幾何学II　演習問題解答 No.2　 2019年10月9日

問題 6　(1) $\omega = \sum_I f_I dx_I$ とおく.

$$d(d\omega) = d\left(\sum_{I,i} \frac{\partial f_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I\right) = \sum_{I,i,j} \frac{\partial^2 f_I}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_I$$

であるが，$\frac{\partial^2 f_I}{\partial x_i \partial x_j}$ は (i,j) の入れ替えについて対称，$dx_j \wedge dx_i$ は (i,j) の入れ替えについて反対称であるからこの和はゼロとなる.

(2) 線形性から $\omega = f(x)dx_I \in \Omega^p(\mathbb{R}^n)$, $\tau = g(x)dx_J \in \Omega^q(\mathbb{R}^n)$ の場合に確かめれば十分である.

$$\begin{aligned}
d(\omega \wedge \tau) &= \sum_i \frac{\partial (f(x)g(x))}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I \wedge dx_J = \sum_i \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} g(x) + f(x)\frac{\partial g(x)}{\partial x_i}\right) dx_i \wedge dx_I \wedge dx_J \\
&= \left(\sum_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I\right) \wedge g(x) dx_J + (-1)^p f(x) dx_I \wedge \left(\sum_i \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_J\right) \\
&= d\omega \wedge \tau + (-1)^p \omega \wedge d\tau.
\end{aligned}$$

(3) 容易なので略.

(4) 線形性から $\omega = f(x)dx_I \in \Omega^p(\mathbb{R}^n)$ の場合に確かめればよい.

$$\begin{aligned}
d(\varphi^*\omega) &= d\left(f(\varphi(y)) d\varphi_{i_1}(y) \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_p}(y)\right) = d(f\circ\varphi) \wedge d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_p} \\
&= \sum_j \frac{\partial f \circ \varphi}{\partial y_j}(y) dy_j \wedge d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_p} \\
&= \sum_{j,i} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(y)) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}(y) dy_j \wedge d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_p} \\
&= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(y)) d\varphi_i \wedge d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_p} \\
&= \varphi^*\left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}\right) = \varphi^* d\omega.
\end{aligned}$$

問題 7　(1)

$$d\alpha = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) dy \wedge dx + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right) dx \wedge dy = 0$$

(2) S^1 の座標 θ を $\theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$ で入れるとき，$\alpha|_{S^1}$ は

$$\alpha|_{S^1} = \frac{\sin\theta\, d\cos\theta - \cos\theta\, d\sin\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = -d\theta.$$

従って S^1 の向きを θ が正の座標となるように定めるとき $\int_{S^1} \alpha = \int_0^{2\pi} -d\theta = -2\pi$. もし $\alpha = df$ となる関数 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ があれば Stokes の定理 (この場合は 1 変数の微積分学の基本定理) から $\int_{S^1} \alpha = \int_{S^1} df = 0$ となり矛盾する.

(別解): $\mathbb{R}^2$ 上の 1 形式 $\beta = ydx - xdy$ を考えると，$\alpha|_{S^1} = \beta|_{S^1}$ である．従って Stokes の定理より

$$\int_{S^1} \alpha = \int_{S^1} \beta = \int_{D^2} d\beta = \int_{D^2} 2dy \wedge dx = -2\pi$$

と計算することも可能である.（この計算方法は原点 $(0,0)$ で定義されていない α には適用できないことに注意してください．）

問題 8　$\mathbb{R}^1$ の de Rham 複体は次で与えられる．

$$\cdots \to 0 \to 0 \to \Omega^0(\mathbb{R}^1) \xrightarrow{d} \Omega^1(\mathbb{R}^1) \to 0 \to 0 \to \cdots$$

従って，まず，$H^*(\mathbb{R}^1)$ は $* = 0, 1$ 以外はゼロである．

$H^0(\mathbb{R}^1)$ の計算：定義より $H^0(\mathbb{R}^1) = \mathrm{Ker}(d\colon \Omega^0(\mathbb{R}^1) \to \Omega^1(\mathbb{R}^1))$．関数 $f(x) \in \Omega^0(\mathbb{R}^1)$ に対して $df = 0 \Leftrightarrow f$ は定数関数．従って $H^0(\mathbb{R}^1) \cong \mathbb{R}$.

$H^1(\mathbb{R}^1)$ の計算：定義より $H^1(\mathbb{R}^1) = \mathrm{Cok}(d\colon \Omega^0(\mathbb{R}^1) \to \Omega^1(\mathbb{R}^1))$．$d$ が全射であることを示そう．$\alpha = g(x)dx$ を 1-form とする．$f(x) = \int_0^x g(s)ds$ とおくとき，$df = f'(x)dx = g(x)dx = \alpha$．よって d は全射．従って $H^1(\mathbb{R}^1) = 0$.

問題 9　$\varphi^* \circ d = d \circ \varphi^*$ であることから，もし $d\omega = 0$ ならば $d\varphi^*\omega = 0$ が成り立つ．つまり，φ^* は closed form を closed form に写す．さらに $\varphi^*(d\eta) = d(\varphi^*\eta)$ より，φ^* は exact form を exact form に写すことが分かる．このことから，対応 $[\omega] \mapsto [\varphi^*\omega]$ は de Rham コホモロジーの間の well-defined な写像を定めることが分かる．

問題 10　(1) 無限遠の近くの座標を $w = z^{-1} = s + it$ とおく．このとき $x + iy = (s+it)^{-1} = \frac{s}{s^2+t^2} - i\frac{t}{s^2+t^2}$ より，座標変換は $x = \frac{s}{s^2+t^2}$, $y = -\frac{t}{s^2+t^2}$．地道に計算すると

$$\tau = \frac{dx \wedge dy}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{d\left(\frac{s}{s^2+t^2}\right) \wedge d\left(\frac{-t}{s^2+t^2}\right)}{(1+(\frac{s}{s^2+t^2})^2+(\frac{-t}{s^2+t^2})^2)^2} = \frac{ds \wedge dt}{(1+s^2+t^2)^2}$$

が分かる．従って τ は無限遠点 $s = t = 0$ に C^∞ 級に拡張される．

(2)

$$\int_{\mathbb{CP}^1} \hat{\tau} = \int_{\mathbb{C}} \tau = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2} = \int_0^{2\pi}\int_0^\infty \frac{rdrd\theta}{(1+r^2)^2} = 2\pi\left[\frac{-1}{2(1+r^2)}\right]_0^\infty = \pi.$$

より $\int_{\mathbb{CP}^1} \hat{\tau} \neq 0$．もし $\hat{\tau}$ が $\mathbb{CP}^1$ の完全形式であれば Stokes の定理よりこの積分は 0 となるはずであるから，$\hat{\tau}$ は完全形式ではない．

(3) 例えば，次の α は $d\alpha = \tau$ を満たす．

$$\alpha = \left(\int_0^x \frac{ds}{(1+s^2+y^2)^2}\right) dy.$$

(2) の結果よりこの α は $\mathbb{CP}^1$ 上の 1-form に拡張されない．