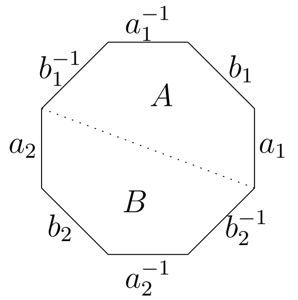
幾何学II　演習問題解答 No.14　 2020年1月22日

問題 68 $4g$ 角形の辺を左回りに $a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, \ldots, a_g, b_g, a_g^{-1}, b_g^{-1}$ と名前を付け，a_i と a_i^{-1} の組，および b_i と b_i^{-1} の組を同一視すればよい．ただし同一視の際，向きは反対に貼り付けることとする．頂点は全て 1 点に同一視されることに注意したい．これが種数 g の曲面を与えていることを見るには，例えば次のようにすればよい．$g = 1$ のときは明らかである．種数 $g-1$ までわかったとして，$4g$ 角形を $a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, \ldots, a_{g-1}, b_{g-1}, a_{g-1}^{-1}, b_{g-1}^{-1}$ の辺で囲まれる領域 A と残りの辺 $a_g, b_g, a_g^{-1}, b_g^{-1}$ で囲まれる領域 B に分ける ($g = 2$ のときの下図参照).



A を貼り合わせてできる曲面は Σ_{g-1} から円板を取り除いたものと同相であり，B を貼り合わせてできる曲面はトーラス Σ_1 から円板を取り除いたものと同相である．この二つを円板の境界に沿って貼り合わせて得られる曲面は種数 g の曲面となる．

$4g$ 角形の面の内部を 2-cell e^2, 辺 $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ の (相対) 内部を 1-cell $e^1_{a_1}, e^1_{b_1}, \ldots, e^1_{a_g}, e^1_{b_g}$, 全て一点に同一視される頂点を 0-cell e^0 とすることで，Σ_g に CW 複体の構造が入る．胞体チェイン複体の境界作用素は

$$
\begin{aligned}
de^2 &= e^1_{a_1} + e^1_{b_1} - e^1_{a_1} - e^1_{b_1} + \cdots + e^1_{a_g} + e^1_{b_g} - e^1_{a_g} - e^1_{b_g} = 0 \\
de^1_{a_i} &= e^0 - e^0 = 0 \\
de^1_{b_i} &= e^0 - e^0 = 0
\end{aligned}
$$

で与えられるため，ホモロジー群は

$$
H_k(\Sigma_g) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, 2 \\ \mathbb{Z}^g & k = 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}
$$

問題 69 次のように CW 複体の構造が入る．

0-cell	$e^0 = \{(1,0,0)\}$
1-cell	$e^1 = \{(x,y,0) : x^2+y^2=1\} \setminus \{(1,0,0)\}$
2-cell	$e^2_1 = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=1, z>0\}$
	$e^2_2 = \{(x,y,0) : x^2+y^2<1\}$
	$e^2_3 = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=1, z<0\}$

各セルに適当に向きを付けると，境界写像は

$$
\begin{aligned}
de^1 &= e^0 - e^0 = 0 \\
de_1^2 &= de_2^2 = de_3^2 = e^1
\end{aligned}
$$

ゆえ，

$$
H_k(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0 \\ \mathbb{Z}^2 & k = 2 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}
$$

問題 70 $e^i = \{[x_0, \ldots, x_i, 0, \ldots, 0] : x_i \neq 0\} \subset \mathbb{RP}^n$ とおく．$\mathbb{RP}^n = e^0 \cup e^1 \cup \cdots \cup e^n$ であり，特性写像 $\Phi_i \colon D^i \to \mathbb{RP}^n$ は

$$
\Phi_i(y_1, \ldots, y_i) = [y_1, \ldots, y_i, \sqrt{1 - |y|^2}, 0, \ldots, 0]
$$

で与えられる．ただし $|y| = \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_i^2}$. また接着写像 $\varphi_i \colon S^{i-1} \to \mathbb{RP}^{i-1}$ は射影

$$
\varphi_i(x_1, \ldots, x_i) = [x_1, \ldots, x_i]
$$

で与えられる．胞体チェイン複体の境界写像 d は $de^i = k_i e^{i-1}$ の形をしていて，$k_i \in \mathbb{Z}$ は次の写像 ϕ_i の写像度である．

$$
\phi_i \colon S^{i-1} \xrightarrow{\varphi_i} \mathbb{RP}^{i-1} \to \mathbb{RP}^{i-1}/\mathbb{RP}^{i-2} \overset{\Phi_i}{\underset{\cong}{\longleftarrow}} D^{i-1}/\partial D^{i-1}
$$

この写像 ϕ_i は S^{i-1} の中の「赤道」$\{(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0) \in S^{i-1}\}$ を一点につぶし，上半球面 S_+^{i-1} と下半球面 S_-^{i-1} を各々 $D^{i-1}/\partial D^{i-1}$ に次の写像によって移す．(ただし，$S_\pm^{i-1} = \{(x_1, \ldots, x_i) \in S^{i-1} : \pm x_i \geq 0\}$ とする．)

$$
\begin{aligned}
\phi_i^+ &\colon S_+^{i-1} \to D^{i-1}, \quad (x_1, \ldots, x_i) \mapsto (x_1, \ldots, x_{i-1}) \\
\phi_i^- &\colon S_-^{i-1} \to D^{i-1}, \quad (x_1, \ldots, x_i) \mapsto (-x_1, \ldots, -x_{i-1})
\end{aligned}
$$

以上の記述より，$0 \in D^i$ を原点とするとき，ϕ_i は $\phi_i^{-1}(0) = \{(0, \ldots, 0, \pm 1)\}$ の近傍で C^∞ 級であり，0 は ϕ_i の正則値になっている．ϕ_i^+ は向きを $(-1)^{i-1}$ 倍し，ϕ_i^- は向きを反対にする写像であることを示そう．S^{i-1} には D^i の境界としての向きが入るが，$\mathbb{R}^i$ のベクトル場である $\partial/\partial x_i$ は S_+^{i-1} 上では外向き法ベクトル，S_-^{i-1} 上では内向き法ベクトルである．従って S_+^{i-1} 上では座標 $(x_1, \ldots, x_{i-1})$ の向きは $(-1)^{i-1}$ の正負と一致し，S_-^{i-1} 上では座標 $(x_1, \ldots, x_{i-1})$ の向きは $(-1)^i$ の正負と一致する．以上より ϕ_i^+ は向きを $(-1)^{i-1}$ 倍し，ϕ_i^- は向きを (-1) 倍する写像であることが分かり，ϕ_i の次数は $k_i = (-1)^{i-1} - 1$ で与えられる．以上より胞体チェイン複体は

$$
\underset{0\text{次}}{\mathbb{Z}} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{-2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{-2} \mathbb{Z} \leftarrow \cdots \leftarrow \underset{n\text{次}}{\mathbb{Z}}
$$

で与えられる．以上により

$$
H_k(\mathbb{RP}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0 \text{ または } (k = n \text{ かつ } n \text{ は奇数}) \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & 0 < k < n \text{ かつ } n \text{ は奇数} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}
$$

問題 71 $\mathbb{CP}^n$ の CW 複体の構造を $e^{2i} = \{[x_0, \ldots, x_i, 0, \ldots, 0] : x_i \neq 0\}$ を $2i$ 次元の開セルとすることで入れる．このとき

$$\begin{aligned}\mathbb{CP}^n &= e^0 \cup e^2 \cup \cdots \cup e^{2k} \cup e^{2k+2} \cup \cdots \cup e^{2n} \\ \mathbb{CP}^k &= e^0 \cup e^2 \cup \cdots \cup e^{2k}\end{aligned}$$

であり，従って

$$\mathbb{CP}^n/\mathbb{CP}^k = * \cup e^{2k+2} \cup \cdots \cup e^{2n}$$

となる．ここで $*$ は $\mathbb{CP}^k$ をつぶした 1 点．従って

$$H_i(\mathbb{CP}^n, \mathbb{CP}^k) = \widetilde{H}_i(\mathbb{CP}^n/\mathbb{CP}^k) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & 2k+2 \leq i \leq 2n,\ i \text{ は偶数} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

問題 72 $S^1 = [0,1]/0 \sim 1$ と考え，与えられた空間 $X = S^1 \times [0,1]/(e^{i\theta}, 0) \sim (e^{in\theta}, 1)$ に次のように CW 複体の構造を入れる．

$$\begin{aligned} e^0 &= \{(0,0)\} \\ e^1_0 &= \{0\} \times (0,1) \\ e^1_1 &= (0,1) \times \{1\} \\ e^2 &= (0,1) \times (0,1) \end{aligned}$$

e^1_1 は $(i/n, (i+1)/n) \times \{0\}$，$0 \leq i \leq n-1$ とも同一視されている．このとき胞体チェイン複体の微分は

$$\begin{aligned} de^1_0 &= de^1_1 = 0 \\ de^2 &= (n-1)e^1_1 \end{aligned}$$

で与えられる．したがって

$$H_k(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0 \text{ または } (k=2 \text{ かつ } n=1) \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z} & k = 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

問題 73 標準的に $D^2 = e^2 \cup e^1 \cup e^0$，$S^1 = e^1 \cup e^0$ と胞体分割する．このとき

$$\begin{aligned} D^2 \times S^1 &= (e^2 \times e^1) \cup (e^2 \times e^0) \cup (e^1 \times e^1) \cup (e^1 \times e^0) \cup (e^0 \times e^1) \cup (e^0 \times e^0) \\ \partial D^2 \times S^1 &= (e^1 \times e^1) \cup (e^1 \times e^0) \cup (e^0 \times e^1) \cup (e^0 \times e^0) \end{aligned}$$

は $D^2 \times S^1$, $\partial D^2 \times S^1$ の胞体分割を与える．従って

$$D^2 \times S^1/(\partial D^2) \times S^1 \cong (e^2 \times e^1) \cup (e^2 \times e^0) \cup *$$

胞体チェイン複体の微分は自明であり，

$$H_k(D^2 \times S^1/\partial D^2 \times S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, 2, 3 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

となる．

問題 74 胞体分割を

$$\begin{aligned} e_1^0 &= \{(0,0)\} \\ e_1^1 &= (0,1)\times\{0\} \\ e_2^1 &= \{0\}\times(0,1) \\ e^2 &= (0,1)\times(0,1) \end{aligned}$$

とおくとき，胞体複体の微分は

$$de^2 = 2e_1^1, \quad de_1^1 = de_1^2 = 0$$

で与えられる．したがって

$$H_i(K) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & i=1 \\ \mathbb{Z} & i=0 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

問題 75 ペアリングが well-defined であること．特異チェイン複体 $S_*(X)$ と特異コチェイン複体 $S^*(X)$ の境界作用素の定義から，$\omega\in S^{*-1}(X)$ と $\sigma\in S_*(X)$ に対して $\omega(\partial\sigma) = (\delta\omega)(\sigma)$ が成り立つ．従って $\delta\omega = 0$, $\partial\sigma = 0$ を満たす $\omega\in S^*(X)$, $\sigma\in S_*(X)$ に対して

$$(\omega+\delta\tau)(\sigma+\partial\rho) = (\omega+\delta\tau)(\sigma) + (\delta(\omega+\delta\tau))(\rho) = \omega(\sigma)+\tau(\partial\sigma) = \omega(\sigma)$$

従ってペアリングは well-defined である．

次に連続写像 $f\colon X\to Y$，$[\omega]\in H^*(Y)$, $[\sigma]\in H_*(X)$ に対して，

$$\langle f^*[\omega],[\sigma]\rangle = (f^*\omega)(\sigma) = \omega(f_*\sigma) = \langle[\omega], f_*[\sigma]\rangle$$

以上より示された．

問題 76 de Rham の定理の同型 θ_M は次の二つのチェインホモトピー同値写像によって誘導された．

$$\Omega^*(M)\to S^*_{\mathrm{sm}}(M)\leftarrow S^*(M)$$

ただし $S^*_{\mathrm{sm}}(M)$ は滑らかな特異チェイン複体 $S_*^{\mathrm{sm}}(M)\subset S_*(M)$ の双対として定義される．また全て係数は $\mathbb{R}$ とする．次の図式の可換性を示せばよい．

$$\begin{tikzcd} \Omega^k(N) \arrow[r] \arrow[d, "f^*"] & S^k_{\mathrm{sm}}(N) \arrow[d, "f^*"] & S^k(N) \arrow[l] \arrow[d, "f^*"] \\ \Omega^k(M) \arrow[r] & S^k_{\mathrm{sm}}(M) & S^k(M) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

右の四角の可換性は明らかである．左の四角の可換性を示そう．水平の写像は ω を $\omega^\sharp\colon\sigma\mapsto\int_{\Delta^k}\sigma^*\omega$ に写す写像である．従って滑らかな特異 k 単体 $\sigma\colon\Delta^k\to M$ に対して

$$(f^*\omega)^\sharp(\sigma) = \int_{\Delta^k}\sigma^*(f^*\omega) = \int_{\Delta^k}(f\circ\sigma)^*\omega = \omega^\sharp(f_*\sigma)$$

問題 77 同型 $\widetilde{H}_*(\bigvee X_\alpha) \cong \bigoplus \widetilde{H}_*(X_\alpha)$ は次のように与えられた．

$$\widetilde{H}_*(\bigvee X_\alpha) \xleftarrow[\cong]{\pi_*} H_*(\coprod X_\alpha, \coprod\{x_\alpha\}) \xleftarrow[\cong]{\bigoplus j_{\alpha*}} \bigoplus H_*(X_\alpha, \{x_\alpha\}) \xleftarrow{\cong} \bigoplus \widetilde{H}_*(X_\alpha)$$

ここで $\pi\colon \coprod X_\alpha \to \bigvee X_\alpha$, $j_\alpha\colon X_\alpha \to \coprod X_\alpha$ は自然な写像である．包含写像については

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{H}_*(\bigvee X_\alpha) & H_*(\coprod X_\alpha, \coprod\{x_\alpha\}) \arrow[l, "\pi_*"', "\cong"] & \bigoplus H_*(X_\alpha, \{x_\alpha\}) \arrow[l, "\bigoplus j_{\alpha*}"', "\cong"] & \bigoplus \widetilde{H}_*(X_\alpha) \arrow[l, "\cong"'] \\
 & & H_*(X_\alpha, \{x_\alpha\}) \arrow[ul, "j_{\alpha*}"] \arrow[u] & \widetilde{H}_*(X_\alpha) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[u, hook] \arrow[ulll, bend left, "i_{\alpha*}"]
\end{tikzcd}$$

の可換性から従う．射影については

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{H}_*(\bigvee X_\alpha) \arrow[drrr, bend right, "p_{\alpha*}"'] & H_*(\coprod X_\alpha, \coprod\{x_\alpha\}) \arrow[l, "\pi_*"', "\cong"] \arrow[dr, "q_{\alpha*}"] & \bigoplus H_*(X_\alpha, \{x_\alpha\}) \arrow[l, "\bigoplus j_{\alpha*}"', "\cong"] \arrow[d, two heads] & \bigoplus \widetilde{H}_*(X_\alpha) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, two heads] \\
 & & H_*(X_\alpha, \{x_\alpha\}) & \widetilde{H}_*(X_\alpha) \arrow[l, "\cong"]
\end{tikzcd}$$

の可換性からわかる．ただし，$q_\alpha\colon \coprod X_\alpha \to X_\alpha$ は X_α 上では恒等写像で，X_β $(\beta \neq \alpha)$ を 1 点 $\{x_\alpha\}$ につぶす写像．

問題 78 もし $\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^m$ が同相だとすると，$\mathbb{R}^n$ から 1 点を除いた位相空間と $\mathbb{R}^m$ から 1 点を除いた位相空間も同相である．$\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{pt}$ は S^{n-1} とホモトピー同値，$\mathbb{R}^m \setminus \mathrm{pt}$ は S^{m-1} とホモトピー同値である．従って仮定から $H_*(S^{n-1}) \cong H_*(S^{m-1})$．球面のホモロジーの計算から $n = m$ が従う．

問題 79 ヒントを用いて，連続なレトラクション $r\colon D^n \to S^{n-1}$ が定義される．(ここで $x \in S^{n-1}$ に対して $r(x) = x$ に注意する．) $i\colon S^{n-1} \to D^n$ を包含写像とすると，$r \circ i = 1$．したがって簡約ホモロジーに誘導する写像も $r_* \circ i_* = 1$ を満たす．特に i_* は単射である．このことは $\widetilde{H}^{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$, $\widetilde{H}^{n-1}(D^n) = 0$ と矛盾する．

問題 80 問題 88 と問題 59 より，

$$H_i(A, A \cap B) \cong H_i(A/(A \cap B), *), \qquad H_i(A \cup B, B) \cong H_i(A \cup B/B, *)$$

基点付き位相空間として $A/(A \cap B) \cong A \cup B/B$ であることを示せば，結論が従う．$A \hookrightarrow A \cup B \to A \cup B/B$ は連続写像であり，$A \cap B$ を 1 点につぶすので，連続写像 $f\colon A/(A \cap B) \to A \cup B/B$ が誘導される．これは全単射であることは明らか．f が閉写像であることを示せばよい．$A/(A \cap B)$ の閉集合 F をとる．この A における逆像は A の開集合 $\widetilde{F}$ である．$f(F)$ が閉集合であることを示したい．以下では A, B が閉集合であることを使う．$\widetilde{F}$ が B と交わらないとき，$f(F)$ の $A \cup B$ における逆像は $\widetilde{F}$ であり，開集合である．従って $f(F)$ も閉集合．また，$\widetilde{F}$ が B と交わるとき，$f(F)$ の $A \cup B$ における逆像は $\widetilde{F} \cup B$ でありこれは閉集合．したがって $f(F)$ は閉集合．すなわち f は閉写像で，従って同相写像．

問題 81 相対ホモロジーの長完全列

$$0 = \widetilde{H}_n(\Delta^n) \to H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \xrightarrow{\partial} \widetilde{H}_{n-1}(\partial\Delta^n) \to \widetilde{H}_{n-1}(\Delta^n) = 0$$

より，∂ は同型写像であったことを思い出しておく．特にヒントで与えた写像

$$H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \xrightarrow{\partial} \widetilde{H}_{n-1}(\partial\Delta^n) \xleftarrow{\cong} H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1})$$

は同型である．(2 番目の同型は $\partial\Delta^n \cong \Delta^{n-1}/\partial\Delta^{n-1}$ から誘導される．この 2 番目の同型については，以下の証明では少し違った形で述べる．)

恒等写像 $1_n\colon \Delta^n \to \Delta^n$ が $(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ の相対サイクルになることは明らかである．これが $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ の生成元であることを n についての帰納法で示す．

$n = 1$ のとき，$H_1(\Delta^1, \partial\Delta^1) \xrightarrow{\partial} \widetilde{H}_0(\partial\Delta^1)$ の下で，恒等写像 $1_1\colon \Delta^1 \to \Delta^1$ は $[P_1] - [P_0]$ に移る．ただし，$P_0 = (1, 0), P_1 = (0, 1)$ であり $[P_i]$ は P_i への定値写像の与える 0 単体とする．$[P_1] - [P_0]$ は明らかに $\widetilde{H}_0(\partial\Delta^1) = \widetilde{H}_0(\{P_0, P_1\})$ の生成元であるから 1 は生成元をなす．

$n-1$ までわかっていたとして，n のとき．定義から $\partial 1_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\partial_i$ である．ただし，$\partial_i\colon \Delta^{n-1} \to \Delta^n$ は第 i 面を与える写像 $\partial_i(t_0, \dots, t_{n-1}) = (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_n)$．$\partial\Delta^n$ の第 0 面以外の和集合を $C = \Delta_1^{n-1} \cup \dots \cup \Delta_n^{n-1}$ とする．ただし $\Delta_i^{n-1} = \mathrm{Im}(\partial_i)$．$C$ は可縮であって，

$$\partial\Delta^n/C \cong \Delta_0^{n-1}/\partial\Delta_0^{n-1} = \Delta^{n-1}/\partial\Delta^{n-1}$$

相対ホモロジー完全列より，

$$0 = \widetilde{H}_{n-1}(C) \to \widetilde{H}_{n-1}(\partial\Delta^n) \xrightarrow{\cong} H_{n-1}(\partial\Delta^n, C) \to \widetilde{H}_{n-2}(C) = 0$$

であり，さらに上の同相写像から

$$H_{n-1}(\partial\Delta^n, C) \cong \widetilde{H}_{n-1}(\partial\Delta^n/C) \cong \widetilde{H}_{n-1}(\Delta^{n-1}/\partial\Delta^{n-1}) \cong H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1})$$

以上の同型の下で，$\partial 1_n$ がどう移されるかを見る．$\partial_1, \dots, \partial_n$ は C に含まれているので，$\partial 1_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\partial_i \in \widetilde{H}_{n-1}(\partial\Delta^n)$ は $\partial_0 \in H_{n-1}(\partial\Delta^n, C)$ に対応する．またこれは $1_{n-1} \in H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1})$ に対応している．帰納法の仮定より 1_{n-1} は生成元であったから，1_n も生成元となる．

問題 82 (1) $\omega \in \Omega_c^k(M \setminus \partial M)$ と滑らかな特異単体 $\sigma\colon \Delta^k \to M$ をとる．もし σ の像が ∂M に含まれていれば $\int_{\Delta^k}\sigma^*\omega = 0$ である．従ってペアリング $\Omega_c^k(M \setminus M) \times S_k^{\mathrm{sm}}(M, \partial M) \to \mathbb{R}$ は well-defined. また Stokes の定理より (Δ^k の境界に誘導される向きについては No.1 の問題 3 の解答参照)，$\tau \in \Omega_c^{k-1}(M \setminus \partial M)$ に対して

$$\begin{aligned}
\langle d\tau, \sigma\rangle = \int_{\Delta^k}\sigma^*d\tau &= \int_{\Delta^k}d(\sigma^*\tau) \\
&= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\int_{\Delta^{k-1}}\partial_i^*\sigma^*\tau \qquad (\text{Stokes の定理}) \\
&= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\int_{\Delta^{k-1}}(\sigma\circ\partial_i)^*\tau = \langle\tau, \partial\sigma\rangle
\end{aligned}$$

ここで $\partial_i\colon \Delta^{k-1} \to \Delta^k$，$(t_0, \ldots, t_{k-1}) \mapsto (t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{k-1})$ は第 i 面を与える写像.

(2) 図式に現れるベクトル空間 $H_n(D^n, \partial D^n; \mathbb{R})$, $H_{n-1}(\partial D^n; \mathbb{R})$, $H^n_{\mathrm{dR,c}}(D^n \setminus \partial D^n)^*$, $H^{n-1}_{\mathrm{dR}}(\partial D^n)$ は全て 1 次元であるから，DR_1, DR_2 の下で生成元が対応することを示せばよい．$H_n(D^n, \partial D^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ の生成元は問題 81 より同相写像

$$\sigma\colon (\Delta^n, \partial\Delta^n) \cong (D^n, \partial D^n)$$

によって与えられる．σ を少し動かして，σ とホモトピックな C^∞ 級写像 $\tilde{\sigma}$

$$\sigma \simeq \tilde{\sigma}\colon (\Delta^n, \partial\Delta^n) \to (D^n, \partial D^n)$$

をとる．$[\sigma] = [\sigma_*(1_n)] = [\tilde{\sigma}_*(1_n)] = [\tilde{\sigma}]$ より $[\tilde{\sigma}]$ は $H_n(D^n, \partial D^n; \mathbb{Z})$ の生成元である．十分小さいある開球体 $U \subset D^n$ に対して，$\tilde{\sigma}|_{\tilde{\sigma}^{-1}(U)}\colon \tilde{\sigma}^{-1}(U) \to U$ は向きを保つ微分同相と仮定できる．$H^n_{\mathrm{dR,c}}(D^n \setminus \partial D^n)$ の生成元 $[\omega]$ で $\operatorname{Supp}\omega \subset U$ なるものをとる．このとき $\int_{D^n} \omega \neq 0$ である．このとき

$$\mathrm{DR}_1([\tilde{\sigma}])(\omega) = \int_{\Delta^n} \tilde{\sigma}^*\omega = \int_{\tilde{\sigma}^{-1}(U)} \tilde{\sigma}^*\omega = \int_U \omega = \int_{D^n} \omega.$$

従って $\mathrm{DR}_1([\tilde{\sigma}]) = \int_{D^n}$.

また第 i 面の写像 $\partial_i\colon \Delta^{n-1} \to \Delta^n$ に対して，$\partial_i\tilde{\sigma} := \tilde{\sigma} \circ \partial_i\colon \Delta^{n-1} \to \partial D^n$ を考える．∂D^n のある (非空な) 開集合 $V \subset \mathrm{Im}(\partial_0\tilde{\sigma})$ が存在して V は $\mathrm{Im}(\partial_i\tilde{\sigma})$, $1 \leq i \leq n$ と交わらず，$\partial_0\tilde{\sigma}|_{(\partial_0\tilde{\sigma})^{-1}(V)}\colon (\partial_0\tilde{\sigma})^{-1}(V) \to V$ は微分同相，さらに $\tilde{\sigma}^{-1}(V) \subset \Delta^n$ のある近傍で $\tilde{\sigma}$ は境界付き多様体の微分同相を与えると仮定できる．第 0 面に誘導される向きの計算 (No.1 の問題 3) から，$\partial_0\tilde{\sigma}|_{(\partial_0\tilde{\sigma})^{-1}(V)}$ は向きを保つ．$H^{n-1}_{\mathrm{dR}}(\partial D^n)$ の生成元 $[\tau]$ で $\operatorname{Supp}\tau \subset V$ となるものをとる．このとき，

$$\mathrm{DR}_2([\partial\tilde{\sigma}])(\tau) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \int_{\Delta^{n-1}} (\partial_i\tilde{\sigma})^*\tau = \int_{(\partial_0\tilde{\sigma})^{-1}(V)} (\partial_0\tilde{\sigma})^*\tau = \int_V \tau = \int_{\partial D^n} \tau.$$

従って $\mathrm{DR}_2([\partial\tilde{\sigma}]) = \int_{\partial D^n}$．以上より主張が示された．

問題 83 $\mathbb{R}^n$ が可縮であることと，相対ホモロジー完全列より

$$0 = \widetilde{H}_n(\mathbb{R}^n) \to H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \xrightarrow{\cong} \widetilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \widetilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n) = 0$$

であり，また S^{n-1} は $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ の変位レトラクトであるから，

$$\widetilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \widetilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}.$$

以上より $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$.

M を多様体，$x \in M$ とする．x の開近傍 U で $\mathbb{R}^n$ と同相なものがとれる．切除定理から

$$H_n(M, M \setminus \{x\}) \cong H_n(U, U \setminus \{x\}) \cong H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$$

点 x での M の向きは U の向きを定めることに注意する．x 中心の U に含まれる閉球体 D^n をとるとき，$H_n(M, M\setminus\{x\}) \cong H_n(U, U\setminus\{x\}) \cong H_n(D^n, \partial D^n)$ である．(2 番目の同型は，例えば相対ホモロジー長完全列から分かる．) 問題 82 より $H_n(D^n, \partial D^n)$ の生成元の取り方は D^n の向きの取り方と対応している．以上より $H_n(M, M\setminus\{x\})$ の生成元の取り方は点 x での向きの取り方と対応する．

問題 84 $x \in M$ と (x の座標近傍に含まれる)x 中心の閉球体 D^n をとる．このとき

$$H_n(M) \xrightarrow{\cong} H_n(M, M\setminus \mathrm{Int}(D^n)) \xleftarrow{\cong} H_n(D^n, \partial D^n)$$

は全て同型である．実際，以下の可換図式

$$\begin{tikzcd}
H_n(M) \arrow[r] \arrow[dr, "i_x"'] & H_n(M, M\setminus \mathrm{Int}(D^n)) \arrow[d, "\cong"] & H_n(D^n, \partial D^n) \arrow[l] \arrow[d, "\cong"] \\
 & H_n(M, M\setminus\{x\}) \arrow[r, "\cong", "\text{excision}"'] & H_n(D^n, D^n\setminus\{x\})
\end{tikzcd}$$

において i_x が同型である事実から従う．(縦の写像の同型性は相対ホモロジー長完全列から分かる．) de Rham の定理の与える写像 $\mathrm{DR}_1, \mathrm{DR}_2, \mathrm{DR}_3$ は次の可換図式を満たす．

$$\begin{tikzcd}
H_n(M;\mathbb{R}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathrm{DR}_1"', "\cong"] & H_n(M, M\setminus \mathrm{Int}(D^n);\mathbb{R}) \arrow[d, "\mathrm{DR}_2"] & H_n(D^n, \partial D^n;\mathbb{R}) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, "\mathrm{DR}_3"] \\
H^n_{\mathrm{dR}}(M)^* \arrow[r, "i_* \text{ の双対}"] & H^n_{\mathrm{dR,c}}(\mathrm{Int}(D^n))^* \arrow[r, equal] & H^n_{\mathrm{dR,c}}(\mathrm{Int}(D^n))^*
\end{tikzcd} \tag{1}$$

ここで $i\colon \mathrm{Int}(D^n) \to M$ は包含写像で，$i_*\colon H^n_{\mathrm{dR,c}}(\mathrm{Int}(D^n)) \to H^n_{\mathrm{dR}}(M)$ を導くものである．実際，チェインレベルの写像も同じ記号 DR_i で表せば，滑らかな特異 n 単体 $\sigma \in S^{\mathrm{sm}}_n(M)$ と $\omega \in \Omega^n_c(\mathrm{Int}(D^n))$ に対して，

$$\mathrm{DR}_1(\sigma)(i_*\omega) = \int_{\Delta^n} \sigma^*(i_*\omega) = \mathrm{DR}_2(\sigma)(\omega)$$

また同じく $\sigma \in S^{\mathrm{sm}}_n(D^n)$ に対して

$$\mathrm{DR}_2(\sigma)(\omega) = \int_{\Delta^n} \sigma^*\omega = \mathrm{DR}_3(\sigma)(\omega)$$

が成立する．

基本類 $[M] \in H_n(M)$ の誘導する $H_n(M, M\setminus\{x\}) \cong H_n(D^n, \partial D^n)$ の生成元を $[\sigma]$ とする．必要なら $[M]$ を $-[M]$ で置き換えて，$[\sigma]$ が (問題 82 の意味で) D^n の標準的な向きに対応すると仮定してよい．すなわち，

$$\mathrm{DR}_3([\sigma]) = \int_{D^n}$$

また，M の向きを D^n 上で D^n の標準的な向きと一致するように選ぶとき，可換図式 (1) の下の行の対応で $\int_M \in H^n_{\mathrm{dR}}(M)^*$ が $\int_{D^n} \in H^n_{\mathrm{dR,c}}(D^n)^*$ に対応する．実際，

$$\int_M i_*\omega = \int_{D^n} \omega, \qquad \omega \in \Omega^n_c(\mathrm{Int}(D^n))$$

可換図式をたどって，$\mathrm{DR}_1([M]) = \int_M$ が従う．

問題 85 Hatcher, *Algebraic Topology*, Proposition A.3 参照.

問題 86 Hatcher, *Algebraic Topology*, Proposition A.1 参照.

問題 87 $(\Rightarrow)$ は明らか. $(\Leftarrow)$ を示す. X の位相の定義から, $F \cap X^n$ が全ての n について閉集合であることを示せばよい. $F \cap X^0$ が閉であることは X^0 は離散集合であることから明らか. 帰納的に $F \cap X^{n-1}$ が閉であることが分かったとする. $F \cap X^n$ が閉であることを示すには, 商位相の定義から, 任意の特性写像 $\Phi_\alpha \colon D^n_\alpha \to X^n$ に対して $\Phi_\alpha^{-1}(F)$ が閉であることを示せばよい. $\Phi_\alpha(D^n_\alpha) \subset \overline{e^n_\alpha}$ ゆえ (実際は $\Phi_\alpha(D^n_\alpha) = \overline{e^n_\alpha}$) $\Phi_\alpha^{-1}(F) = \Phi_\alpha^{-1}(F \cap \overline{e^n_\alpha})$. 仮定から $F \cap \overline{e^n_\alpha}$ は閉集合ゆえ $\Phi_\alpha^{-1}(F)$ は閉集合.

問題 88 Hatcher, *Algebraic Topology*, Proposition A.5 参照.

問題 89 Hatcher, *Algebraic Topology*, Section 3.B 参照. (セルの数が) 可算ではない CW 複体の積については, その積位相に関して, 問題に与えたような CW 構造を持つとは限らない. 同書 Theorem A.6 とそのあとの例を参照.

問題 90 胞体チェイン複体の境界作用素の授業で与えた記述と, No.1 問題 3 の向きの計算から明らかである.