幾何学II　演習問題解答 No.4　 2019年10月30日

問題 16　(1) ξ の取り方によらないこと：$g(\xi') = \omega$ を満たす別の $\xi' \in D^n$ をとり，$\eta' \in C^{n+1}$ を $f(\eta') = d\xi'$ を満たす元とする．$[\eta] = [\eta']$ を示したい．$g(\xi' - \xi) = 0$ より，ある $\gamma \in C^n$ が存在して $\xi' - \xi = f(\gamma)$．このとき $d\xi' - d\xi = df(\gamma) = f(d\gamma)$．従って $f(\eta' - \eta) = f(\eta') - f(\eta) = f(d\gamma)$．$f$ は単射なので $\eta' - \eta = d\gamma$．

$[\omega]$ の代表元の取り方によらないこと：ω の代わりに $\omega + d\alpha$，$\alpha \in E^{n-1}$ をとる．$\alpha = g(\beta)$ を満たす $\beta \in D^{n-1}$ が存在する．このとき $g(\xi + d\beta) = \omega + dg(\beta) = \omega + d\alpha$ より，ξ の代わりに $\xi + d\beta$ をとればよい．$d(\xi + d\beta) = d\xi = f(\eta)$ ゆえ，同じ η が対応する．

(2) (i) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} d^*$．まず $\operatorname{Ker} f \supset \operatorname{Im} d^*$ を示そう．$[\omega] \in H^n(E)$ の像 $d^*[\omega] \in \operatorname{Im} d^*$ をとる．定義より，$g(\xi) = \omega$ なる $\xi \in D^n$ と $f(\eta) = d\xi$ なる $\eta \in C^{n+1}$ が存在して $d^*[\omega] = [\eta]$ であった．このとき $f(d^*[\omega]) = f([\eta]) = [f(\eta)] = [d\xi] = 0$．従って $d^*[\omega] \in \operatorname{Ker} f$．つぎに $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} d^*$ を示す．$[\eta] \in H^n(C)$ が $f([\eta]) = [f(\eta)] = 0$ を満たすと仮定する．このときある $\xi \in D^{n-1}$ が存在して $f(\eta) = d\xi$ である．$\omega = g(\xi)$ とおくと，$d\omega = dg(\xi) = g(d\xi) = g(f(\eta)) = 0$．したがって ω はコホモロジー類 $[\omega] \in H^{n-1}(E)$ を定め，d^* の定義から $d^*[\omega] = [\eta]$．

(ii) $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$．まず $\operatorname{Ker} g \supset \operatorname{Im} f$ を示そう．$f([x]) \in \operatorname{Im} f$ をとると，$g(f([x])) = g([f(x)]) = [g(f(x))] = 0$ である ($g \circ f = 0$ を使った)．従って $f([x]) \in \operatorname{Ker} g$．次に $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Im} f$ を示す．$[y] \in H^n(D)$ が $g([y]) = [g(y)] = 0$ を満たすとする (ただし $dy = 0$)．このとき $g(y) = dz$ を満たす $z \in E^{n-1}$ が存在する．g は全射なので $g(w) = z$ を満たす $w \in D^{n-1}$ が存在する．ここで $g(y - dw) = g(y) - g(dw) = g(y) - dg(w) = dz - dz = 0$．従って $y - dw \in \operatorname{Ker} g$ ゆえ，ある $x \in C^n$ が存在して $f(x) = y - dw$ である．さらに $f(dx) = df(x) = dy - d(dw) = 0$．$f$ は単射なので $dx = 0$，すなわち x はコホモロジー類 $[x] \in H^n(C)$ を定める．ここで $[y] = [y - dw] = [f(x)] = f([x])$．したがって $[y] \in \operatorname{Im} f$．

(iii) $\operatorname{Ker} d^* = \operatorname{Im} g$．まず $\operatorname{Ker} d^* \supset \operatorname{Im} g$ を示そう．$[y] \in H^n(D)$ の像 $g([y]) = [g(y)] \in H^n(E)$ を考える．定義から，$d^*([g(y)])$ は $dy = f(x)$ を満たす $x \in C^{n+1}$ によって代表されるコホモロジー類である．y はコホモロジー類を定めるので $dy = 0$．つまり $f(x) = 0$．f は単射なので $x = 0$．したがって $d^*(g[y]) = 0$．次に $\operatorname{Ker} d^* \subset \operatorname{Im} g$ を示す．$[\omega] \in H^n(E)$ が $d^*[\omega] = 0$ を満たすとする．$\omega = g(\xi)$ を満たす $\xi \in D^n$ および $d\xi = f(\eta)$ を満たす $\eta \in C^{n+1}$ をとると，定義より $d^*[\omega] = [\eta]$ である．従って $\eta = dx$ を満たす $x \in C^n$ が存在する．このとき $d(\xi - f(x)) = d\xi - f(dx) = f(\eta) - f(\eta) = 0$．従って $\xi - f(x)$ はコホモロジー類 $[\xi - f(x)] \in H^n(D)$ を定め，$g([\xi - f(x)]) = [g(\xi) - g(f(x))] = [g(\xi)] = [\omega]$．すなわち $[\omega] \in \operatorname{Im}(g)$．

問題 17　(1) (次元の理由から)2 次以上のコホモロジーがないことに注意すると，Mayler-Vietoris 完全列 (で意味のあるところ) は次の通りである．

$$
\begin{tikzcd}
 & H^1(S^1) \arrow[r] & H^1(U) \oplus H^1(V) \arrow[r] & H^1(U \cap V) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^0(S^1) \arrow[r] & H^0(U) \oplus H^0(V) \arrow[r] & H^0(U \cap V) \arrow[ull] &
\end{tikzcd}
$$

(2) $U \cong \mathbb{R}$, $V \cong \mathbb{R}$, $U \cap V \cong \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$ であるので，

$$H^*(U) \oplus H^*(V) \cong \begin{cases} \mathbb{R}^2 & * = 0 \\ 0 & * \neq 0 \end{cases} \qquad H^*(U \cap V) \cong \begin{cases} \mathbb{R}^2 & * = 0 \\ 0 & * \neq 0 \end{cases}$$

唯一の非自明な写像は写像 $H^0(U) \oplus H^0(V) \to H^0(U \cap V)$ であり，これは $([f],[g]) \mapsto [g-f]$ で与えられる (ただし f, g は U, V 上の定数関数)．上の同型の下でこの写像は

$$\mathbb{R}^2 \ni (a,b) \mapsto (b-a, b-a) \in \mathbb{R}^2$$

と表示できる．同型 $H^0(U \cap V) \cong \mathbb{R}^2$ は $U \cap V$ の 2 つの連結成分での値を対応させる写像であることに注意したい．

(3) Mayer-Vietoris 完全列から，

$$\begin{aligned} H^0(S^1) &\cong \mathrm{Ker}(H^0(U) \oplus H^0(V) \to H^0(U \cap V)) \cong \mathbb{R} \\ H^1(S^1) &\cong \mathrm{Cok}(H^0(U) \oplus H^0(V) \to H^0(U \cap V)) \cong \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$U \cap V$ を連結成分に $U \cap V = I_+ \sqcup I_-$，$I_+ = \{e^{i\theta} : \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2\pi}{3}\}$，$I_- = \{e^{i\theta} : -\frac{2\pi}{3} < \theta < -\frac{\pi}{3}\}$ と分解し，I_+ 上で 1，I_- 上で 0 となる $U \cap V$ 上の関数を f とおくとき，$d^*[f] \in H^1(S^1)$ が基底となる．$\{\rho_U, \rho_V\}$ を $\{U, V\}$ に付随する 1 の分割とするとき，授業で説明したように，$d^*[f] = [f d\rho_U]$ である (下図参照).

$$\begin{tikzcd} f d\rho_U \arrow[r, mapsto] & (d(-\rho_V f), d(\rho_U f)) & \\ & (-\rho_V f, \rho_U f) \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto] & f \end{tikzcd}$$

従って $H^1(S^1)$ の基底は座標 θ を使って $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2\pi}{3}$ の範囲に台を持つ 1-form $\rho_U'(\theta) d\theta$ により与えられる．S^1 に反時計回りに向きを入れるとき，

$$\int_{S^1} d^*[f] = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \rho_U'(\theta) d\theta = -1 \neq 0.$$

従って，$[\omega] \mapsto \int_{S^1} \omega$ は (基底を基底に移すので) 同型写像となる．
注意：$[\omega] \mapsto \int_{S^1} \omega$ が well-defined であることは，Stokes の定理 (今の場合は微積分の基本定理) から従うことに注意せよ．

問題 18　S^1 の座標 θ を $\theta \mapsto e^{i\theta}$ で導入する．このとき

$$\begin{aligned} \Omega^0(S^1) &= \{f(\theta) : f \in C^\infty(\mathbb{R}),\ f(\theta + 2\pi) = f(\theta)\} \\ \Omega^1(S^1) &= \{f(\theta) d\theta : f \in C^\infty(\mathbb{R}),\ f(\theta + 2\pi) = f(\theta)\} \end{aligned}$$

と書ける．de Rham 複体

$$0 \to \Omega^0(S^1) \xrightarrow{d} \Omega^1(S^1) \to 0$$

において

$$
\begin{aligned}
H^0(S^1) &= \operatorname{Ker} d = \{\,\text{定数関数}\,\} \cong \mathbb{R} \\
H^1(S^1) &= \operatorname{Cok} d = \Omega^1(S^1)/d\Omega^0(S^1)
\end{aligned}
$$

である．$H^1(S^1)$ を求めるため，次の準同型を考える

$$
I\colon \Omega^1(S^1) \to \mathbb{R}, \quad f(\theta)d\theta \mapsto \int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta
$$

I は明らかに全射である．この準同型 I の核が $d\Omega^0(S^1)$ であることを示せば，準同型定理から $H^1(S^1) \cong \mathbb{R}$ が分かる．$d\Omega^0(S^1)$ の元が I の核に含まれることは Stokes の定理 (微積分の基本定理) から明らかである．逆に $f(\theta)d\theta \in \operatorname{Ker} I$ が与えられたとき，

$$
g(\theta) = \int_0^{\theta} f(s)ds
$$

とおくと，条件 $\int_0^{2\pi} f(s)ds = 0$ から，$g(\theta)$ は周期 2π の周期函数となる．従って $g(\theta) \in \Omega^0(S^1)$ であり，明らかに $dg = fd\theta$ が成り立つ．

S^1 は $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ の変位レトラクトであった (問題 15) から，S^1 と $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ のコホモロジーは同型である．すなわち

$$
H^p(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & p = 0, 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}
$$

別の解答としては，$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ は $S^1 \times \mathbb{R}$ と微分同相であることより，ポアンカレの補題を使う，が考えられる．

問題 19　ここではヒントの方針 (a) に従った解答を与える．他の方針 (b), (c) でもできるので考えてみて下さい．

B_P を P を中心とする半径 $\frac{4}{3}\epsilon$ の開円板，B_Q を Q を中心とする半径 $\frac{4}{3}\epsilon$ の開円板とする．$\mathbb{R}^2$ を $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}$ および $V = B_P \cup B_Q$ により被覆する．この被覆に対応する Mayer-Vietoris 完全列は次のようになる．

$$
\begin{tikzcd}
 & H^2(\mathbb{R}^2) \arrow[r] & H^2(B_P \cup B_Q) \oplus H^2(U) \arrow[r] & H^2(B_P^\times \cup B_Q^\times) \arrow[r] & 0 \\
 & H^1(\mathbb{R}^2) \arrow[r] & H^1(B_P \cup B_Q) \oplus H^1(U) \arrow[r] & H^1(B_P^\times \cup B_Q^\times) \arrow[ull] & \\
0 \arrow[r] & H^0(\mathbb{R}^2) \arrow[r] & H^0(B_P \cup B_Q) \oplus H^0(U) \arrow[r] & H^0(B_P^\times \cup B_Q^\times) \arrow[ull] &
\end{tikzcd}
$$

ただし $B_P^\times = B_P \setminus \{P\}$, $B_Q^\times = B_Q \setminus \{Q\}$ とした．$H^1(\mathbb{R}^2) = H^2(\mathbb{R}^2) = H^1(B_P \cup B_Q) = 0$ より制限写像

$$
H^1(U) \to H^1(B_P^\times \cup B_Q^\times), \quad \omega \mapsto \omega|_{B_P^\times \cup B_Q^\times}
$$

は同型写像となる．一方で，$C_P \subset B_P^\times$, $C_Q \subset B_Q^\times$ は各々変位レトラクトである (問題 15 参照) から，包含写像 $C_P \cup C_Q \subset B_P^\times \cup B_Q^\times$ による引き戻しは同型写像を誘導する．

$$H^1(B_P^\times \cup B_Q^\times) \xrightarrow{\cong} H^1(C_P \cup C_Q) \cong H^1(S^1) \oplus H^1(S^1) \cong \mathbb{R}^2.$$

問題 17 で示したように，最後の同型は各 S^1 上の積分で与えられる．これらの同型を合成すると

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(U) & \longrightarrow & H^1(B_P^\times \cup B_Q^\times) & \longrightarrow & H^1(C_P \cup C_Q) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \omega & \longmapsto & \omega|_{B_P^\times \cup B_Q^\times} & \longmapsto & \omega|_{C_P \cup C_Q} & \longmapsto & \left(\int_{C_P} \omega, \int_{C_Q} \omega\right) \end{array}$$

が得られる．また $\omega = \frac{x}{x^2+y^2}dy - \frac{y}{x^2+y^2}dx$ を問題 7 における閉微分形式 (のマイナス) とし，$T_P, T_Q \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $T_P(x,y) = (x,y) - P$，$T_Q(x,y) = (x,y) - Q$ で定めるとき，1-form $T_P^*\omega, T_Q^*\omega$ は上の同型の下で $(2\pi, 0)$, $(0, 2\pi)$ に移る．したがって $\{T_P^*\omega, T_Q^*\omega\}$ は $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\})$ の基底を与える．