幾何学II　演習問題解答 No.10　 2019年12月18日

問題 45 (略解) Poincaré 双対定理はペアリング

$$H^p(M) \times H_c^{m-p}(M) \to \mathbb{R}, \quad ([\alpha], [\beta]) \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta$$

が非退化であることを主張していた．M が有限個の good cover を持つという仮定の下で，$H^*(M)$, $H_c^*(M)$ は有限次元であり，従ってこのペアリングの下で $H^p(M)$ と $H_c^{m-p}(M)$ は互いに双対空間である．このことから二つの主張は従う．

問題 46 (No.5, 問題 20 も参照)　問題 20 で示したように，写像

$$(x, y, z) \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x, y, z), \log(x^2+y^2+z^2) \right)$$

により $M \cong S^2 \times \mathbb{R}$ であった．従って Poincaré の補題より

$$H^p(M) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & p = 0, 2 \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \qquad H_c^p(M) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & p = 1, 3 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{1}$$

と計算できる．次数の理由から $[\eta_P] = 0 \in H^3(M)$, $[\eta_{C,c}] = 0 \in H_c^2(M)$, $[\eta_H] = 0 \in H^1(M)$，$[\eta_S] = 0 \in H^1(M)$ であることが分かる．従って (積分は閉微分形式の代表元の取り方によらないから) $\eta_P = \eta_H = \eta_S = \eta_{C,c} = 0$ としてよい．

次に η_R を与えよう．η_R は

$$\int_R \alpha = \int_M \alpha \wedge \eta_R, \quad \forall[\alpha] \in H_c^1(M)$$

を満たす微分形式である．M を $S^2 \times \mathbb{R}$ と同一視し，$\mathbb{R}$ の座標を t とする．$e = e(t)dt \in \Omega_c^1(\mathbb{R})$ を $\int_{-\infty}^{\infty} e(t)dt = 1$ を満たす微分形式とする．Poincaré の補題を使った上の同型 (1) の作り方から，$H_c^1(M) \cong \mathbb{R}$ の生成元は $[e]$ で与えられる．従って

$$1 = \int_R e = \int_M e \wedge \eta_R$$

を満たす閉 2 次微分形式 η_R を与えればよい．S^2 上の 2 次微分形式 $\sigma \in \Omega^2(S^2)$ で $\int_{S^2} \sigma = 1$ を満たすものをとり，$\pi\colon M \cong S^2 \times \mathbb{R} \to S^2$ を射影とするとき，$\eta_R = \pi^*\sigma$ は明らかに上の性質を満たす．(ただし S^2 には，$M \cong S^2 \times \mathbb{R}$ が向きを保つ同型となるように向きを入れておくこととする．) また Poincaré の補題より，このコホモロジー類 $[\eta_R] = \pi^*[\sigma]$ は $H^2(M)$ の基底である．

次に $\eta_C = 0$ ととれることを示そう．同様の議論により

$$0 = \int_C e$$

を示せばよいが，C は $S^2 \times \{0\}$ に含まれているので $e|_C = 0$ となり，この式が成立する．

次に $\eta_{P,c}$ は $\int_M \eta_{P,c}=1$ を満たすコンパクト台の 3 次微分形式とすればよい．(例えば点 $(1,0,0)$ の小さい近傍に台を持ついわゆる "bump form"．) 実際，任意の 0 次の閉微分形式 α は定数関数であるから，

$$\int_P \alpha = \int_M \alpha\wedge\eta_{P,c}, \quad \forall[\alpha]\in H^0(M)$$

が自明に成立する．

また，$\eta_{S,c}=e$ ととればよいことを示そう．ただし $e=e(t)dt$ は上に定義したもの．Poincaré の補題を使った上の同型 (1) の作り方から，$H^2(M)\cong\mathbb{R}$ の生成元は $\pi^*\sigma$ で与えられる．一方

$$\int_S \pi^*\sigma = \int_M \pi^*\sigma\wedge e$$

が成立するので，$\eta_{S,c}=e$ が Poincaré 双対の代表元となる．

最後に $\eta_R=\pi^*\sigma$, $\eta_{S,c}=e$ であることから $\int_M \eta_R\wedge\eta_{S,c}=1$ が分かる．

注意　$\eta_P=\eta_C=\eta_S=\eta_H=0$ ととれることの別の (幾何学的な) 証明としては，P,C,S,H がある閉部分多様体の境界であることを使ってもよい．実際，P は $\{(x,0,0):x\geq 1\}$ の境界，C は $\{(x,y,z)\in M: x^2+y^2+z^2=1, z\geq 0\}$ の境界，S は $\{(x,y,z)\in M: x^2+y^2+z^2\leq 1\}$ の境界，H は $\{(x,y,z)\in M: z\geq 0\}$ の境界となっている．たとえば η_H の場合，任意のコンパクト台の閉微分形式 $\alpha\in\Omega_c^2(M)$ に対して Stokes の定理より，

$$\int_H \alpha = \int_{\partial\{(x,y,z)\in M: z\geq 0\}} \alpha = \int_{(x,y,z)\in M, z\geq 0} d\alpha = 0.$$

従って $\eta_H=0$ ととれる．また C はコンパクト多様体の境界になっている事実から，同じ議論により $\eta_{C,c}=0$ ととれることが分かる．

注意　$\int_M \eta_R\wedge\eta_{S,c}=1$ は R と S の交点数が 1 であることを反映している．

問題 47　$\Theta\in\Omega_{cv}^r(E)$ を Thom 類を代表する閉微分形式とする．まず E の任意の切断 s に対して

$$s^*[\Theta]=s_0^*[\Theta]\in H^r(M)$$

を示そう．$j\colon H_{cv}^r(E)\to H^r(E)$ を自然な写像とするとき，$s^*[\Theta]=s^*(j[\Theta])$, $s_0^*[\Theta]=s_0^*(j[\Theta])$ であることに注意する．(すなわち，引き戻し s^*, s_0^* は $H_{cv}^r(E)\to H^r(E)\to H^r(M)$ と分解する．) s と s_0 は互いにホモトピックであるから，$s^*=s_0^*\colon H^r(E)\to H^r(M)$ であり，上の等式が従う．

次に，s を問題に与えられた至る所消えない切断とする．Θ はファイバー方向に台がコンパクトであるから，ある正の値をとる M 上の C^∞ 級関数 $f(x)$ が存在して全ての $x\in M$ について $f(x)s(x)\notin \operatorname{Supp}\Theta$．従って $\tilde{s}(x)=f(x)s(x)$ とおくとき，$\tilde{s}^*\Theta=0$．従って上の等式から $e(E)=s_0^*[\Theta]=\tilde{s}^*[\Theta]=0$.

問題 48 (略解)　M のアトラス $\{(U_\alpha; x_1^{(\alpha)},\dots,x_n^{(\alpha)})\}$ は TM のアトラス

$$\{(U_\alpha\times\mathbb{R}^n, x_1^{(\alpha)},\dots,x_n^{(\alpha)},y_1^{(\alpha)},\dots,y_n^{(\alpha)})\}$$

を定める．ただし座標 $(x_1^{(\alpha)},\dots,x_n^{(\alpha)},y_1^{(\alpha)},\dots,y_n^{(\alpha)})$ は接束の点

$$\sum_{i=1}^n y_i^{(\alpha)}\left(\frac{\partial}{\partial x_i^{(\alpha)}}\right)_x$$

を表すものとする．座標変換のヤコビアンが正の関数 $\det((\partial x_i^{(\alpha)}/\partial x_j^{(\beta)})_{i,j})^2$ で与えられることを示せばよい．

問題 49　定義より任意の s 次閉微分形式 α について

$$\int_{f(S)}\alpha=\int_{g(S)}\alpha$$

を示せばよい．$S\times I$ に引き戻した微分形式 $H^*\alpha$ に対して Stokes の定理を適用して

$$0=\int_{S\times I}d(H^*(\alpha))=\int_{S\times\{1\}}H^*\alpha-\int_{S\times\{0\}}H^*\alpha=\int_S f^*\alpha-\int_S g^*\alpha$$

すなわち，$\int_{f(S)}\alpha=\int_{g(S)}\alpha$ を得る．

問題 50　(1) s のゼロ点は $(0,0,\pm1)$ の 2 点である．x,y はこれらの点の近くでの座標を与える．(ただし (x,y,z) を $\mathbb{R}^3$ の座標としている．) この座標 (x,y) によりこれらの点での S^2 の接空間は $\mathbb{R}^2$ と同一視され，また TS^2 の接空間は $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ と同一視される．この同一視の下で，ゼロ切断の接空間は $T_1=\{(x,y,0,0):x,y\in\mathbb{R}\}$, $\mathrm{Im}(s)$ の接空間は $T_2=\{(x,y,-y,x):x,y\in\mathbb{R}\}$ であり，これらは $T_1+T_2=\mathbb{R}^4$ を満たす．従って $\mathrm{Im}(s)$ と S^2 は横断的である．

点 $(0,0,1)$ の近傍では x,y は向き付けられた座標である．従って $T_{(0,0,1)}(TS^2)$ の向きは $\mathbb{R}^4$ の標準的な向きと一致し，T_1 の向きは基底 $(1,0,0,0),(0,1,0,0)$ によって与えられ，T_2 の向きは $(1,0,0,1),(0,1,-1,0)$ によって与えられる．行列式の計算

$$\begin{vmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{vmatrix}=1$$

より $T_1\oplus T_2\cong\mathbb{R}^4$ は向きを保つ[1]．従って $(0,0,1)$ の向きは正である．

点 $(0,0,-1)$ の近傍では (y,x) が向き付けられた座標となるが，ファイバー方向の向きも同じく逆になるので，$T_{(0,0,-1)}TS^2$ の向きは $\mathbb{R}^4$ の標準的な向きと一致する．T_1 の向きは基底 $(0,1,0,0),(1,0,0,0)$ によって与えられ，T_2 の向きは基底 $(0,1,-1,0),(1,0,0,1)$ によって与えられる．同様の計算により $(0,0,-1)$ の向きも正である．

(2) $\mathrm{Im}(s)$ のコンパクト Poincaré 双対を η' とするとき，問題 49 より $\eta=\eta'$．従って

$$\int_{S^2}\eta=\int_{TS^2}\eta\wedge\eta=\int_{TS^2}\eta\wedge\eta'=\int_{TS^2}\eta_{S^2\cap\mathrm{Im}(s)}=\int_{S^2\cap\mathrm{Im}(s)}1$$

[1] 授業では横断的な交わり $S\pitchfork R$ に対して $S\cap R$ の向き付けを，法ベクトル束の言葉を用いて，$N_{S\cap R}\cong N_S\oplus N_R$ が向きを保つ同型になるように定めた．(また法ベクトル束は $TS\oplus N_S\cong TM|_S$ が向きを保つように向き付けられていた．) 交わりが 0 次元のときは，この解答のように，接ベクトル空間の言葉で考えても同じである．(何故か？)

ここで授業で紹介した定理

$$\eta \wedge \eta' = \eta_{S^2 \cap \mathrm{Im}(s)}$$

を使った．(1) での向きの計算から最後の値は 2 である．

(3) η は TS^2 の Thom 類であったことを思い出そう．もし TS^2 が自明束 $S^2 \times \mathbb{R}^2$ と同型であれば，同型 $TS^2 \cong S^2 \times \mathbb{R}^2$ を通じて $\eta = \pi_2^* \sigma$ ととれる．ただし，$\pi_2 \colon S^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は射影で $\sigma \in \Omega_c^2(\mathbb{R}^2)$ は $\int_{\mathbb{R}^2} \sigma = 1$ を満たすコンパクト台の微分形式．このとき $\int_{S^2} \eta = \int_{S^2} \pi_2^* \sigma = 0$ より (2) に矛盾する．