幾何学 II　演習問題解答 No.7　2019 年 11 月 27 日

問題 27　$H^2(S^2) \cong \mathbb{R}$ であり，この生成元は $\int_{S^2}\sigma = 1$ を満たす 2 形式 σ によって与えられていたことを思い出そう．

$f^{-1}(p) = \{q\}$ とする．p は正則値であるから，df_q は同型．従って逆関数定理より q のある開近傍 U が存在して $V = f(U)$ は q の開近傍で，$f|_U \colon U \to V$ は微分同相写像である．このとき $S^2 \setminus U$ はコンパクトゆえ，$f(S^2 \setminus U)$ はコンパクト集合．仮定から $f(S^2 \setminus U)$ は p を含まない閉集合である．p の近傍に台を持つ 2-form σ であって

$$\operatorname{Supp}\sigma \subset V \setminus f(S^2 \setminus U), \qquad \int_M \sigma = 1$$

なるものをとることができる．(点 p の周りの座標近傍をとり，そこで隆起形式 (bump form) を作るとよい．) σ の取り方から $f^*\sigma$ は U に台を持つ 2-form であって

$$\int_M f^*\sigma = \int_U f^*\sigma = \pm \int_V \sigma = \pm 1.$$

ここで最後の符号は f が点 q で向きを保つときに正，そうでないとき負となる．いずれにせよ $f^*\colon H^2(S^2) \to H^2(S^2)$ は生成元を生成元に移し，同型写像である．

問題 28　(1) 生成元であることを示すには，S^2 上で積分して 0 でないことを示せばよい．S^2 に D^3 の境界としての向きを入れると，Stokes の定理より

$$\int_{S^2} \omega = \int_{\partial D^3} \omega = \int_{D^3} d\omega = \int_{D^3} 3dx \wedge dy \wedge dz = 4\pi \neq 0.$$

(2) ドラームコホモロジーを用いた定義では，写像度は

$$\int_{S^2} f^*\omega = \deg(f) \int_{S^2} \omega$$

を満たす数として定まる．一方 $f^*\omega = -\omega$ であるから，$\deg f = -1$ となる．

次に正則値の逆像を用いた定義を調べる．任意の値が正則値であるが，例えば $(1,0,0)$ をとる．$f^{-1}(1,0,0) = \{(-1,0,0)\}$ であり，写像

$$d_{(-1,0,0)}f \colon T_{(-1,0,0)}S^2 \to T_{(1,0,0)}S^2$$

が向きを保つかどうかが問題となる．S^2 に D^3 の境界としての向きを入れるとき，点 $(-1,0,0)$ での外向き法ベクトルは $(-1,0,0)$ であるから，$T_{(-1,0,0)}S^2$ の正の基底は $\{(0,-1,0),(0,0,1)\}$ である．一方，点 $(1,0,0)$ での外向き法ベクトルは $(1,0,0)$ であるから $T_{(1,0,0)}S^2$ の正の基底は $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ である．これらの基底に関する $d_{(-1,0,0)}f$ の行列表示は ($d_{(-1,0,0)}f$ が (-1) 倍の写像であることに注意して)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である．この行列式は負であるから，f はこの点で向きを保たない．従って $\deg(f) = -1$．

問題 29 $S^1 \times S^1$ の座標を $(\theta_1, \theta_2) \mapsto (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})$ で定める．このとき $d\theta_1$, $d\theta_2$ は各々，第一成分または第二成分の S^1 の 1 次のコホモロジーの基底である．Künneth の定理から，$H^*(S^1 \times S^1)$ の基底は次で与えられる．

$$1, d\theta_1, d\theta_2, d\theta_1 \wedge d\theta_2$$

写像 f_A を座標表示すると，次のようになる．

$$(\theta_1, \theta_2) \mapsto (n\theta_1 + m\theta_2, l\theta_1 + k\theta_2)$$

従って，

$$\begin{aligned} f_A^*(d\theta_1) &= nd\theta_1 + md\theta_2 \\ f_A^*(d\theta_2) &= ld\theta_1 + kd\theta_2 \end{aligned}$$

さらにこれから，

$$f_A^*(d\theta_1 \wedge d\theta_2) = f_A^*(d\theta_1) \wedge f_A^*(d\theta_2) = (nk - ml)d\theta_1 \wedge d\theta_2$$

を得る．従って f_A^* の行列表示は (上の基底に関して)

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & n & l & \\ & m & k & \\ & & & nk - ml \end{pmatrix}$$

となる．(空白成分はすべて 0)．

問題 30 (1) $\pi\colon S^2 \to \mathbb{RP}^2$ を商写像とする．π は局所的には微分同相であるから，$\pi^*\colon \Omega^p(\mathbb{RP}^2) \to \Omega^p(S^2)$ は単射である．この像 $\operatorname{Im}\pi^*$ が

$$M^p = \{\alpha \in \Omega^p(S^2) : f^*\alpha = \alpha\}$$

であることを示す．$\operatorname{Im}\pi^* \subset M^p$ であることは，$\pi \circ f = \pi$ ゆえ，$f^*\pi^*\alpha = (\pi \circ f)^*\alpha = \pi^*\alpha$ であることから従う．逆に $\alpha \in M^p$ とする．局所的には $\pi\colon S^2 \to \mathbb{RP}^2$ の切断 s が存在する．すなわち，任意の $x \in \mathbb{RP}^2$ に対して x の開近傍 U と滑らかな写像 $s_U\colon U \to S^2$ であって $\pi \circ s_U = \mathrm{id}_U$ なるものが存在する．そこで $\mathbb{RP}^2$ 上の微分形式 β を x の近傍において

$$\beta|_U = s_U^*\alpha$$

と定義したい．このような開近傍が 2 つあったとき，例えばそれを U, V として，$\beta|_U$ と $\beta|_V$ が $U \cap V$ で一致することを確かめよう．$U \cap V$ の連結成分ごとに $s_U = f \circ s_V$ または $s_U = s_V$ のいずれかが成り立つ．$f^*\alpha = \alpha$ より，いずれの場合も $s_U^*\alpha = s_V^*\alpha$ であることが分かる．従ってこの定義は well-defined である．さて，$\pi^{-1}(U)$ 上で，

$$\pi^*\beta = \pi^* s_U^*\alpha = (s_U \circ \pi)^*\alpha = \alpha$$

が成立する．従って $\pi^*\beta = \alpha$．つまり $M^p \subset \operatorname{Im}\pi^*$.

(2) 単射準同型 $\pi^*\colon \Omega^p(\mathbb{RP}^2) \to \Omega^p(S^2)$ の分裂 (splitting) を「$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用に関する平均」を使って次のように定める．

$$A\colon \Omega^p(S^2) \to \Omega^p(\mathbb{RP}^2), \quad A(\alpha) = (\pi^*)^{-1}\left(\frac{1}{2}(\alpha + f^*\alpha)\right)$$

ここで $\frac{1}{2}(\alpha + f^*\alpha) \in M^p$ ゆえ，(1) から π^* の像に入ることを使っている．このとき

$$(A \circ \pi^*)\alpha = (\pi^*)^{-1}\frac{1}{2}(\pi^*\alpha + f^*\pi^*\alpha) = \alpha$$

より A は確かに分裂を与えている．さらに A は d と可換であり，コチェイン複体の分解

$$\Omega^*(\mathbb{RP}^2) \oplus \operatorname{Ker} A \cong \Omega^p(S^2), \quad (\alpha, \beta) \mapsto \pi^*\alpha + \beta$$

が得られる．コホモロジーをとると

$$H^p(\mathbb{RP}^2) \oplus H^p(\operatorname{Ker} A) \cong H^p(S^2), \quad (\alpha, \beta) \mapsto \pi^*\alpha + \beta$$

ここで $\alpha \in H^p(\mathbb{RP}^2)$ に対して $f^*\pi^*\alpha = \pi^*\alpha$，$\beta \in H^p(\operatorname{Ker} A)$ に対して $f^*\beta = -\beta$. 従って f^* 不変部分をとると，同型

$$H^p(\mathbb{RP}^2) \cong \{x \in H^p(S^2) : f^*x = x\}, \quad \alpha \mapsto \pi^*\alpha$$

が得られる．

(3) $H^0(S^2) \cong \mathbb{R}$ の生成元 1 は明らかに f^* で不変．よって $H^0(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{R}$．一方 $H^2(S^2) \cong \mathbb{R}$ の生成元 ω は問題 28 より $f^*\omega = -\omega$ を満たす．従って $H^2(\mathbb{RP}^2) = 0$. $H^1(S^2) = 0$ より $H^1(\mathbb{RP}^2) = 0$.

問題 31　$f^*\colon H^*(S^2 \times S^2) \to H^*(S^4)$ を考える．$H^2(S^2)$ の生成元を σ とし，$\pi_i\colon S^2 \times S^2 \to S^2$ を i 番目の成分への射影とする．また $\sigma_i := \pi_i^*\sigma$ とおく．Künneth の定理より $H^2(S^2 \times S^2) = \mathbb{R}\sigma_1 \oplus \mathbb{R}\sigma_2$，$H^4(S^2 \times S^2) = \mathbb{R}\sigma_1 \wedge \sigma_2$．$H^2(S^4) = 0$ より $f^*\sigma_1 = f^*\sigma_2 = 0$．$f^*$ は環準同型なので $f^*(\sigma_1 \wedge \sigma_2) = f^*\sigma_1 \wedge f^*\sigma_2 = 0$．従って $f^*\colon H^4(S^2 \times S^2) \to H^4(S^4)$ はゼロ写像であり，$\deg f = 0$.

問題 32　σ を S^1 上の 1-form で $H^1(S^1)$ の生成元を与えるもの，$e = e(t)dt$ を $\mathbb{R}$ 上のコンパクト台の 1 形式で $H^1_c(\mathbb{R})$ の生成元を与えるものとする．このとき，Poincaré の補題から $H^1_c(S^1 \times \mathbb{R}) = \mathbb{R}[e]$, $H^2_c(S^1 \times \mathbb{R}) = \mathbb{R}[e \wedge \sigma]$ である．写像 $f^*\colon H^*_c(S^1 \times \mathbb{R}) \to H^*_c(\mathbb{R}^2)$ を考える．$H^1_c(\mathbb{R}^2) = 0$ より $f^*[e] = 0$．したがって $f^*e = dg$ を満たす $\mathbb{R}^2$ 上のコンパクト台の関数 g が存在する．$f^*[e \wedge \sigma] = [f^*e \wedge f^*\sigma] = [dg \wedge f^*\sigma] = [d(g \cdot f^*\sigma)]$ であり，$g \cdot f^*\sigma$ はコンパクト台の 1 形式であるから，これはコホモロジー類としてゼロである．

補足 ここではコホモロジー類を代表する微分形式をとって議論した．σ は $S^1 \times \mathbb{R}$ 上に引き戻した微分形式としてはコンパクト台ではないので，$f^*[\sigma]$ は $H^1_c(\mathbb{R}^2)$ ではなく $H^1(\mathbb{R}^2)$ の元となる．コホモロジーのレベルで議論するには，自然な積

$$\wedge\colon H^p_c(M) \times H^q(M) \to H^{p+q}_c(M), \quad [\alpha] \wedge [\beta] := [\alpha \wedge \beta]$$

が well-defined であることを観察し，この積について $f^*[e \wedge \sigma] = f^*[e] \wedge f^*[\sigma]$ が成り立つことに注意すればよい．($f^*[e]$, $f^*[\sigma]$ はどちらもゼロなので $f^*[e \wedge \sigma]$ もゼロ).