幾何学 II　演習問題解答 No.13　 2020 年 1 月 15 日

問題 61　実射影平面 $\mathbb{RP}^2$ は閉 Möbius の帯 $M = [0,1] \times [-1,1]/(0,x) \sim (1,-x)$ の境界 ∂M を 1 点につぶしたものと同相である．従って問題 57, 59 の結果より

$$\widetilde{H}^*(\mathbb{RP}^2) \cong \widetilde{H}^*(M/\partial M) \cong H^*(M, \partial M) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & * = 1 \\ 0 & * \neq 1 \end{cases}$$

これから結論が得られる．

問題 62　素数 p に対して，

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & p = 2 \\ 0 & p \neq 2 \end{cases}, \quad \mathrm{Tor}_1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & p = 2 \\ 0 & p \neq 2 \end{cases},$$

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & p = 2 \\ 0 & p \neq 2 \end{cases}, \quad \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & p = 2 \\ 0 & p \neq 2 \end{cases}$$

$$\mathrm{Tor}_1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0, \quad \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

であることに注意する．普遍係数定理より，

$$\begin{aligned} H_k(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) &\cong H_k(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathrm{Tor}_1(H_{k-1}(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \\ &\cong \begin{cases} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & k = 0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & k = 1, p = 2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & k = 2, p = 2 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \\ H^k(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) &\cong \mathrm{Hom}(H_k(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Ext}^1(H_{k-1}(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \\ &\cong \begin{cases} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & k = 0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & k = 1, p = 2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & k = 2, p = 2 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \\ H^k(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}) &\cong \mathrm{Hom}(H_k(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Ext}^1(H_{k-1}(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \\ &\cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & k = 2 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \end{aligned}$$

問題 63　Klein の壺 $K = \mathbb{R}^2/(x,y) \sim (x+1,y), (x,y) \sim (-x, y+1)$ を次の開集合で覆う．

$$U_1 = (0,1) \times [0,1] \text{ の像}, \quad U_2 = ([0,1/2) \cup (1/2,1]) \times [0,1] \text{ の像}$$

このとき，U_1, U_2 は各々（開いた）Möbius の帯と同相であり，特に S^1 とホモトピー同値．また $U_1 \cap U_2$ は $S^1 \times \mathbb{R}$ と同相で，S^1 とホモトピー同値である．簡約ホモロジーに対する reduced Mayer-Vietoris 完全列より

$$
\begin{aligned}
\widetilde{H}_0(U_1 \cap U_2) \leftarrow \widetilde{H}_1(K) &\leftarrow \widetilde{H}_1(U_1) \oplus \widetilde{H}_1(U_2) \leftarrow \widetilde{H}_1(U_1 \cap U_2) \\
&\leftarrow \widetilde{H}_2(K) \leftarrow \widetilde{H}_2(U_1) \oplus \widetilde{H}_2(U_2) \leftarrow \widetilde{H}_2(U_1 \cap U_2) \\
&\leftarrow \cdots
\end{aligned}
$$

これは

$$0 \leftarrow \widetilde{H}_1(K) \leftarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow \widetilde{H}_2(K) \leftarrow 0$$

の形をしている．また $\widetilde{H}_n(K) = 0,\ n > 2$ もわかる．写像

$$\widetilde{H}_1(U_1 \cap U_2) \cong \mathbb{Z} \to \widetilde{H}_1(U_1) \oplus \widetilde{H}_1(U_2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

を求めればよい．包含写像 $U_1 \cap U_2 \to U_i$ は，ホモトピー同値写像 $S^1 \hookrightarrow U_1 \cap U_2$, $U_i \to S^1$ と合成すると，2 重に巻き付く写像 $S^1(\cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \to S^1$, $[x] \mapsto [2x]$ を与える．問題 57 の解答で見たように，この写像は S^1 の 1 次のホモロジーに 2 倍写像を誘導する．従って上の写像は $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, 1 \mapsto (2, 2)$ である．したがって $\widetilde{H}_1(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\widetilde{H}_2(K) \cong 0$ である．以上より

$$
H_n(K) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & n = 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}
$$

問題 64-67　代数の適当な教科書を見て下さい．(Hatcher の Lemma 3.1, Proposition 3A.5 など，あるいは河田敬義「ホモロジー代数」の 3 章など．)