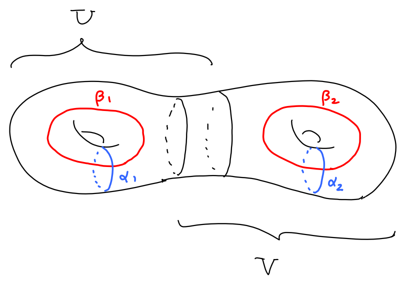
幾何学 II　演習問題解答 No.12　2020 年 1 月 8 日

問題 55　2 人乗りの浮き輪 Σ を以下の図のように二つの開集合 U, V で覆う．U, V は各々 T^2 から閉円板 D^2 を除いたものと微分同相であり，$U \cap V$ は $S^1 \times (0,1)$ と微分同相である．



まず $T^2 \setminus D^2$ のコンパクト台コホモロジーを求める．D^2 を含む開円板 B をとり，$T^2 = B \cup (T^2 \setminus D^2)$ に関する (コンパクト台コホモロジーの) Mayer-Vietoris 完全列を書くと次の通りである．

$$\begin{aligned}
0 &\to H_c^0(B \setminus D^2) \to H_c^0(B) \oplus H_c^0(T^2 \setminus D^2) \to H^0(T^2) \to \\
&\to H_c^1(B \setminus D^2) \to H_c^1(B) \oplus H_c^1(T^2 \setminus D^2) \to H^1(T^2) \to \\
&\to H_c^2(B \setminus D^2) \to H_c^2(B) \oplus H_c^2(T^2 \setminus D^2) \to H^2(T^2) \to 0
\end{aligned}$$

ここで T^2 はコンパクトなので $H_c^*(T^2) \cong H^*(T^2)$ を用いた．Künneth の定理から $H^*(T^2) \cong H^*(S^1) \otimes H^*(S^1)$ である．また $B \setminus D^2 \cong S^1 \times \mathbb{R}$, $B \cong \mathbb{R}^2$ より

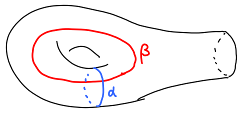
$$H_c^q(B \setminus D^2) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & q = 1, 2 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \qquad H_c^q(B) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & q = 2 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

である．また $T^2 \setminus D^2$ はコンパクトではないので $H_c^0(T^2 \setminus D^2) = 0$．ポアンカレ双対性から $H_c^2(T^2 \setminus D^2) \cong (H^0(T^2 \setminus D^2))^* \cong \mathbb{R}$．したがって完全列は

$$\begin{aligned}
0 \to \underset{\cong \mathbb{R}}{H^0(T^2)} \to \underset{\cong \mathbb{R}}{H_c^1(B \setminus D^2)} \to H_c^1(T^2 \setminus D^2) \to \underset{\cong \mathbb{R}^2}{H^1(T^2)} \to \\
\to \underset{\cong \mathbb{R}}{H_c^2(B \setminus D^2)} \to H_c^2(B) \oplus \underset{\cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}}{H_c^2(T^2 \setminus D^2)} \to H^2(T^2) \to 0
\end{aligned}$$

となるが，$H^0(T^2) \to H_c^1(B \setminus D^2)$ は単射ゆえ同型，また $H_c^2(B \setminus D^2) \to H_c^2(B)$ は包含写像により誘導されるが，生成元を生成元に移すので同型である．(向き付けられた連結 n 次元多様体 M に対して $H_c^n(M)$ は $\int_M \sigma = 1$ を満たすコンパクト台 n-form によって生成された．) 従って $H_c^1(T^2 \setminus D^2) \cong H^1(T^2) \cong \mathbb{R}^2$ である．以上をまとめると，$H_c^0(T^2 \setminus D^2) = 0$, $H_c^2(T^2 \setminus D^2) \cong \mathbb{R}$ であり，包含写像 $i\colon T^2 \setminus D^2 \to T^2$ は同型

$$i_*\colon H_c^1(T^2 \setminus D^2) \cong H^1(T^2) \cong \mathbb{R}^2$$



を誘導することが分かる．

$T^2 \setminus D^2$ のサイクル α, β を図のようにとる．α, β のコンパクト Poincaré 双対が $H_c^1(T^2 \setminus D^2)$ の基底になることを示そう．写像 i_* によるコンパクト Poincaré 双対の像 $i_*\eta_{\alpha,c}$, $i_*\eta_{\beta,c}$ は T^2 の部分多様体としての α, β の Poincaré 双対 η_α, η_β と一致する．実際，任意の $[\omega] \in H^1(T^2)$ に対して

$$\int_{T^2} \omega \wedge i_*\eta_{\alpha,c} = \int_{T^2 \setminus D^2} \omega \wedge \eta_{\alpha,c} = \int_\alpha \omega$$

が成立し，$i_*\eta_{\alpha,c}$ は $\alpha \subset T^2$ の Poincaré 双対であることが分かる．($i_*\eta_{\beta,c}$ についても同様．) 従って T^2 の部分多様体としての Poincaré 双対 η_α, η_β が $H^1(T^2)$ の基底であることを示せばよい．T^2 を $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ と同一視するとき，サイクル α, β は各々$\{0\} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times \{0\}$ の像であるとしてよい．$\mathbb{R}^2$ の座標を (x, y) とするとき，$H^1(T^2)$ の基底は (Künneth の定理から)dx, dy で与えられる．α, β の向きを座標が増大する向きに入れるとき，

$$\int_\alpha dx = 0, \ \int_\alpha dy = 1, \ \int_\beta dx = 1, \ \int_\beta dy = 0$$

一方で $\int_{T^2} dx \wedge dy = 1$ より $\eta_\alpha = -dx$, $\eta_\beta = dy$ となることが分かる．すなわち η_α, η_β は $H^1(T^2)$ の基底をなす．

最後に $H^*(\Sigma)$ を $\Sigma = U \cup V$ に関する Mayer-Vietoris 完全列を用いて計算する．

$$\begin{aligned} 0 &\to H_c^0(U \cap V) \to H_c^0(U) \oplus H_c^0(V) \to H^0(\Sigma) \to \\ &\to H_c^1(U \cap V) \to H_c^1(U) \oplus H_c^1(V) \to H^1(\Sigma) \to \\ &\to H_c^2(U \cap V) \to H_c^2(U) \oplus H_c^2(V) \to H^2(\Sigma) \to 0. \end{aligned}$$

$U \cong V \cong T^2 \setminus D^2$, $U \cap V \cong S^1 \times \mathbb{R}$ および上の計算を用いると，この完全列は

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(\Sigma) \to \underbrace{H_c^1(U \cap V)}_{\cong \mathbb{R}} \to \underbrace{H_c^1(U) \oplus H_c^1(V)}_{\cong \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2} \to H^1(\Sigma) \to \\ \to \underbrace{H_c^2(U \cap V)}_{\cong \mathbb{R}} \to \underbrace{H_c^2(U) \oplus H_c^2(V)}_{\cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}} \to H^2(\Sigma) \to 0. \end{aligned}$$

ここで Σ は連結より $H^0(\Sigma) \cong \mathbb{R}$，また Σ はコンパクト向き付け可能なので Poincaré 双対性から $H^2(\Sigma) \cong (H^0(\Sigma))^* \cong \mathbb{R}$ である．写像 $H^0(\Sigma) \to H_c^1(U \cap V)$ は単射ゆえ同型．また $H_c^2(U \cap V) \to H_c^2(U)$ は (生成元を生成元に移すので) 単射である．以上より写像

$$H_c^1(U) \oplus H_c^1(V) \to H^1(\Sigma), \quad (\omega, \tau) \mapsto j_{U*}\omega + j_{V*}\tau \tag{1}$$

は同型である．ただし j_U, j_V は U, V の Σ への包含写像．従って

$$H^q(\Sigma) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & q = 0, 2 \\ \mathbb{R}^4 & q = 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

となる．既に示したことから，$H^1_c(U)$ の基底は $\eta_{\alpha_1,c}$, $\eta_{\beta_1,c}$ により与えられ，$H^1_c(V)$ の基底は $\eta_{\alpha_2,c}$, $\eta_{\beta_2,c}$ により与えられる．前と同様の議論によりこれらの押し出し $j_{U*}(\eta_{\alpha_1,c}), j_{U*}(\eta_{\beta_1,c}), j_{V_*}(\eta_{\alpha_2,c}), j_{V*}(\eta_{\beta_2,c})$ は各々$\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ の Poincaré 双対であるが，式 (1) が同型なので，$H^1(\Sigma)$ の基底をなす．

問題 56　S^1 を二つの開区間 $U = \{e^{i\theta} : -\frac{2\pi}{3} < \theta < \frac{2\pi}{3}\}$, $V = \{e^{i\theta} : \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{5\pi}{3}\}$ で覆う．(簡約ホモロジーに対する)Mayer-Vietoris 完全列より

$$\to \widetilde{H}_k(U \cap V) \to \widetilde{H}_k(U) \oplus \widetilde{H}_k(V) \to \widetilde{H}_k(S^1) \to \widetilde{H}_{k-1}(U \cap V) \to$$

を得る．U, V は 1 点とホモトピー同値，$U \cap V$ は 2 点とホモトピー同値だから，$\widetilde{H}_k(U) \cong \widetilde{H}_k(V) \cong 0$ $(\forall k)$, $\widetilde{H}_0(U \cap V) \cong \mathbb{Z}$, $\widetilde{H}_k(U \cap V) \cong 0$ $(k \neq 0)$．従って $k \neq 1$ ならば $\widetilde{H}_k(S^1) = 0$ であり，$\widetilde{H}_1(S^1) \cong \widetilde{H}_1(U \cap V) \cong \mathbb{Z}$ が分かる．よって

$$H_k(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

次に，$S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ を二つの開集合 $U = \{z > -1/2\}$, $V = \{z < \frac{1}{2}\}$ で覆う．このとき U, V は 1 点とホモトピー同値，$U \cap V$ は S^1 とホモトピー同値である．したがって $\widetilde{H}_k(U) \cong \widetilde{H}_k(V) \cong 0$ $(\forall k)$, $\widetilde{H}_1(U \cap V) \cong \mathbb{Z}$, $\widetilde{H}_k(U \cap V) \cong 0$ $(k \neq 1)$．Mayer-Vietoris 完全列を用いた同様の議論から

$$H_k(S^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, 2 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

が分かる．

問題 57　Möbius の帯 M は S^1 とホモトピー同値，また $\partial M \cong S^1$ である．このことと相対ホモロジーの長完全列

$$\to \widetilde{H}_k(\partial M) \to \widetilde{H}_k(M) \to H_k(M, \partial M) \to \widetilde{H}_{k-1}(\partial M) \to$$

より $k \neq 1, 2$ で $H_k(M, \partial M) \cong 0$ が分かる．次数 1,2 では完全列

$$0 = \widetilde{H}_2(M) \to H_2(M, \partial M) \to \underset{\cong \mathbb{Z}}{\widetilde{H}_1(\partial M)} \to \underset{\cong \mathbb{Z}}{\widetilde{H}_1(M)} \to \widetilde{H}_1(M, \partial M) \to \widetilde{H}_0(\partial M) = 0$$

を得る．あとは写像 $\widetilde{H}_1(\partial M) \to \widetilde{H}_1(M)$ を求めればよい．第一射影 $M \to I/\partial I \cong S^1$ により M と S^1 の間のホモトピー同値が与えられ，また同相写像 $S^1 = I/\partial I \to \partial M$ は $[0, \frac{1}{2}] \ni x \mapsto (2x, 1) \in M$, $[\frac{1}{2}, 1] \ni x \mapsto (2x - 1, -1) \in M$ によって与えられる．

(ここで $I=[0,1]$ は単位区間．) したがって合成写像 $S^1 \cong \partial M \to M \to S^1$ は 2 重にまきつく写像，すなわち

$$f\colon I/\partial I \to I/\partial I \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad f([x]) = [2x]$$

で与えられる．$f_*\colon \widetilde{H}_1(S^1) \to \widetilde{H}_1(S^1)$ が 2 倍写像であることを示そう．S^1 の特異 1 単体 $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\colon I \to I/\partial I$ を $\sigma_0(x) = [x]$, $\sigma_1(x) = [x/2]$, $\sigma_2(x) = [(x+1)/2]$ で定義する．容易にわかるように $\partial\sigma_0 = 0$, $\partial(\sigma_1+\sigma_2) = 0$ であり，σ_0 および $\sigma_1+\sigma_2$ は S^1 の 1 次のホモロジー類を定める．授業で示したように，

$$\widetilde{H}_1(S^1) \cong H_1(I, \partial I) \cong \widetilde{H}_0(\partial I)$$

であり，この同型の下での $\sigma_0, \sigma_1+\sigma_2 \in H_1(S^1) \cong \widetilde{H}_1(S^1)$ の像はどちらも $[1]-[0]$ である．ただし $[0]$ は $0 \in \partial I$ への定値写像の与える特異 0 単体を表す．$[1]$ も同様．従って $[\sigma_0] = [\sigma_1+\sigma_2]$ であり，これらは $H_1(S^1)$ の基底となる．$f_*\sigma_1 = f_*\sigma_2 = \sigma_0$ であるから $f_*[\sigma_0] = f_*[\sigma_1+\sigma_2] = [\sigma_0+\sigma_0] = 2[\sigma_0]$．従って f_* は 2 倍写像であることが示された．以上の計算より，

$$H_k(M, \partial M) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & k=1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

注　一般に M を向き付けられたコンパクト連結 n 次元多様体とするとき，$H_n(M) \cong \mathbb{Z}$ であり $H_n(M)$ は基本類 $[M] \in H_n(M)$ により生成される．(M の向きを反対にすると基本類 $[M]$ は (-1) 倍される．) さらに，N を別の向き付けられたコンパクト連結 n 次元多様体，$f\colon M \to N$ を C^∞ 級写像とするとき，

$$f_*[M] = k[N]$$

を満たす整数 $k \in \mathbb{Z}$ が定まるが，この k は授業で前に (de Rham 理論を用いて) 定義した f の写像度 $\deg f$ と一致する．このことを見るには，de Rham の定理

$$H^n_{\mathrm{dR}}(M) \cong \mathrm{Hom}(H^{\mathrm{sing}}_n(M), \mathbb{R})$$

において基本類 $[M]$ が M 上の積分 $\int_M\colon H^n_{\mathrm{dR}}(M) \to \mathbb{R}$ に対応すること，$f_*\colon H^{\mathrm{sing}}_n(M) \to H^{\mathrm{sing}}_n(N)$ と $f^*\colon H^n_{\mathrm{dR}}(N) \to H^n_{\mathrm{dR}}(M)$ が互いに随伴 (adjoint) であることを用いればよい．

問題 58　ペア (X, A) に対する相対ホモロジー長完全列はチェイン複体の短完全列

$$0 \to S_*(A) \to S_*(X) \to S_*(X)/S_*(A) \to 0$$

から誘導されていた．写像 $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ は次の (チェイン写像からなる) 可換図式を導く：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & S_*(A) & \xrightarrow{i_*} & S_*(X) & \xrightarrow{p_*} & S_*(X)/S_*(A) & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle f_*}\downarrow & & {\scriptstyle f_*}\downarrow & & {\scriptstyle f_*}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & S_*(B) & \xrightarrow{j_*} & S_*(Y) & \xrightarrow{q_*} & S_*(Y)/S_*(B) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

この可換図式から長完全列の可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
\longrightarrow & H_*(A) & \longrightarrow & H_*(X) & \longrightarrow & H_*(X,A) & \longrightarrow & H_{*-1}(A) & \longrightarrow \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\longrightarrow & H_*(B) & \longrightarrow & H_*(Y) & \longrightarrow & H_*(Y,B) & \longrightarrow & H_{*-1}(B) & \longrightarrow
\end{array}$$

が導かれる．一番右の四角が可換であることを示そう (それが問題である)．長完全列の構成から，$H_*(X,A) \to H_{*-1}(A)$ は次のように得られたことを思い出す．

> $x \in H_*(X,A)$ をとる．x を代表するサイクル $[c] \in S_*(X)/S_*(A)$ をとる．
> ただし $c \in S_*(X)$ は X のチェイン．$\partial[c] = 0$ より $\partial c \in S_{*-1}(A)$ である．
> このとき $[\partial c] \in H_{*-1}(A)$ が x の行先である．

この状況で，$y = f_*(x) \in H_*(Y,B)$ を考える．y は $[f_*(c)] \in S_*(Y)/S_*(B)$ で代表される．ただし $f_*(c) \in S_*(Y)$ は Y のチェイン．このとき $\partial f_*(c) \in S_{*-1}(B)$ であって，y の行先は $[\partial f_*(c)] \in H_{*-1}(B)$ である．これは $[f_*\partial(c)] = f_*[\partial(c)]$ に等しい．

$$\begin{array}{ccc}
H_*(X,A) \ni x & \longmapsto & [\partial c] \in H_*(A) \\
\downarrow f_* & & \downarrow f_* \\
H_*(Y,B) \ni y & \longmapsto & [\partial f_*(c)] \in H_*(B)
\end{array}$$

問題 59　(1) 位相空間対の写像 $(X,A) \to (X,U)$ の導く長完全列の間の可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
\longrightarrow & H_k(A) & \longrightarrow & H_k(X) & \longrightarrow & H_k(X,A) & \longrightarrow & H_{k-1}(A) & \longrightarrow \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\longrightarrow & H_k(U) & \longrightarrow & H_k(X) & \longrightarrow & H_k(X,U) & \longrightarrow & H_{k-1}(U) & \longrightarrow
\end{array}$$

を考える．包含写像 $A \to U$ はホモトピー同値写像なので，$H_k(A) \to H_k(U)$ は同型である．5 項補題より $H_k(X,A) \to H_k(X,U)$ は同型である．

次に $* = A/A$ は U/A の strong deformation retract であることを示そう．レトラクション $r\colon U \to A$ は $\overline{r}\colon U/A \to *$ を誘導する．さらに $i \circ r$ と id_U の間のホモトピー $h\colon U \times [0,1] \to U$ は $A \times [0,1]$ 上で $h(a,t) = a$ を満たすので，連続写像 $\overline{h}\colon (U/A) \times [0,1] \to U/A$ を誘導する[1]．これは $i \circ \overline{r}$ と $\mathrm{id}_{U/A}$ の間のホモトピーであり，$\overline{h}(*,t) = *$ を満たす．従って $*$ は U/A の strong deformation retract である．上と同じ議論より $H_k(X/A,*) \cong H_k(X/A,U/A)$.

(2) X において A は閉集合で U は A を含む開集合であるから，切除定理の仮定を満たし $H_k(X,U) \cong H_k(X\backslash A, U\backslash A)$．また X/A において $*$ は閉集合で U/A は $*$ を含む開集合であるから，切除定理の仮定を満たし $H_k(X/A,U/A) \cong H_k((X/A)\backslash *, (U/A)\backslash *)$.

[1] 実際，$U \times [0,1] \to (U/A) \times [0,1]$ は商写像となる．一般に $X \to Y$ が商写像で Z が局所コンパクト空間なら $X \times Z \to Y \times Z$ は商写像となる (Hatcher, *Algebraic Topology*, Prop A.17)．この場合は，$\overline{h}$ を $(U/A) \times [0,1] \to (U \times [0,1])/(A \times [0,1]) \to U/A$ と分解して示すこともできる．

以上の同型は次の可換図式をなす.

$$\begin{tikzcd}
H_k(X,A) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\pi_*"] & H_k(X,U) \arrow[d, "\pi_*"] & H_k(X\setminus A, U\setminus A) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, "\pi_*"] \\
H_k(X/A,*) \arrow[r, "\cong"] & H_k(X/A, U/A) & H_k((X/A)\setminus *, (U/A)\setminus *) \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

最後に π を $X \setminus A$ に制限して得られる写像 $\pi\colon X \setminus A \to (X/A) \setminus *$ は同相であるから一番右の縦の写像は同型. よって全ての縦の写像は同型であり主張が従う.

問題 60 各自読んでください.