幾何学 II　演習問題 No.9　2019 年 12 月 11 日

問題 39　M を向き付けられた多様体，$E \to M$ を向き付けられたベクトル束とする．このとき E は多様体として向き付け可能であることを示せ．

問題 40　$\pi\colon E \to M$ を向き付けられたベクトル束とする．ファイバーに沿った積分 $\pi_*\colon \Omega^*_{cv}(E) \to \Omega^*(M)$ は外微分と可換であることを示せ．つまり $d \circ \pi_* = \pi_* \circ d$ が成り立つことを示せ．

問題 41　$\pi\colon E \to M$ を向き付けられたベクトル束，$f\colon N \to M$ を C^∞ 級写像とする．ベクトル束 $E \to M$ の f による引き戻しを $\pi'\colon f^{-1}E \to N$ と書くとき，次の可換図式がある．

$$\begin{tikzcd} f^{-1}E \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\pi'"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ N \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

ここで，$\omega \in \Omega^*_{cv}(E)$ に対して次の base change formula を示せ．

$$\pi'_*(\tilde{f}^*\omega) = f^*(\pi_*\omega)$$

注意：ファイバーに沿った積分は (1) base change, (2) projection formula，(3) 1 点上の向き付けられたベクトル束 $\pi\colon E \to \{\mathrm{pt}\}$ に対して $\pi_*(\alpha) = \int_E \alpha$ となる，という 3 つの性質で一意に特徴づけられる．

問題 42　M を向き付けられた多様体，$E \to M$ を向き付けられたベクトル束とする．このとき E は問題 39 より多様体として向き付けられている．次を示せ．

(1) $\omega \in \Omega^*_c(E)$ に対して

$$\int_E \omega = \int_M \pi_*\omega.$$

(2) $\tau \in \Omega^*_c(M)$, $\omega \in \Omega^*_{cv}(E)$ に対して

$$\int_E \pi^*\tau \wedge \omega = \int_M \tau \wedge \pi_*\omega.$$

問題 43　$\pi\colon E \to M$ をベクトル束とする．E 上の任意のベクトル束 $V \to E$ に対してある M 上のベクトル束 $F \to M$ が存在して $V \cong \pi^{-1}F$ となることを示せ．

問題 44　向き付けられた階数 r の実ベクトル束 $E \to M$ の Thom 類 $\Theta \in H^r_{cv}(E)$ は次を満たしていた．

任意の $x \in M$ に対して，$\Theta|_{E_x}$ は $H^r_c(E_x)$ の生成元である．

逆に階数 r のベクトル束 $E \to M$ に対して，この条件を満たす $\Theta \in H^r_{cv}(E)$ が存在するとき，E は向き付け可能であることを示せ．