幾何学 II　演習問題解答 No.1　 2019 年 10 月 2 日

問題 1 チェイン複体は次で与えられる．

$$\begin{aligned} C_0(K) &= \mathbb{Z}\langle a\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle b\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle c\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle d\rangle \\ C_1(K) &= \mathbb{Z}\langle ab\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle ac\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle ad\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle bc\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle bd\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle cd\rangle \\ C_2(K) &= \mathbb{Z}\langle abc\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle abd\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle acd\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle bcd\rangle \end{aligned}$$

ただし $\langle ab\rangle$, $\langle abc\rangle$ 等は向き付けられた単体を表す．境界作用素はこの基底に関して次の行列で与えられる．

$$C_2(K) \cong \mathbb{Z}^4 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}} C_1(K) \cong \mathbb{Z}^6 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}} C_0(K) \cong \mathbb{Z}^4.$$

従って

$$\begin{aligned} B_0(K) &= \{{}^t(x,y,z,w) : x+y+z+w=0\} \\ Z_1(K) &= \{{}^t(x,y,-x-y,u,x-u,y+u) : x,y,u \in \mathbb{Z}\} \\ &= \langle {}^t(1,0,-1,0,1,0), {}^t(0,1,-1,0,0,1), {}^t(0,0,0,1,-1,1)\rangle \\ &= B_1(K) \\ Z_2(K) &= \langle {}^t(1,-1,1,-1)\rangle \end{aligned}$$

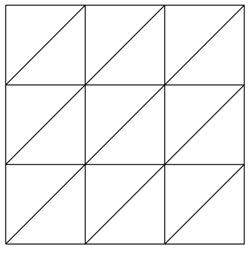
となりホモロジー群は次で与えられる．

$H_0(K) \cong \mathbb{Z}$　　生成元は $\langle a\rangle$ (または $\langle b\rangle$, $\langle c\rangle$, $\langle d\rangle$ どれでもよい)

$H_1(K) \cong 0$

$H_2(K) \cong \mathbb{Z}$　　生成元は $\langle abc\rangle - \langle abd\rangle + \langle acd\rangle - \langle bcd\rangle$

問題 2　例えば，次の分割をとるとよい（2 単体の数がもっと少ないものを見つけてみよう）:



問題 3　頂点の順列 $(a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$ によって定まる単体の向きに対して，E の向きを接空間の基底 $a_{i_1} - a_{i_0}, \dots, a_{i_n} - a_{i_0}$ で定めることができる．この定め方は well-defined であることを示そう．順列 $(a_{j_0}, \dots, a_{j_n})$ が $(a_{i_0}, \dots, a_{i_n})$ から偶置換で得られるとする．$j_0 = i_k$ とおく．$k = 0$ なら $(j_1, \dots, j_n)$ は $(i_1, \dots, i_n)$ の偶置換で得られるから，2 つの基底 $(a_{i_1} - a_{i_0}, \dots, a_{i_n} - a_{i_0})$, $(a_{j_1} - a_{j_0}, \dots, a_{j_n} - a_{j_0})$ の向きは一致している．また $k > 0$ なら，

$$
\begin{aligned}
&(a_{i_1} - a_{i_0}, \dots, \overbrace{a_{i_k} - a_{i_0}}^{k\text{ 番目}}, \dots, a_{i_n} - a_{i_0}) \text{ の向き} \\
&= (a_{i_1} - a_{i_k}, \dots, \overbrace{a_{i_k} - a_{i_0}}^{k\text{ 番目}}, \dots, a_{i_n} - a_{i_k}) \text{ の向き} \quad \text{(k 番目のベクトルを他のベクトルから引く)} \\
&= -(a_{i_1} - a_{j_0}, \dots, \overbrace{a_{i_0} - a_{j_0}}^{k\text{ 番目}}, \dots, a_{i_n} - a_{j_0}) \text{ の向き} \quad \text{(k 番目のベクトルを (-1) 倍する)} \\
&= (-1)^k (a_{i_0} - a_{j_0}, \dots, \overbrace{a_{i_k} - a_{j_0}}^{\text{のぞく}}, \dots, a_{i_n} - a_{j_0}) \text{ の向き}
\end{aligned}
$$

であるが，

$$
\begin{aligned}
1 = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} i_0 & \cdots & i_n \\ j_0 & \cdots & j_n \end{pmatrix} &= (-1)^k \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} i_k & i_0 & \cdots & \check{i_k} & \cdots & i_n \\ j_0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & j_n \end{pmatrix} \\
&= (-1)^k \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} i_0 & \cdots & \check{i_k} & \cdots & i_n \\ j_1 & \cdots & \cdots & \cdots & j_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

より最後の向きは基底 $(a_{j_1} - a_{j_0}, \dots, a_{j_n} - a_{j_0})$ の向きに等しい．

次に向き付けられた単体 $\langle a_0, \dots, a_n \rangle$ の第 i 面 $|a_0 \cdots \check{a}_i \cdots a_n|$ に (Stokes の定理において) 誘導される向きを考察する．上に定めたように，単体 $|a_0 \cdots a_n|$ には基底 $(a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0)$ の定める向きが入っている．$i \neq 0$ とすると，この向きは

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{i-1} \times (a_i - a_0, a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, \overbrace{a_i - a_0}^{\text{のぞく}}, \dots, a_n - a_0) \text{ の向き} \\
&= (-1)^i \times (a_0 - a_i, a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, \overbrace{a_i - a_0}^{\text{のぞく}}, \dots, a_n - a_0) \text{ の向き}
\end{aligned}
$$

に等しい．$a_0 - a_i$ は第 i 面の「外向き」法ベクトルになっており，$a_1 - a_0, \dots, a_{i-1} - a_0, a_{i+1} - a_0, \dots, a_n - a_0$ は第 i 面の接空間の基底をなしているから，Stokes の定理において第 i 面に誘導される向きは

$$
(-1)^i \times (a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, \overbrace{a_i - a_0}^{\text{のぞく}}, \dots, a_n - a_0) \text{ の向き}
$$

すなわち，第 i 面に誘導された向きは $(-1)^i \langle a_0, \dots, \check{a}_i, \dots, a_n \rangle$ であらわされ，境界作用素 ∂ の定義式と合致している．最後に $i = 0$ のときを考えよう．このときは

$$
(a_1 - a_0, a_2 - a_0 \dots, a_n - a_0) \text{ の向き} = (a_1 - a_0, a_2 - a_1, \dots, a_n - a_1) \text{ の向き}
$$

であるが，a_1-a_0 が第 0 面の外向き法ベクトルであること，$a_2-a_1,\dots,a_n-a_1$ は第 0 面の接空間の基底であることに注意すれば， 第 0 面に誘導される向きは基底 $a_2-a_1,\dots,a_n-a_1$ によって与えられる．つまり第 0 面に誘導される向きは $\langle a_1,a_2,\dots,a_n\rangle$ となり，やはり境界作用素の定義式と合致する．

問題 4 (1) $\alpha\wedge\beta=(a_2b_3-a_3b_2)dy\wedge dz-(a_1b_3-a_3b_1)dz\wedge dx+(a_1b_2-a_2b_1)dx\wedge dy.$

(2) $dB=(\frac{\partial B_1}{\partial x}+\frac{\partial B_2}{\partial y}+\frac{\partial B_3}{\partial z})dx\wedge dy\wedge dz.$

(3) $dE=(\frac{\partial E_3}{\partial y}-\frac{\partial E_2}{\partial z})dy\wedge dz-(\frac{\partial E_3}{\partial x}-\frac{\partial E_1}{\partial z})dz\wedge dx+(\frac{\partial E_2}{\partial x}-\frac{\partial E_1}{\partial y})dx\wedge dy.$

(4) 略．

(5) $\varphi^*(xdy-ydx)=xyd(x^2+y^2)-(x^2+y^2)d(xy)=xy(2xdx+2ydy)-(x^2+y^2)(xdy+ydx)=(x^2y-y^3)dx+(xy^2-x^3)dy.$

(6) $dx\wedge dy=d(r\cos(\theta))\wedge d(r\sin(\theta))=(-r\sin(\theta)d\theta+\cos(\theta)dr)\wedge(r\cos(\theta)d\theta+\sin(\theta)dr)=rdr\wedge d\theta.$

(7) $\omega\wedge\omega\wedge\omega=6dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4\wedge dx_5\wedge dx_6.$

問題 5 (1) S^2 に $D^3=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2+z^2\le 1\}$ の境界としての向きを入れる．つまり T_pS^2 の正の基底 $\{v_1,v_2\}$ を $\{n_p,v_1,v_2\}$ が $\mathbb{R}^3$ の正の基底になるように選ぶ．(ここで n_p は p での外向き法ベクトル)．このときストークスの定理から

$$\begin{aligned}\int_{S^2}\eta=\int_{\partial D^3}\eta&=\int_{D^3}d(xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy)\\&=3\int_{D^3}dx\wedge dy\wedge dz=4\pi.\end{aligned}$$

(2) もし存在したとすると，ストークスの定理から $\int_{S^2}\eta=\int_{S^2}d\alpha=\int_{\partial S^2}\alpha=0$ となって (1) の結果と矛盾する．この結果から，η は S^2 の非自明な de Rham コホモロジー類を与えることが分かる．