幾何学II　演習問題 No.7　2019年11月27日

問題 27　C^∞ 級写像 $f\colon S^2 \to S^2$ に対して $p \in S^2$ が正則値であり，$f^{-1}(p)$ がただ1点からなるとする．このとき $f^*\colon H^2(S^2) \to H^2(S^2)$ は同型写像であることを示せ．(ヒント：授業で説明した，$\deg f$ の2つの定義の同値性の証明をまねる．)

問題 28　$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$ を考える．

(1) つぎの微分形式 ω は $H^2(S^2)$ の生成元であることを示せ．(ヒント：ストークスの定理)

$$\omega = xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy$$

(2) 写像 $f\colon S^2 \to S^2$ を $f(x,y,z) = (-x,-y,-z)$ で定める．f の写像度 $\deg f$ を授業で説明した2通りの方法で求めよ．

問題 29　整数係数の2次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} n & m \\ l & k \end{pmatrix}, \qquad n,m,l,k \in \mathbb{Z}$$

に対して写像 $f_A\colon S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1$ を

$$f_A(z_1, z_2) = (z_1^n z_2^m, z_1^l z_2^k)$$

で定める．ただし S^1 を絶対値1の複素数全体 $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ と同一視している．$f_A^*\colon H^*(S^1 \times S^1) \to H^*(S^1 \times S^1)$ を行列表示せよ．(ヒント：$H^*(S^1)$ の基底を与える閉微分形式をとり，Künneth の定理を使って $H^*(S^1 \times S^1)$ の基底を作ってみよう．)

問題 30 [Bott-Tu, Exercise 6.46]　問題28における写像 $f\colon S^2 \to S^2$, $f(x,y,z) = (-x,-y,-z)$ を考える．写像 f は $f \circ f = \mathrm{id}$ を満たし，S^2 に $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の作用を定める．$\mathbb{RP}^2$ はこの $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 作用に関する S^2 の商であった．つまり

$$\mathbb{RP}^2 = S^2 \big/ (x,y,z) \sim f(x,y,z)$$

である．

(1) $\Omega^p(\mathbb{RP}^2) \cong \{\alpha \in \Omega^p(S^2) : f^*\alpha = \alpha\}$ を示せ．

(2) $H^p(\mathbb{RP}^2) \cong \{\alpha \in H^p(S^2) : f^*\alpha = \alpha\}$ を示せ．(ヒント：群作用による平均)．

(3) $H^p(\mathbb{RP}^2)$ を求めよ．

問題 31　任意の C^∞ 級写像 $f\colon S^4 \to S^2 \times S^2$ の写像度は0であることを示せ．(ヒント：コホモロジーの積構造を用いる．)

問題 32　任意の固有 (proper) な C^∞ 級写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \times S^1$ の写像度は0であることを示せ．(ヒント：積構造を使う．)