幾何学II　演習問題解答 No.5　2019年11月13日

問題 19　解答 No.4 を参照のこと．

問題 20　(1) 微分同相写像 $f\colon \mathbb{R}^3\setminus\{0\}\cong S^2\times\mathbb{R}$ は

$$f(x,y,z)=\left(\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right),\frac{1}{2}\log(x^2+y^2+z^2)\right)$$

またその逆写像 $g\colon S^2\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ は

$$g((x,y,z),t)=(e^tx,e^ty,e^tz)$$

で与えられる．

(2) Poincaré の補題と (1) の結果より

$$H^*(\mathbb{R}^3\setminus\{0\})\cong H^*(S^2\times\mathbb{R})\cong H^*(S^2)\cong\begin{cases}\mathbb{R} & *=0,2\\ 0 & \text{それ以外}\end{cases}$$

$$H_{\mathrm{c}}^*(\mathbb{R}^3\setminus\{0\})\cong H_{\mathrm{c}}^*(S^2\times\mathbb{R})\cong H^{*-1}(S^2)\cong\begin{cases}\mathbb{R} & *=1,3\\ 0 & \text{それ以外}\end{cases}$$

(3) Poincaré の補題で示したように，$s_0\colon S^2\to S^2\times\mathbb{R}$, $s_0(x)=(x,0)$ による引き戻しはコホモロジーの同型写像を誘導した．従って

$$H^2(\mathbb{R}^3\setminus\{0\})\xrightarrow{g^*}H^2(S^2\times\mathbb{R})\xrightarrow{s_0^*}H^2(S^2)$$

は全て同型写像．(ただし g は (1) で与えられた微分同相写像．) さらに同型 $H^2(S^2)\cong\mathbb{R}$ は積分 $\int_{S^2}$ で与えられた．これらの同型を全て合成すると，最初の同型写像 I_1

$$H^2(\mathbb{R}^3\setminus\{0\})\to\mathbb{R},\quad[\omega]\mapsto\int_{S^2}s_0^*g^*\omega=\int_{S^2}\omega$$

を得る．次に，$e=e(t)dt\in\Omega_{\mathrm{c}}^1(\mathbb{R})$ をコンパクト台の 1 形式で $\int_{\mathbb{R}}e=1$ を満たすものとするとき，ポアンカレの補題における同型 $H^*(S^2)=H_{\mathrm{c}}^*(S^2)\cong H_{\mathrm{c}}^*(S^2\times\mathbb{R})$ は $[\omega]\mapsto[e\wedge\omega]$ で与えられた．従って $H^0(S^2)$ の基底 1(定数関数) および $H^2(S^2)$ の基底 $[\sigma]$ に対して，

$$[f^*e]\in H^1(\mathbb{R}^3\setminus\{0\})\quad\text{および}\quad[f^*(e\wedge\sigma)]\in H^3(\mathbb{R}^3\setminus\{0\})$$

は $H^1(\mathbb{R}^3\setminus\{0\})$，$H^3(\mathbb{R}^3\setminus\{0\})$ のそれぞれの基底である．(ここで f^* は (1) の同型写像 $f\colon\mathbb{R}^3\setminus\{0\}\cong S^2\times\mathbb{R}$ による引き戻しである．) ここで

$$\int_R f^*e=\int_{-\infty}^{\infty}e=1$$

$$\int_{\mathbb{R}^3\setminus\{0\}}f^*(e\wedge\sigma)=\int_{S^2\times\mathbb{R}}e\wedge\sigma=\int_{S^2}\sigma\int_{-\infty}^{\infty}e=\int_{S^2}\sigma\neq0$$

であるから，2 番目と 3 番目の写像 I_2, I_3 も同型であることが分かる．

問題 21　(1) (π_* について) $f(x,t)dx_I$ の形の form と $f(x,t)dt\wedge dx_I$ の形の form に分けて議論する．

$$\begin{aligned}
d\pi_*(f(x,t)dx_I) &= 0,\\
\pi_* d(f(x,t)dx_I) &= \pi_*\left(\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dt\wedge dx_I + \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)dx_j\wedge dx_I\right)\\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dt\right)dx_I = 0
\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}
d\pi_*(f(x,t)dt\wedge dx_I) &= d\left(\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)dt\right)dx_I\right)\\
&= \sum_j\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)dt\right)dx_j\wedge dx_I\\
\pi_* d(f(x,t)dt\wedge dx_I) &= \pi_*\left(\sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)dx_j\wedge dt\wedge dx_I\right)\\
&= -\sum_j\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)dt\right)dx_j\wedge dx_I
\end{aligned}$$

以上より示された．

(e_* について)

$$de_*\omega = d(e\wedge\pi^*\omega) = -e\wedge d\pi^*\omega = -e\wedge\pi^* d\omega = -e_* d\omega.$$

(2)

$$\pi_*(e_*\omega) = \pi_*(e(t)dt\wedge\pi^*\omega) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e(t)dt\right)\omega = \omega.$$

2 番目の等号は例えば ω を局所座標表示 $\omega = \sum f_I(x)dx_I$ してみると分かる．

(3) [Bott-Tu] Chapter I, §4, Proposition 4.6 (p.38-39) 参照．ただし π_*, e_*, K の授業での定義が符号だけ Bott-Tu とは異なっているので注意すること．

問題 22　メビウスの帯 M を次の 2 つの開集合 U, V で覆う：$U = (0,1)\times\mathbb{R}$ の像，$V = ([0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1])\times\mathbb{R}$ の像．このとき $U\cong\mathbb{R}^2$, $V\cong\mathbb{R}^2$, $U\cap V = (0,\frac{1}{2})\times\mathbb{R}\sqcup(\frac{1}{2},1)\times\mathbb{R}\cong\mathbb{R}^2\sqcup\mathbb{R}^2$ である．Mayer-Vietoris 完全列

$$\begin{aligned}
0 &\to H^0(M)\to H^0(U)\oplus H^0(V)\to H^0(U\cap V)\\
&\to H^1(M)\to H^1(U)\oplus H^1(V)\to H^1(U\cap V)\\
&\to H^2(M)\to H^2(U)\oplus H^2(V)\to H^2(U\cap V)\to 0
\end{aligned}$$

は Poincaré の補題 $H^0(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{R}$, $H^*(\mathbb{R}^2) \cong 0$ $(* \neq 0)$ から，

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(M) \to \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ \to H^1(M) \to \quad 0 \quad &\to \quad 0 \\ \to H^2(M) \to \quad 0 \quad &\to \quad 0 \quad \to 0 \end{aligned}$$

となり，写像 $H^0(U) \oplus H^0(V) \to H^0(U \cap V)$ は $(a,b) \mapsto (b-a, b-a)$ で与えられる．$(H^0(U \cap V) \cong \mathbb{R}^2$ は 2 つの成分での値をとる写像であることを思い出そう)．これから $H^0(M) \cong \mathbb{R}$, $H^1(M) \cong \mathbb{R}$, $H^2(M) \cong 0$ である．(別解：M と S^1 がホモトピー同値であることから，$H^*(M) \cong H^*(S^1)$ と計算してもよい．)

　コンパクト台のコホモロジーに対する Mayer-Vietoris 完全列は

$$\begin{aligned} 0 &\to H^0_{\mathrm{c}}(U \cap V) \to H^0_{\mathrm{c}}(U) \oplus H^0_{\mathrm{c}}(V) \to H^0_{\mathrm{c}}(M) \\ &\to H^1_{\mathrm{c}}(U \cap V) \to H^1_{\mathrm{c}}(U) \oplus H^1_{\mathrm{c}}(V) \to H^1_{\mathrm{c}}(M) \\ &\to H^2_{\mathrm{c}}(U \cap V) \to H^2_{\mathrm{c}}(U) \oplus H^2_{\mathrm{c}}(V) \to H^2_{\mathrm{c}}(M) \to 0 \end{aligned}$$

である．Poincaré の補題からこれは

$$\begin{aligned} 0 \to \quad 0 \quad &\to \quad 0 \quad \to H^0_{\mathrm{c}}(M) \\ \to \quad 0 \quad &\to \quad 0 \quad \to H^1_{\mathrm{c}}(M) \\ \to \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \to H^2_{\mathrm{c}}(M) \to 0 \end{aligned}$$

の形になる．ここで最後の行の $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ は写像 $\Phi\colon H^2_{\mathrm{c}}(U \cap V) \to H^2_{\mathrm{c}}(U) \oplus H^2_{\mathrm{c}}(V)$, $\omega \mapsto (-j_{1*}\omega, j_{2*}\omega)$ である．ただし $j_1\colon U \cap V \to U$, $j_2\colon U \cap V \to V$ は包含写像で j_{1*}, j_{2*} は 0 で拡張する写像である．この写像を調べよう．$U = (0,1) \times \mathbb{R}$ の座標を (x,y) とする．滑らかな関数 f, g を次のようにとる．

$$\begin{aligned} f(x,y) &\in C^\infty_{\mathrm{c}}((0, \tfrac{1}{2}) \times \mathbb{R}) \quad \text{such that} \quad \int f(x,y)dxdy = 1 \\ g(x,y) &\in C^\infty_{\mathrm{c}}((\tfrac{1}{2}, 1) \times \mathbb{R}) \quad \text{such that} \quad \int g(x,y)dxdy = 1 \end{aligned}$$

このとき $H^2_{\mathrm{c}}(U \cap V)$ の基底は $[f(x,y)dx \wedge dy]$, $[g(x,y)dx \wedge dy]$ で与えられる．また V の座標を

$$(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \times \mathbb{R} \cong ([0, \tfrac{1}{2}) \cup (\tfrac{1}{2}, 1]) \times \mathbb{R}/\sim, \quad (z,w) \mapsto \begin{cases} (z,w) & 0 \leq z < \frac{1}{2} \\ (1+z, -w) & -\frac{1}{2} < z \leq 0 \end{cases}$$

で与えることにする．($z = 0$ で well-defined であることに注意する．) このとき

$$\begin{aligned} \Phi(f(x,y)dx \wedge dy) &= (-f(x,y)dx \wedge dy, f(z,w)dz \wedge dw) \\ \Phi(g(x,y)dx \wedge dy) &= (-g(x,y)dx \wedge dy, -g(1+z,w)dz \wedge dw) \end{aligned}$$

となる．同型 $H^2_{\mathrm{c}}(U) \cong \mathbb{R}$, $H^2_{\mathrm{c}}(V) \cong \mathbb{R}$ を各々 (x,y) 座標，(z,w) 座標に関する積分によって与えるとき，問題の写像 $\Phi\colon H^2_{\mathrm{c}}(U\cap V) \to H^2_{\mathrm{c}}(U) \oplus H^2_{\mathrm{c}}(V)$ は $[f(x,y)dx\wedge dy]$ を $(-1,1)$ に送り，$[g(x,y)dx\wedge dy]$ を $(-1,-1)$ に送る写像となる．すなわち，Φ は

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

で行列表示される同型写像で，このことから $H^p_{\mathrm{c}}(M) = 0\ (\forall p)$ が結論される．

問題 23　$\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{C}$ と同一視し，同相写像 $\mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $z \mapsto 1/z$ を用いると $X \cong \mathbb{C}\setminus\{0,1,2,3,\dots,\}$ であることが分かる．U を各非負整数 i の周りの半径 $1/3$ の開円板の合併集合とし，$V = \mathbb{C}\setminus\{0,1,2,\dots\} \cong X$ とする．開被覆 $\mathbb{C} = U\cup V$ に対して Mayer-Vietoris 完全列を用いると，

$$\begin{aligned} 0 &\to H^0(\mathbb{C}) \to H^0(U)\oplus H^0(V) \to H^0(U\cap V) \\ &\to H^1(\mathbb{C}) \to H^1(U)\oplus H^1(V) \to H^1(U\cap V) \\ &\to H^2(\mathbb{C}) \to H^2(U)\oplus H^2(V) \to H^2(U\cap V) \to 0 \end{aligned}$$

$U\cap V$ は $\coprod_{i=0}^{\infty} \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ と同相であり，したがって

$$H^*(U\cap V) \cong \begin{cases} \prod_{i=0}^{\infty}\mathbb{R} & * = 0,1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

となる．また U は $\mathbb{Z}_{\geq 0} = \{0,1,2,\dots\}$ とホモトピー同値であるから

$$H^*(U) \cong \begin{cases} \prod_{i=0}^{\infty}\mathbb{R} & * = 0 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

また X は連結なので $H^0(X) \cong \mathbb{R}$．以上から

$$H^*(X) \cong H^*(V) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & * = 0 \\ \prod_{i=0}^{\infty}\mathbb{R} & * = 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

コンパクト台の場合の Mayer-Vietoris 完全列は

$$\begin{aligned} 0 &\to H^0_{\mathrm{c}}(U\cap V) \to H^0_{\mathrm{c}}(U)\oplus H^0_{\mathrm{c}}(V) \to H^0_{\mathrm{c}}(\mathbb{C}) \\ &\to H^1_{\mathrm{c}}(U\cap V) \to H^1_{\mathrm{c}}(U)\oplus H^1_{\mathrm{c}}(V) \to H^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{C}) \\ &\to H^2_{\mathrm{c}}(U\cap V) \to H^2_{\mathrm{c}}(U)\oplus H^2_{\mathrm{c}}(V) \to H^2_{\mathrm{c}}(\mathbb{C}) \to 0 \end{aligned}$$

ここで $H^0_{\mathrm{c}}(\mathbb{C}) = H^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{C}) = 0$, $H^2_{\mathrm{c}}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{R}$,

$$H^*_{\mathrm{c}}(U) \cong \begin{cases} \bigoplus_{i=0}^{\infty}\mathbb{R} & * = 2 \\ 0 & * \neq 2 \end{cases}, \quad H^*_{\mathrm{c}}(U\cap V) \cong \begin{cases} \bigoplus_{i=0}^{\infty}\mathbb{R} & * = 1,2 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

また，$j_*\colon H^2_{\mathrm{c}}(U\cap V)\to H^2_{\mathrm{c}}(U)$ が同型であることを使うと，

$$H^*_{\mathrm{c}}(X)\cong H^*_{\mathrm{c}}(V)\cong\begin{cases}\mathbb{R} & *=2\\ \bigoplus_{i=0}^{\infty}\mathbb{R} & *=1\\ 0 & \text{それ以外}\end{cases}$$

が分かる．(次数の違い，また直和と直積が入れ替わっていることに注意．)