circ \phi_\beta(x))^{-1} = {}^tg_{\alpha\beta}(x)^{-1}$$

となる．

注意　E^* を変換関数 $\{{}^tg_{\alpha\beta}^{-1}\}$ によって定まるベクトル束と定義してもよい．

(2) $\theta\colon V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W)$ を次の双線形写像 f からテンソル積の普遍性によって誘導されるものとする．

$$f\colon V^* \times W \to \mathrm{Hom}(V, W), \quad f(\varphi, w)(v) = \varphi(v)w$$

$$\begin{tikzcd}
V^* \times W \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(V, W) \\
V^* \otimes W \arrow[ur, dashed, "\theta"'] &
\end{tikzcd}$$

このとき θ が同型になることは容易にわかる．(例えば基底を基底に移すことを示せばよい．)

問題 36　実でも複素でも証明は同じなので，L を複素直線束とする．自明束との同型写像は次で与えられる．

$$\phi\colon M \times \mathbb{C} \cong L, \quad (x, v) \mapsto vs(x)$$

これが全単射であり，またファイバーの間の線形同型を誘導していることは明らかである．L の局所自明化をとって ϕ が (微分) 同相写像であることを示す．U を座標近傍，$L|_U \cong U \times \mathbb{C}$ を自明化とし，$s(x)$ がこの自明化の下で $s(x) = (x, f(x))$ と表示されているとする．上の写像 ϕ を U に制限したものの座標表示は

$$(x, v) \mapsto (x, f(x)v)$$

となるが，これは微分同相写像である．実際，逆写像は $(x, w) \mapsto (x, w/f(x))$ であたえられており明らかに C^∞ 級である．($f(x)$ は U 上消えない関数であるから．)

注意　授業ではより一般に，ベクトル束 $E \to M$ の枠 $\{s_1, \ldots, s_n\}$ を与えることと，$E \to M$ の自明化を与えることとが同値であることを主張した．証明は，局所自明化により切断 s_i を $\mathbb{R}^n$ 値の滑らかな関数 $\vec{s}_i(x)$ と同一視して，n 次正方行列 $(\vec{s}_1(x), \ldots, \vec{s}_n(x))$ の**逆行列**が x の滑らかな (行列値の) 関数になることを使う．

問題 37　Möbius の帯は $[0,1]\times\mathbb{R}/(0,v)\sim(1,-v)$ で与えられた．もし自明束と同型であれば，至る所消えない切断が存在する．Möbius の帯の切断 s は $f(0)=-f(1)$ を満たす連続関数 $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ を用いて $s(x)=[x,f(x)]$ の形にかける．s が至る所消えなければ f も至る所 0 ではないが，$f(0)=-f(1)$ と中間値の定理から $f(c)=0$ を満たす $c\in[0,1]$ が存在し，矛盾．

問題 38　T^n の座標 $(\theta_1,\dots,\theta_n)\mapsto(e^{i\theta_1},\dots,e^{i\theta_n})$ を考える．このとき座標ベクトル場 $\frac{\partial}{\partial\theta_1},\dots,\frac{\partial}{\partial\theta_n}$ は接ベクトル束の大域的な枠 (frame) を定め，従って TT^n は自明である．すなわち，接ベクトル束 TT^n の自明化は

$$T^n\times\mathbb{R}^n\cong TT^n,\quad (x,(v_1,\dots,v_n))\mapsto\sum_{i=1}^n v_i\left(\frac{\partial}{\partial\theta_i}\right)_x$$

で与えられる．