幾何学II　演習問題 No.6　 2019 年 11 月 20 日

問題 24　$\mathbb{R}^2$ から 2 点 $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (3,0)$ を除いた空間を M とおく．

(1) Mayer-Vietoris 完全列を用いて $H^*(M)$ と $H_c^*(M)$ を求めよ．(ただし Poincaré 双対性 $H^q(M) \cong (H_c^{2-q}(M))^*$ は使わないこと．) 通常のコホモロジー $H^*(M)$ については No.4 の問題 19 で扱ったが，もう一度復習しよう．

(2) $H_c^1(M)$ の基底 $\{\omega_1, \omega_2\}$ と $H^1(M)$ の基底 $\{\tau_1, \tau_2\}$ を各々見つけよ．さらに $\int_M \tau_i \wedge \omega_j$ を計算せよ．(Poincaré duality からこの行列は非退化である．)

(3) 必要ならば $H_c^1(M)$ の基底 $\{\omega_1, \omega_2\}$ をうまく取り直し，M のコンパクトな部分多様体 S_1, S_2 であって

$$\int_{S_i} \tau = \int_M \tau \wedge \omega_i$$

が全ての $\tau \in H^1(M)$ に対して成立するものを与えよ．また，必要ならば $H^1(M)$ の基底 $\{\tau_1, \tau_2\}$ をうまく取り直し，M の閉部分多様体 R_1, R_2 であって

$$\int_{R_i} \omega = \int_M \tau_i \wedge \omega$$

が全ての $\omega \in H_c^1(M)$ に対して成立するものを与えよ．

(4) $H^1(M)$ の元 τ であって

$$\int_{P_1P_2} \omega = \int_M \tau \wedge \omega$$

が全ての $\omega \in H_c^1(M)$ に対して成立するものを与えよ．ただし P_1P_2 は P_1 と P_2 を結ぶ線分で両端を含まないものを表す．

問題 25　5 項補題 (five lemma) を証明せよ．すなわち，以下のアーベル群とアーベル群の準同型のなす可換図式において，各行が完全で，$\alpha, \beta, \delta, \epsilon$ が同型であるならば，γ も同型であることを示せ．

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\gamma"'] & D \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "\delta"'] & E \arrow[d, "\epsilon"'] \\
A' \arrow[r, "f_1'"] & B' \arrow[r, "f_2'"] & C' \arrow[r, "f_3'"] & D' \arrow[r, "f_4'"] & E'
\end{tikzcd}$$

問題 26　M を向き付け可能な多様体とする．Poincaré の補題における同型写像 $\pi^*\colon H^{n-k}(M) \to H^{n-k}(M \times \mathbb{R})$ は Poincaré 双対性の下で (符号を除き) ファイバーに沿った積分 $\pi_*\colon H_c^{k+1}(M \times \mathbb{R}) \to H_c^k(M)$ の双対写像であることを示せ．

問題 22 (再掲[1][Bott-Tu, Exercise 4.8])　メビウスの帯 $M = [0,1] \times \mathbb{R}/(0,x) \sim (1,-x)$ のコンパクト台コホモロジー $H_c^*(M)$ を求めよ．

---

[1] 前回の演習 No.5 で扱ったが，まだ復習していない人はやっておこう． 以前の演習問題とその解答は `https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~iritani/teaching2019kikaII.htm` を見よ．