# 幾何学II　授業の補足 (2019年12月18日)

授業で紹介した以下の定理の詳細な証明を与えよう．

**定理1**　$M$ を向き付けられた多様体，$S, R$ を向き付けられたコンパクト閉部分多様体とする．$S$ と $R$ が横断的に交わるとき，$S \cap R$ のコンパクト Poincaré 双対は

$$\eta_{S\cap R,c} = \eta_{S,c} \wedge \eta_{R,c}$$

で与えられる．同様に閉 Poincaré 双対は

$$\eta_{S\cap R} = \eta_S \wedge \eta_R$$

で与えられる．

**注**　$S\cap R$ は $N_{S\cap R} \cong N_S \oplus N_R$ が向きを保つ同型になるように向きを入れていた．(また一般に部分多様体 $Q \subset M$ に対して $TQ \oplus N_{Q/M} = TM|_Q$ が向きを保つ同型になるように法束 $N_{Q/M}$ に向きを入れていた．) $S$ と $R$ の順序を反対にすると交わりの向きは符号 $(-1)^{\operatorname{codim} S \cdot \operatorname{codim} R}$ だけ変化することに注意せよ．ただし $\operatorname{codim} S = \dim M - \dim S$ は $S$ の余次元である．

**注**　閉ポアンカレ双対の式の成立のためには，$S$, $R$ に対するコンパクト性の仮定は必要ない．

**注**　$S$(あるいは $R$) をほんの少しホモトピックに動かすことで $S$ と $R$ が横断的に交わるようにすることができる（横断性定理）．従ってコホモロジー類 $\alpha, \beta$ がある部分多様体の Poincaré 双対になっているとき，$\alpha \wedge \beta$ はそれらの部分多様体を横断的に交わるように動かしたとき，その交わりの Poincaré 双対である．

**定理1の証明**　$m = \dim M$, $s = \dim S$, $r = \dim R$ とおく．$q := \dim(S \cap R) = s + r - m$ とおく．$M$ 上の closed $q$-form $\alpha$ に対して，次を示せばよい．

$$\int_{S\cap R} \alpha = \int_M \alpha \wedge \eta_S \wedge \eta_R.$$

$R$ の Poincaré 双対 $\eta_R$ の定義から右辺は

$$\int_R \alpha \wedge \eta_S$$

に等しい．したがって次を示せば十分である．

**命題2**　$\eta_S|_R$ は $S \cap R$ の $R$ における Poincaré 双対である．

**命題2の証明**　$S$ の管状近傍を $T \subset M$ とする．$T$ は $M$ の開集合で，$S$ の $M$ における法束 $N_{S/M}$ と同一視される．また $S \cap R$ の $R$ における管状近傍を $T' \subset R$ とする．同様に $T' \cong N_{S\cap R/R}$ である．横断性の仮定から $x \in S \cap R$ に対して

$$N_{S/M,x} = T_xM/T_xS \cong T_xR/(T_xS \cap T_xR) = N_{S\cap R/R,x},$$

すなわち，$N_{S/M}|_{S\cap R} \cong N_{S\cap R/R}$ であることに注意する．またこの同型は向きを保っている．何故なら，向きを保つ同型

$$T_xM \cong T_x(S\cap R) \oplus N_{S\cap R/M,x} \cong T_x(S\cap R) \oplus N_{S/M,x} \oplus N_{R/M,x}$$

は向きを保つ同型

$$T_xR \cong T_x(S\cap R) \oplus N_{S/M,x}$$

を誘導し，同型 $N_{S\cap R/R,x} \cong N_{S/M,x}$ はこれから ($T_x(S\cap R)$ の成分を左からキャンセルさせることで）誘導されるものであるから．

記号の濫用であるが，$S$ の Poincaré 双対を代表するコンパクト台の閉微分形式を $\eta_S$ で表す．$\eta_S$ は $T \cong N_{S/M}$ の Thom 形式 (を 0 で拡張したもの）で与えられた．十分大きい実数 $t > 0$ に対してファイバー方向を $t$ 倍する写像[1]$t\colon T \to T, v \mapsto t \cdot v$ により引き戻すことで，$\eta_S$ の台はゼロ切断の任意の近傍に含まれるようにとれる．特に

$$\mathrm{Supp}(\eta_S) \cap R \subset T'$$

が成り立つと仮定してよい．$\eta_S|_R$ が $S \cap R$ の $R$ における Poincaré 双対であることを示すためには，$\eta_S|_R$ が $T' \cong N_{S\cap R/R}$ の Thom 形式であることを示せばよい．$\eta_S|_R$ は $T'$ 上のコンパクト台の閉形式であるから，任意の $x \in S \cap R$ に対して

$$\int_{T'_x} \eta_S = 1$$

を示せばよい．これを $T_x$ と $T'_x$ をホモトピックにつなぐことで示そう．以下の詳細な証明はやや技術的であるので，まず下の図を見て状況を理解しよう．

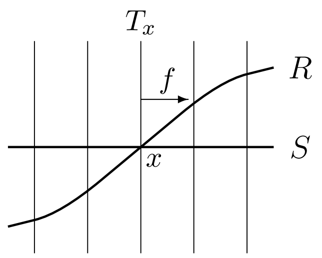


FIGURE 1. $S$ の管状近傍 $T$ と $S \cap R$ の $R$ における管状近傍 $T'$．$T$ の局所自明化をとるとき，$T'_x$ は $T_x$ 上の関数 $f$ のグラフとして表される

点 $x \in S \cap R$ を中心とする $S$ の座標近傍 $(U; u_1, \ldots, u_s)$ および $U$ 上での $T$ の自明化 $T|_U \cong U \times T_x$ をとる．$u_1(x) = \cdots = u_s(x) = 0$ とし，この座標 $(u_1, \ldots, u_s)$ の下で $U$ は $s$ 次元開円板と同一視されるとする．$R$ は $S$ と横断的に交わるので，自明化 $T|_U \cong U \times T_x$ のもとで,（原点の近傍で）$T'_x$ は $C^\infty$ 級関数 $T_x \to U$ のグラフとして書ける.（射影 $T|_U \cong U \times T_x \to T_x$ を $T'_x$ に制限したものに逆関数定理を適用せよ.）必要なら $U$ を小さく取り直すことにより，十分小さな $\epsilon > 0$ に対して

$$T'_x \cap B_\epsilon(T|_U) \cong \{(f(v), v) \in U \times B_\epsilon(T_x) : v \in B_\epsilon(T_x)\}$$

と表される．ここで $B_\epsilon(T|_U) \cong U \times B_\epsilon(T_x)$ は半径 $\epsilon > 0$ の円板束であり，$f\colon B_\epsilon(T_x) \to U$ は $C^\infty$ 級関数．実数 $t > 1$ に対して $T$ のファイバー方向の $t$ 倍に関する引き戻し $t^*\eta_S$ は $\eta_S$ と同じコホモロジー類を定めるから，ある $t > 1$ について $\int_{T'_x} t^*\eta_S = 1$ を示せば十分である．

十分大きい $t > 1$ に対して

$$\mathrm{Supp}(t^*\eta_S) \cap T'_x \subset T|_U \tag{1}$$

となることを示そう．すなわち $S$ の開近傍 $V$ が存在して $V \cap T'_x \subset T|_U$ を示せばよい．まず $\overline{T'_x} \cap S = \{x\}$ を示そう．ただし $\overline{T'_x}$ は $T'_x$ の $M$ における閉包．$R$ は閉集合なので $\overline{T'_x} \subset R$．したがって $\overline{T'_x} \cap S \subset R \cap S \subset T'$．一方 $T'_x$ は $T'$ の閉集合なので $\overline{T'_x} \cap T' = T'_x$．よって $\overline{T'_x} \cap S = T'_x \cap S = \{x\}$．このとき閉集合 $\overline{T'_x} \setminus (T|_U)$ は $S$ とは交わらない．$V$ を $\overline{T'_x} \setminus (T|_U)$ の補集合とすれば主張が成り立っている．

[1]ここでは $S$ のコンパクト性を仮定しているが，$S$ がコンパクトでないときは $t$ を $S$ の点に依存する滑らかな関数にとる．

さらに $t>1$ を大きく取り直して

$$\mathrm{Supp}(t^*\eta_S)\cap T|_U \subset B_{\epsilon/2}(T|_U) \tag{2}$$

とすることができる．$B_\epsilon(T_x)$ と $T'_x \cap B_\epsilon(T|_U)$ を結ぶホモトピー $h_\lambda\colon B_\epsilon(T_x)\to B_\epsilon(T|_U)$, $0\le\lambda\le 1$ を

$$h_\lambda(v)=(\lambda f(v),v)\in U\times B_\epsilon(T_x)\cong B_\epsilon(T|_U)$$

で定義すると $h_0=\mathrm{id}$, $h_1\colon B_\epsilon(T_x)\cong T'_x\cap B_\epsilon(T|_U)$．任意の $\lambda\in[0,1]$ に対して $\mathrm{Supp}\, h_\lambda^*(t^*\eta_S)\subset B_{\epsilon/2}(T_x)$ であり，$h_\lambda^*(t^*\eta_S)$ はコンパクト台閉形式．

$$\begin{aligned}
\int_{T'_x} t^*\eta_S &= \int_{T'_x\cap T|_U} t^*\eta_S && (\text{式 (1) より})\\
&= \int_{T'_x\cap B_\epsilon(T|_U)} t^*\eta_S && (\text{式 (2) より})\\
&= \int_{B_\epsilon(T_x)} h_1^*(t^*\eta_S) && (h_1 \text{ は向きを保つ：第一段落を見よ})\\
&= \int_{B_\epsilon(T_x)} h_0^*(t^*\eta_S) && (\text{Stokes の定理})\\
&= \int_{B_\epsilon(T_x)} t^*\eta_S = 1
\end{aligned}$$

ただし 4 行目では $B_\epsilon(T_x)\times[0,1]$ 上のコンパクト台の閉微分形式 $H^*(t^*\eta_S)$ に対して Stokes の定理を適用している．(ただし $H(v,\lambda)=h_\lambda(v)$.）以上より示された．

定理 1 の証明に用いられた命題 2 は次の状況に拡張される．$M, M'$ を多様体とし，$S\subset M$ を部分多様体とする．$C^\infty$ 級写像 $f\colon M'\to M$ が $S$ に横断的である，すなわち任意の点 $x\in f^{-1}(S)$ に対して

$$d_xf(T_xM')+T_{f(x)}S=T_{f(x)}M$$

が成り立つと仮定する．このとき $f^{-1}(S)$ は部分多様体になる．$M, M', S$ が向き付けられているとき，$f^{-1}(S)$ の向きを $df$ の誘導する同型

$$N_{f^{-1}(S)/M'}\cong f^{-1}N_{S/M}$$

によって定めることにする．このとき次が成り立つ．

**定理 3**　$M, M'$ を向き付けられた多様体，$S\subset M$ をコンパクトで向き付けられた部分多様体，$f\colon M'\to M$ を $S$ と横断的な固有 $C^\infty$ 級写像とする．このとき

$$\eta_{f^{-1}(S),c}=f^*\eta_{S,c}$$

が成立する．

命題 2 は定理 3 において $M'=R$, $f\colon M'\to M$ を埋め込み，とした特別な場合である.（このとき $f^{-1}(S)=S\cap R$.）定理 3 の証明は命題 2 とほとんど同じである．