幾何学II　演習問題解答 No.3　 2019年10月23日

問題11　(1) M 上の別の局所座標 $\{y_i\}$ をとるとき微分形式 dx_I, dy_J の間には次の形の関係がある.

$$dx_I = \sum_J c_{I,J}(x) dy_J$$

ここで $c_{I,J}(x)$ は M 上の局所的な関数であり，t にはよらない．従って $\{y_j\}$ による局所表示で計算すると，K^p は

$$\sum_I f_I(x,t)dx_I = \sum_{I,J} f_I(x,t)c_{I,J}(x)dy_J \mapsto 0$$

$$\begin{aligned}\sum_I f_I(x,t)dt\wedge dx_I = \sum_{I,J} f_I(x,t)c_{I,J}(x)dt\wedge dy_J &\mapsto \sum_{I,J}\left(\int_0^t f_I(x,s)c_{I,J}(x)ds\right)dy_J \\ &= \sum_I\left(\int_0^t f_I(x,s)ds\right)dx_I\end{aligned}$$

で与えられる．これは同じ結果を与えている．

(2) 局所的に $\sum_I f_I(x,t)dx_I$ の形に表示される微分形式を type I の形式と呼び，$\sum_I f_I(x,t)dt\wedge dx_I$ の形に表示される微分形式を type II の形式と呼んだ．等式

$$(1-\pi^*\circ s^*)\omega = (dK+Kd)\omega$$

の両辺を type I, type II の微分形式について確かめればよい．

(type I)：局所的に $\omega = \sum_I f_I(x,t)dx_I$ と書く．このとき

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= \sum_I (f_I(x,t) - f(x,0))dx_I \\ \text{右辺} &= K\left(d\sum_I f_I(x,t)dx_I\right) \\ &= K\left(\sum_I \frac{\partial f_I}{\partial t}(x,t)dt\wedge dx_I + \sum_{I,j}\frac{\partial f_I}{\partial x_j}(x,t)dx_j\wedge dx_I\right) \\ &= \sum_I\left(\int_0^t \frac{\partial f_I}{\partial t}(x,s)ds\right)dx_I = \text{左辺}.\end{aligned}$$

(type II)：局所的に $\omega = \sum_I f_I(x,t)dt\wedge dx_I$ と書くとき，

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= \sum_I f_I(x,t)dt\wedge dx_I \\ \text{右辺} &= d\left(\sum_I\left(\int_0^t f_I(x,s)ds\right)dx_I\right) + K\left(\sum_{I,j}\frac{\partial f_I}{\partial x_j}(x,t)dx_j\wedge dt\wedge dx_I\right) \\ &= \sum_I f_I(x,t)dt\wedge dx_I + \sum_{I,j}\left(\int_0^t\frac{\partial f_I}{\partial x_j}(x,s)ds\right)dx_j\wedge dx_I - \sum_{I,j}\left(\int_0^t\frac{\partial f_I}{\partial x_j}(x,s)ds\right)dx_j\wedge dx_I \\ &= \text{左辺}\end{aligned}$$

問題 12　(1) $(\omega+d\rho)\wedge\tau = \omega\wedge\tau + d\rho\wedge\tau = \omega\wedge\tau + d(\rho\wedge\tau)$．ただし，最後のステップで τ が閉微分形式であることとライプニッツ則を使った．よって $[(\omega+d\rho)\wedge\tau] = [\omega\wedge\tau]$ であり，$[\omega]$ を代表する微分形式の取り方によらない．

同様に，$\omega\wedge(\tau+d\rho) = \omega\wedge\tau+\omega\wedge d\rho = \omega\wedge\tau+(-1)^{\deg\omega}d(\omega\wedge\rho)$ より，$[\omega\wedge(\tau+d\rho)] = [\omega\wedge\tau]$．すなわち $[\tau]$ を代表する微分形式の取り方によらない．

(2) 単位元は $\Omega^0(M)$ に属する定数関数 1 で与えられる．1 は閉微分形式であるから，コホモロジー類 $[1]$ を定め，また $[1]\wedge[\omega] = [\omega]\wedge[1] = [\omega]$ を満たす．

(3) $\varphi^*1 = 1$ より φ^* は単位元を保つ．また積を保つことは，微分形式の引き戻しに対して成り立つ式 $\varphi^*(\omega\wedge\tau) = \varphi^*\omega\wedge\varphi^*\tau$ から直ちに従う．実際，$\varphi^*([\omega]\wedge[\tau]) = \varphi^*[\omega\wedge\tau] = [\varphi^*(\omega\wedge\tau)] = [\varphi^*\omega\wedge\varphi^*\tau] = [\varphi^*\omega]\wedge[\varphi^*\tau]$.

問題 13　$s_0, s_1\colon M \to M\times\mathbb{R}$ を $s_0(x) = (x,0)$, $s_1(x) = (x,1)$ で定めておく．ホモトピーの定義から $f = H\circ s_0$, $g = H\circ s_1$ である．$\pi\circ s_1 = 1_M$ だから，

$$f = H\circ s_0 = H\circ s_0\circ\pi\circ s_1$$

と書き直せる．従って

$$\begin{aligned} f^* &= s_1^*\circ(\pi^*\circ s_0^*)\circ H^* \\ g^* &= s_1^*\circ H^* \end{aligned}$$

問題 11 から，$\pi^*\circ s_0^*$ と 1 の間のチェインホモトピーは K^p で与えられる．従って f^* と g^* の間のチェインホモトピー $L^p\colon \Omega^p(N)\to\Omega^{p-1}(M)$ は次のように定めればよさそうである．

$$L^p = s_1^*\circ K^p\circ H^*$$

実際，$\omega\in\Omega^p(N)$ に対して

$$\begin{aligned} (dL^p + L^{p+1}d)\omega &= ds_1^*K^pH^*\omega + s_1^*K^{p+1}H^*(d\omega) \\ &= s_1^*dK^pH^*\omega + s_1^*K^{p+1}dH^*\omega \\ &= s_1^*(dK^p + K^{p+1}d)H^*(\omega) \\ &= s_1^*(1-\pi^*s_0^*)H^*(\omega) \qquad (\because \text{問題 10 の式から}) \\ &= (H\circ s_1)^*\omega - (H\circ s_0\circ\pi\circ s_1)^*\omega = g^*\omega - f^*\omega. \end{aligned}$$

注意：チェインホモトピー L はホモトピー $H(x,t)$ で引き戻した微分形式をパラメータ t に関して $[0,1]$ 区間上「積分する」写像になっている．

問題 14　(1) コホモロジーは $H^0(C) = 0$, $H^1(C)\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $H^0(D)\cong\mathbb{Z}$，またそれ以外の次数では 0 である．また f がコホモロジーに誘導する写像は 0 写像である．(各次数 k に対して $H^k(C)$，$H^k(D)$ のどちらかがゼロであるため，0 写像しかない．)

(2) もし 0 写像とチェインホモトピックであったとすれば，準同型 $K^1\colon C^1\to D^0$, $K^0\colon C^0\to D^{-1}$ が存在して $1_{C^0} = K^1\circ d^0 + d^{-1}\circ K^0$ である．$D^{-1} = 0$ であるから $K^0 = 0$．従って $1_{C^0} = K^1\circ d^0$．また $C^1 = D^0 = \mathbb{Z}$ であるから K^1 はある整数 m を

掛ける写像である．d^0 は 2 倍写像であるから，$2m = 1$．これはあり得ない．従って f は 0 とチェインホモトピックではない．

注意： つまり，チェイン写像がコホモロジーに 0 写像を誘導しても，0 写像とチェインホモトピックとは限らない．上の例では

$$\{\,\text{チェイン写像}\,\}/\text{チェインホモトピー} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

となっていることも容易にチェックできる．

問題 15　レトラクション $r\colon \mathbb{C}^\times \to S^1$ は $r(z) = z/|z|$ で与えられる．$i\colon S^1 \to \mathbb{C}^\times$ を包含写像とする．$i \circ r$ と $1_{\mathbb{C}^\times}$ の間のホモトピー $H\colon \mathbb{C}^\times \times [0,1] \to \mathbb{C}^\times$ は

$$H(z,t) = tz + (1-t)\frac{z}{|z|}$$

で与えられる．($H(z,t)$ はゼロにならないことに注意する．)