幾何学II　演習問題解答 No.11　 2019年12月25日

問題 50　No.10の解答を参照のこと．

問題 51　ゼロ切断 $M \subset E$ の (E の部分多様体としての) コンパクト Poincaré 双対は Thom 類 $\Theta \in H_c^r(E)$ で与えられた．一方，s は M と横断的であり，授業で説明したように $Z(s) = s^{-1}(M)$ の Poincaré 双対は $s^*\Theta \in H_c^r(M) \cong H^r(M)$ で与えられる．s と s_0 はホモトピックであるので，$s^*\Theta = s_0^*\Theta = e(E)$． 以上より示された．

問題 52　(1) Mayer-Vietoris 完全列を使って示すこともできるが，ここでは直接示そう．写像 $j_*\colon H_c^p(M \setminus \{x\}) \to H^p(M)$ が全単射であることを示す．以下では，x のある開近傍を D^n と同一視する．(x が $0 \in D^n$ に対応する．) また $0 < \epsilon \leq 1$ に対して $D^n(\epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < \epsilon\}$ とおき，同様に x の開近傍と同一視する．

(j_* の単射性) $[\omega] \in H_c^p(M \setminus \{x\})$ に対して $[j_*\omega] = 0$ と仮定する．このとき M 上の $p-1$ 形式 α が存在して $j_*\omega = d\alpha$．ω はコンパクト台なので，$d\alpha$ は x のある近傍 $D^n(\epsilon)$ で消えている．$p > 1$ のときは Poincaré の補題より，$\alpha|_{D^n(\epsilon)} = d\eta$ を満たす $D^n(\epsilon)$ 上の $p-2$ 形式 η が存在する．ここで $\rho \in C_c^\infty(D^n(\epsilon))$ を $\rho|_{D^n(\epsilon/2)} = 1$ を満たすものとするとき，$\rho\eta$ は M 上の滑らかな $p-2$ 形式に拡張される．このとき $j_*\omega = d\alpha = d(\alpha - d(\rho\eta))$ であるが，$\alpha - d(\rho\eta)$ は台が $M \setminus D^n(\epsilon/2)$ に含まれ，$M \setminus \{x\}$ 上のコンパクト台の微分形式を定める．従って $[\omega] = 0 \in H_c^p(M \setminus \{x\})$ である．$p = 1$ のときは，α は $D^n(\epsilon)$ 上で定数 c に等しく，$\omega = d\alpha = d(\alpha - c)$ で，$\alpha - c$ の台は $M \setminus D^n(\epsilon)$ に含まれるから，同じく $[\omega] = 0 \in H_c^p(M \setminus \{x\})$．

(j_* の全射性) $[\omega] \in H^p(M)$ を任意のコホモロジー類とする．$\omega|_{D^n}$ は閉形式であり，$p > 0$ であるから，Poincaré の補題より $\omega|_{D^n} = d\beta$ を満たす D^n 上の $p-1$ 形式 β が存在する．$\rho \in C_c^\infty(D^n)$ を $\rho|_{D^n(1/2)} = 1$ を満たすものとする．$\rho\beta$ は M 上の $p-1$ 形式に拡張される．ここで $\omega - d(\rho\beta)$ の台は $M \setminus D^n(1/2)$ に含まれ，$M \setminus \{x\}$ のコンパクト台の p 形式を定める．このとき $j_*[\omega - d(\rho\beta)] = [\omega]$ である．

(2) $\pi\colon \mathbb{CP}^n \setminus \{x_n\} \to \mathbb{CP}^{n-1}$ を $\pi[z_0, \ldots, z_n] = [z_0, \ldots, z_{n-1}]$ で定める．π のファイバーが $\mathbb{C}$ と同一視されることは容易に分かる．局所自明化を次のように与える．開集合 $U_j \subset \mathbb{CP}^{n-1}$ を $U_j = \{[z_0, \ldots, z_{n-1}] : z_j \neq 0\}$ と定め，

$$\phi_j\colon \pi^{-1}(U_j) \to U_j \times \mathbb{C}$$

を

$$\phi_j([z_0, \ldots, z_n]) = ([z_0, \ldots, z_{n-1}], z_n/z_j)$$

と定める．ϕ_j が微分同相であることは，座標を使って書けば明らかである．

(3) Thom 同型と (1) の結果から $p > 0$ に対して

$$H^p(\mathbb{CP}^n) \cong H_c^p(\mathbb{CP}^n \setminus \{x_n\}) \cong H^{p-2}(\mathbb{CP}^{n-1})$$

である．また $\mathbb{CP}^n$ は連結であるから $H^0(\mathbb{CP}^n) = \mathbb{R}$．このことから n についての帰納法で容易に主張が示せる．

(4) $H^2(\mathbb{CP}^n) \cong H^2_c(\mathbb{CP}^n \setminus \{x_n\})$ の生成元は Thom 同型より $\mathbb{CP}^n \setminus \{x_n\} \to \mathbb{CP}^{n-1}$ の Thom 類 $\xi_n \in H^2_c(\mathbb{CP}^n \setminus \{x_n\})$ によって与えられる．$\mathbb{CP}^n \setminus \{x_n\}$ は $\mathbb{CP}^{n-1}$ の管状近傍であり，授業で示した定理から，$\xi = j_*\xi_n \in H^2(\mathbb{CP}^n)$ は $\mathbb{CP}^{n-1}$ の Poincaré 双対である．これで前半の主張が示された．

直線束 $\mathbb{CP}^n \setminus \{x_n\} \to \mathbb{CP}^{n-1}$ の切断 s を $s([z_0, \ldots, z_{n-1}]) = [z_0, \ldots, z_{n-1}, z_{n-1}]$ で定める．s がゼロ切断と横断的であることは容易に確かめられる．s のゼロ点集合 $Z(s)$ は $\mathbb{CP}^{n-2}$ であり，その ($\mathbb{CP}^{n-1}$ の部分多様体としての) Poincaré 双対は問題 51 より $\xi' = \xi|_{\mathbb{CP}^{n-1}}$ で与えられる．ξ は $\mathbb{CP}^{n-1}$ の Poincaré 双対だから，

$$\int_{\mathbb{CP}^n} \xi^n = \int_{\mathbb{CP}^n} \xi^{n-1} \wedge \xi = \int_{\mathbb{CP}^{n-1}} (\xi')^{n-1}$$

ξ' は $\mathbb{CP}^{n-2}$ の $\mathbb{CP}^{n-1}$ の部分多様体としての Poincaré 双対であったから，n に関する帰納法により

$$\int_{\mathbb{CP}^n} \xi^n \neq 0$$

が示せる．従ってコホモロジー類として $\xi^n \neq 0$．次数の理由から $\xi^{n+1} = 0$ であるから，環の単射準同型 $\mathbb{R}[\xi]/(\xi^{n+1}) \to H^*(\mathbb{CP}^n)$ が存在する．(3) の次元の計算からこの写像は同型である．

注: 与えられた埋め込み $\mathbb{CP}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{CP}^n$ は次の部分多様体 $S_i \cong \mathbb{CP}^{n-1}$ の埋め込み $(0 \leq i \leq n)$ と全てホモトピックである．

$$S_i = \{[z_0, \ldots, z_n] \in \mathbb{CP}^n : z_i = 0\} \hookrightarrow \mathbb{CP}^n$$

No.10 の問題 49 より S_i のポアンカレ双対は全て ξ に等しい．$k = 1, \ldots, n$ に対して，ξ^k は (横断的な交わり)$S_1 \cap \cdots \cap S_k \cong \mathbb{CP}^{n-k}$ の Poincaré 双対であり，特に $k = n$ の場合には 1 点の Poincaré 双対となる．このことからも $\xi^n \neq 0$ が言える．

問題 53　i 面を与える写像 $\partial_i \colon \Delta^{q-1} \to \Delta^q$ を (単体複体のときに倣って)

$$\partial_i = \langle e_0, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_q \rangle$$

と表示することにする．これは Δ^{q-1} の頂点の行き先を並べて書いたものである．(単体複体のときは順序を偶置換だけ変えたものを同一視したが，ここではそうはしない．) このとき $\sigma \in S_q(X)$ に対して

$$\begin{aligned}
\partial(\partial\sigma) &= \partial\left(\sum_{i=0}^{q}(-1)^i \sigma \circ \partial_i\right) \\
&= \partial\left(\sum_{i=0}^{q}(-1)^i \sigma \circ \langle e_0, \ldots, \check{e}_i, \ldots, e_q\rangle\right) \\
&= \sum_{i=0}^{q}(-1)^i \left(\sum_{j<i}(-1)^j \sigma \circ \langle e_0, \ldots, \check{e}_j, \ldots, \check{e}_i, \ldots, e_q\rangle\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \sum_{j>i}(-1)^{j-1} \sigma \circ \langle e_0, \ldots, \check{e}_i, \ldots, \check{e}_j, \ldots, e_q\rangle\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

問題 54　前問に倣って $\theta_i\colon \Delta^{q+1} \to \Delta^q \times I$ を

$$\theta_i = \langle e_0, \ldots, e_i, \tilde{e}_i, \ldots, \tilde{e}_q \rangle$$

と書くことにする．ただし e_i は $(e_i, 0)$ を表し，$\tilde{e}_i$ は $(e_i, 1)$ を表している．ここで

$$\begin{aligned}
\partial K(\sigma) &= \partial \left(\sum_{i=0}^{q} (-1)^i H \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \langle e_0, \ldots, e_i, \tilde{e}_i, \ldots, \tilde{e}_q \rangle \right) \\
&= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \Bigg(\sum_{j<i} (-1)^j H \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \langle e_0, \ldots, \check{e}_j, \ldots, e_i, \tilde{e}_i, \ldots, \tilde{e}_q \rangle \\
&\qquad\qquad + (-1)^i H \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \langle e_0, \ldots, e_{i-1}, \tilde{e}_i, \ldots, \tilde{e}_q \rangle \\
&\qquad\qquad + (-1)^{i+1} H \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \langle e_0, \ldots, e_i, \tilde{e}_{i+1}, \ldots, \tilde{e}_q \rangle \\
&\qquad\qquad + \sum_{j>i} (-1)^{j+1} H \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \langle e_0, \ldots, e_i, \tilde{e}_i, \ldots, \check{\tilde{e}}_j, \ldots, \tilde{e}_q \rangle \Bigg) \\
&= H \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \langle \tilde{e}_0, \ldots, \tilde{e}_q \rangle - H \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \langle e_0, \ldots, e_q \rangle \\
&\quad + \sum_{j=0}^{q} (-1)^j \Bigg(\sum_{i<j} (-1)^{i+1} H \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \langle e_0, \ldots, e_i, \tilde{e}_i, \ldots, \check{\tilde{e}}_j, \ldots, \tilde{e}_q \rangle \\
&\qquad\qquad + \sum_{i>j} (-1)^i H \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \langle e_0, \ldots, \check{e}_j, \ldots, e_i, \tilde{e}_i, \ldots, \tilde{e}_q \rangle \Bigg)
\end{aligned}$$

一方，

$$\begin{aligned}
K(\partial\sigma) &= K \left(\sum_{j=0}^{q} (-1)^j \sigma \circ \langle e_0, \ldots, \check{e}_j, \ldots, e_q \rangle \right) \\
&= \sum_{j=0}^{q} (-1)^j \Bigg(\sum_{i<j} (-1)^i H \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \langle e_0, \ldots, e_i, \tilde{e}_i, \ldots, \check{\tilde{e}}_j, \ldots, \tilde{e}_q \rangle \\
&\qquad\qquad + \sum_{i>j} (-1)^{i-1} H \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \langle e_0, \ldots, \check{e}_j, \ldots, e_i, \tilde{e}_i, \ldots, \tilde{e}_q \rangle \Bigg)
\end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned}
\partial K(\sigma) + K(\partial\sigma) &= H \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \langle \tilde{e}_0, \ldots, \tilde{e}_q \rangle - H \circ (\sigma \times \mathrm{id}) \circ \langle e_0, \ldots, e_q \rangle \\
&= f_*\sigma - g_*\sigma.
\end{aligned}$$

以上より K がチェインホモトピーを与えることが示された．

　f^* と g^* の間のチェインホモトピーは K の双対 $K^*\colon S^{q+1}(Y) \to S^q(X), \omega \mapsto \omega \circ K$ で与えられる．上の式の双対をとって

$$K^* \circ \delta + \delta \circ K^* = f^* - g^*$$

が成り立つ．(ここで δ は ∂ の双対であった．)