幾何学II　演習問題解答 No.6　 2019年11月20日

問題24　(1) (No.4, 問題19の解答も参照のこと) P_1, P_2 を中心とする半径1の開円板 B_1, B_2 をとる．$\mathbb{R}^2 = M \cup (B_1 \cup B_2)$ である．また $M \cap (B_1 \cup B_2) = B_1^\times \cup B_2^\times$, ただし $B_1^\times = B_1 \setminus \{P_1\}$, $B_2^\times = B_2 \setminus \{P_2\}$．$\mathbb{R}^2$ の開被覆 $\{M, B_1 \cup B_2\}$ に対して Mayer-Vietoris 完全列を適用すると

$$\begin{aligned}
0 \longrightarrow H^0(\mathbb{R}^2) &\longrightarrow H^0(M) \oplus H^0(B_1 \cup B_2) \longrightarrow H^0(B_1^\times \cup B_2^\times) \longrightarrow \\
\longrightarrow H^1(\mathbb{R}^2) &\longrightarrow H^1(M) \oplus H^1(B_1 \cup B_2) \longrightarrow H^1(B_1^\times \cup B_2^\times) \longrightarrow \\
\longrightarrow H^2(\mathbb{R}^2) &\longrightarrow H^2(M) \oplus H^2(B_1 \cup B_2) \longrightarrow H^2(B_1^\times \cup B_2^\times) \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

M は連結なので $H^0(M) \cong \mathbb{R}$．また $B_i^\times$ は S^1 とホモトピー同値なので $H^1(B_i^\times) \cong \mathbb{R}$, $H^2(B_i^\times) \cong 0$．Poincaré の補題から $q = 1, 2$ に対し $H^q(\mathbb{R}^2) \cong H^q(B_1 \cup B_2) \cong 0$．従って Mayer-Vietoris 完全列から $H^1(M) \to H^1(B_1^\times \cup B_2^\times) \cong \mathbb{R}^2$ は同型，また $H^2(M) \cong 0$ である．

コンパクト台のコホモロジーについての Mayer-Vietoris 完全列は

$$\begin{aligned}
0 \longrightarrow H_c^0(B_1^\times \cup B_2^\times) &\longrightarrow H_c^0(M) \oplus H_c^0(B_1 \cup B_2) \longrightarrow H_c^0(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \\
\longrightarrow H_c^1(B_1^\times \cup B_2^\times) &\longrightarrow H_c^1(M) \oplus H_c^1(B_1 \cup B_2) \longrightarrow H_c^1(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \\
\longrightarrow H_c^2(B_1^\times \cup B_2^\times) &\longrightarrow H_c^2(M) \oplus H_c^2(B_1 \cup B_2) \longrightarrow H_c^2(\mathbb{R}^2) \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

である．$B_i^\times \cong S^1 \times \mathbb{R}$ ゆえ Poincaré の補題より $H_c^1(B_i^\times) \cong H_c^2(B_i^\times) \cong \mathbb{R}$, $H_c^0(B_i^\times) = 0$．また同様に $H_c^2(\mathbb{R}^2) \cong H_c^2(B_i) \cong \mathbb{R}$, $q \neq 2$ に対して $H_c^q(\mathbb{R}^2) \cong H_c^q(B_i) \cong 0$．従ってこの完全列は

$$\begin{aligned}
0 \longrightarrow 0 &\longrightarrow H_c^0(M) \oplus 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \\
\longrightarrow H_c^1(B_1^\times \cup B_2^\times) &\longrightarrow H_c^1(M) \oplus 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \\
\longrightarrow H_c^2(B_1^\times \cup B_2^\times) &\longrightarrow H_c^2(M) \oplus H_c^2(B_1 \cup B_2) \longrightarrow H_c^2(\mathbb{R}^2) \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

このことから $H_c^0(M) \cong 0$, $\mathbb{R}^2 \cong H_c^1(B_1^\times \cup B_2^\times) \to H_c^1(M)$ は同型，$H_c^2(M) \cong \mathbb{R}$ が分かる．($H_c^2(M)$ については最後の行の写像を詳しく見てもいいし，また短完全列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ において $\dim B = \dim A + \dim C$ であることを用いてもよい．)

(2) (1) での計算より $H_c^1(B_1^\times \cup B_2^\times) \to H_c^1(M)$ は同型．従って $H_c^1(M)$ の基底は $H_c^1(B_i^\times) \cong \mathbb{R}$ の基底の (包含写像 $B_i^\times \to M$ に関する) 押し出しとして得られる．Poincaré の補題での同型写像 $H^0(S^1) \xrightarrow{e_*} H_c^1(S^1 \times \mathbb{R}) \cong H_c^1(B_i^\times)$ の作り方から，$H_c^1(B_i^\times)$ の生成元として $\omega_i = e(r_i)dr_i$ の形のものが取れる．ただし r_i は P_i からの距離を与える関数で，$e(r)$ は $(0,1)$ 上のコンパクト台の C^∞ 関数であって $\int_0^1 e(r)dr = 1$ を満たすもの．

一方 $H^1(M) \to H^1(B_1^\times \cup B_2^\times)$ も同型であることから，$\tau_i = d\theta_i$ が $H^1(M)$ の基底をなすことが分かる．ただし (r_i, θ_i) は P_i を中心とする極座標を表す．(θ_i は1価な

座標ではないが，$d\theta_i$ は P_i 以外の点で well-defined であり，$H^1(B_i^\times)$ の生成元となる．具体的には $d\theta_1 = \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，$d\theta_2 = \frac{(x-3)dy-ydx}{(x-3)^2+y^2}$．）

ここで $i \neq j$ ならば θ_i は ω_j の台の上で 1 価関数にとることができるので，Stokes の定理により

$$\int_M \tau_i \wedge \omega_j = \int_M d(\theta_i \wedge \omega_j) = 0.$$

ここで $\theta_i \wedge \omega_j$ がコンパクト台の 1-form であることを使った．一方，$i = j$ ならば B_i の極座標で計算して

$$\int_M \tau_i \wedge \omega_i = \int_{(r_i,\theta_i)\in(0,1)\times[0,2\pi]} d\theta_i \wedge e(r_i)dr_i = -2\pi$$

ただし M には標準的な向きを入れている．

別解：より一般に $\rho(\theta)$ を周期 2π のなめらかな周期関数で $\int_0^{2\pi} \rho(\theta)d\theta = 1$ を満たすものとして $\tau_i = \rho(\theta_i)d\theta_i$ と取ってもよい．このときは ρ の台をうまくとると $i \neq j$ のとき $\operatorname{Supp}\tau_i \cap \operatorname{Supp}\omega_j = \emptyset$ ゆえ $\tau_i \wedge \omega_j = 0$ となって明らかに積分はゼロ．

(3) S_i を P_i を中心とする半径 $1/2$ の円，$R_i = P_i + \mathbb{R}_{>0}(0,1)$ (P_i から y 軸の正の向きに向かう半直線) とする．$\omega_i = e(r_i)dr_i$ は上と同じものとし，$\tau_i = -\frac{1}{2\pi}d\theta_i$ と定義しなおすことにする．このとき (2) の計算から

$$\int_M \tau_i \wedge \omega_j = \delta_{i,j}.$$

次が成り立つことを証明したい．

$$\int_{S_i} \tau = \int_M \tau \wedge \omega_i \qquad \forall\tau \in H^1(M)$$
$$\int_{R_i} \omega = \int_M \tau_i \wedge \omega \qquad \forall\omega \in H_c^1(M)$$

これは τ または ω が基底のときにチェックすればよく，

$$\int_{S_i} \tau_j = \delta_{i,j} \qquad \int_{R_i} \omega_j = \delta_{i,j}$$

であることから従う．(S_i には左回りの向き，R_i には上向きの向きをいれておく．また $i \neq j$ のとき $\int_{S_i} \tau_j = 0$ となることの証明には θ_j が S_i 上で一価であることに注意して Stokes の定理を使うとよい．)

注意：τ_i の代表元として，上記別解にある通り $-\rho(\theta_i)d\theta_i$ の形のものをとると，R_i の十分小さい近傍に台を持つものが作れる．また $\omega_i = e(r_i)dr_i$ の代表元として S_i の十分小さい近傍に台を持つものがとれる．つまり τ_i, ω_i の台は各々 R_i, S_i を「近似」することができる．

(4) $\tau = \tau_1 - \tau_2 = \frac{1}{2\pi}(d\theta_2 - d\theta_1)$ が題意を満たすことを示そう．境界付き多様体 $N \subset M$ を

$$N = \{(x,y) \in M : y \geq 0, 0 \leq x \leq 3\}$$

とおく．$\partial N = R_2 \cup R_1 \cup P_1P_2$ である．Stokes の定理から任意の M 上のコンパクト台 closed 1-form ω に対して

$$\int_{\partial N} \omega = \int_N d\omega = 0$$

であるが，左辺は

$$\int_{R_2} \omega - \int_{R_1} \omega + \int_{P_1P_2} \omega = \int_M \tau_2 \wedge \omega - \int_M \tau_1 \wedge \omega + \int_{P_1P_2} \omega$$

に等しい．従って

$$\int_{P_1P_2} \omega = \int_M (\tau_1 - \tau_2) \wedge \omega = \int_M \tau \wedge \omega.$$

別解：基底に対する値 $\int_{P_1P_2} \omega_i$ を計算して τ を求めてもよい．つまり

$$\int_{P_1P_2} \omega_1 = 1, \quad \int_{P_1P_2} \omega_2 = -1$$

なので $\tau = \tau_1 - \tau_2$ ととればよいことが分かる．

問題 25　略．例えば，河田敬義「ホモロジー代数」p.16 を参照せよ．

問題 26　次を示せばよい．$\omega \in \Omega^{n-k}(M)$, $\sigma \in \Omega_c^{k+1}(M \times \mathbb{R})$ に対して，

$$\int_{M \times \mathbb{R}} \sigma \wedge \pi^* \omega = \int_M \pi_* \sigma \wedge \omega$$

これは M の局所座標 $\{x_i\}$ をとって確かめられる．実際，M の座標近傍 $(U, \{x_1, \ldots, x_n\})$ において

$$\sigma = \sum_I f_I(x,t) dx_I + \sum_J g_J(x,t) dt \wedge dx_J$$
$$\omega = \sum_I h_I(x) dx_I$$

とかくとき

$$\pi_* \sigma = \sum_I \left(\int_{-\infty}^{\infty} g_I(x,t) dt \right) dx_J$$

であるから，

$$\int_{U \times \mathbb{R}} \sigma \wedge \pi^* \omega = \sum_{I,J} \int_{U \times \mathbb{R}} g_I(x,t) h_J(x) dt \wedge dx_I \wedge dx_J$$
$$\int_U \pi_* \sigma \wedge \omega = \sum_{I,J} \int_U \left(\int_{-\infty}^{\infty} g_I(x,t) dt \right) h_J(x) dx_I \wedge dx_J$$

Fubini の定理よりこれらは等しい．(ここでは $T_{(x,t)}(M \times \mathbb{R})$ の向きを T_xM の oriented basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ を用いて，$\{\frac{\partial}{\partial t}, v_1, \ldots, v_n\}$ で入れている．向きの入れ方によっては符号だけずれる．)

一般の場合は座標近傍で M を覆い，付随する 1 の分割を使って，座標近傍上の積分に帰着する．

問題 22　解答 No.5 を参照せよ．