幾何学 II　演習問題 No.8　2019 年 12 月 4 日

問題 33　$p\colon E \to M$ をベクトル束とする．E と M はホモトピー同値であることを示せ．(p がホモトピー同値写像となる．) 特に，$p^*\colon H^*(M) \cong H^*(E)$.

問題 34　実射影平面 $\mathbb{RP}^2$ の無限遠点のなす集合 $\{[x, y, 0]\} \cong \mathbb{RP}^1$ のある開近傍は Möbius の帯と微分同相であることを示せ．このことと，Mayer-Vietoris 完全列を用いて $\mathbb{RP}^2$ のコホモロジーを計算せよ．

問題 35　(1) $E \to M$ を n 次元実ベクトル束とする．M の開被覆 $\{U_\alpha\}$ に関する変換関数が $g_{\alpha\beta}\colon U_{\alpha\beta} \to GL(n, \mathbb{R})$ で与えられるとき，E の双対束 E^* の変換関数は ${}^t g_{\alpha\beta}^{-1}$ で与えられることを説明せよ．

(2) 有限次元の実ベクトル空間 V, W について，標準的な同型 $\mathrm{Hom}(V, W) \cong V^* \otimes W$ を作れ．(この同型は V, W について functorial である．)

問題 36　$L \to M$ を実 (あるいは複素) 直線束とする．L が至る所消えない切断 $s\colon M \to L$ (すなわち，$\forall x \in M,\ s(x) \neq 0$ を満たす切断) を持つとき，L は自明束 $M \times \mathbb{R} \to M$ (あるいは $M \times \mathbb{C} \to M$) と同型であることを示せ.

問題 37　Möbius の帯を S^1 上の直線束と思ったとき，自明束 (と同型) ではないことを示せ.

問題 38　T^n の接ベクトル束は自明束であることを示せ.